

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 8. Ірраціональні нерівності

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) познайомитеся з поняттям ірраціональної нерівності та її ОДЗ;
- 2) узнаете схеми розв'язування найпростіших ірраціональних нерівностей;
- 3) познайомитеся з ідеєю застосування заміни змінної для розв'язування ірраціональних нерівностей;
- 4) застосуєте набуті знання для розв'язування ірраціональних нерівностей;
- 5) застосуєте ірраціональні нерівності для розв'язування геометричної задачі.

II. Повторення

1. Знайдіть ОДЗ рівняння $\sqrt{2x-5} = 6$.

А	Б	В	Г	Д
$[0, 4; +\infty)$	$[2, 5; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$[6; +\infty)$	$(5; +\infty)$

2. Число 2 є коренем рівняння ...

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2x-5} = 1$	$\sqrt{2x-5} = -1$	$\sqrt{5-2x} = 1$	$\sqrt{5-2x} = -1$	$\sqrt{2x+5} = 2$

3. Знайдіть множину розв'язків нерівності $x^2 + 3x + 2 < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2; -1)$	$[-2; -1]$	$(-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$	R	$\emptyset$

4. Оберіть спадну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{2}{3}}$	$y = x^{-\frac{2}{3}}$	$y = \sqrt{x}$

5. Оберіть нерівність, що не має дійсних розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x} \geq -2$	$\sqrt{x} \leq 2$	$x^{\frac{2}{3}} > 1$	$\sqrt{x} \leq -2$	$x^{\frac{2}{3}} \leq 1$

III. Означення ірраціональних нерівностей

Ви знаєте вже багато видів ірраціональних рівнянь та методів їхнього розв'язання, які часто використовуються в математиці та прикладних ситуаціях. Наступним логічним кроком є розгляд ірраціональних нерівностей та відповідної теорії, як *розв'язати нерівності* (знайти множину всіх чисел, що при підстановці замість змінної у початкову нерівність перетворюють її на правильну числову нерівність).

Означення. Ірраціональними називають нерівності, в яких невідома величина (змінна) знаходиться під знаком кореня або невідома величина підноситься до степеня з дробовим показником.

Так само, як і для ірраціональних рівнянь, важливу роль при розв'язуванні ірраціональних нерівностей відіграє *ОДЗ (область допустимих значень)* – множина значень змінної, при яких обидві частини нерівності мають сенс, тобто всі дії в них можна коректно виконати.

Примітка. Для коренів парного степеня підкореневі вирази мають бути невід'ємними. При піднесенні виразу до додатного дробового степеня, даний вираз має бути невід'ємним.

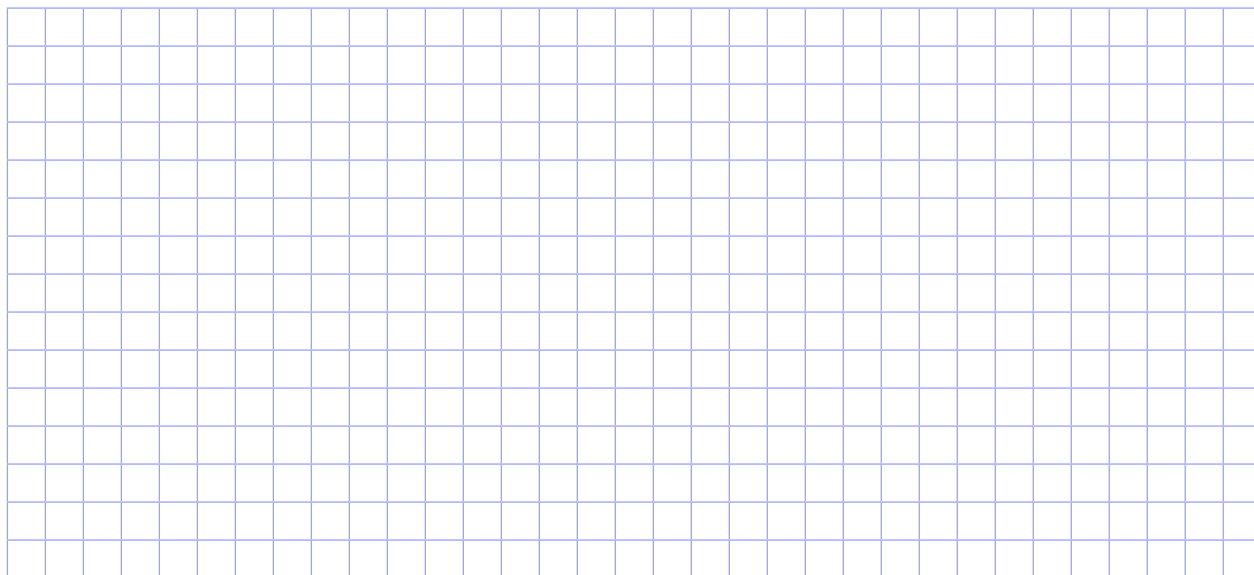
Як і при розв'язанні інших типів нерівностей, часто потрібно виконати деякі алгебричні перетворення. При цьому можуть виникати нерівності, системи або сукупності умов двох типів: *рівносильні даній в умові нерівності* (мають таку саму множину розв'язків), і наслідки (множина їхніх розв'язків складається з усіх розв'язків початкової нерівності і деяких інших чисел – *сторонніх розв'язків*). Сторонні корені ірраціонального рівняння часто можна відкинути перевіркою, натомість для ірраціональних нерівностей таку перевірку, здебільшого, зробити буде неможливо, оскільки доведеться перевіряти безліч чисел.

Приклад 1. Розв'яжіть нерівності:

а) $\sqrt{x-3} \geq 5$;

б) $\sqrt{x-2} \leq 4$;

в) $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} \leq 6$.



IV. Теорема про рівносильність ірраціональних нерівностей відповідним системам та сукупностям

Ви вже знаєте схеми розв'язання стандартних ірраціональних рівнянь, що дозволяють звести їх до рівносильних систем. Аналогічна ідея лежить і в основі розв'язання базових ірраціональних нерівностей. Зокрема, для нерівностей із арифметичним квадратним коренем часто варто піднести обидві частини до квадрата. Але при цьому треба врахувати й ОДЗ нерівності, і те, що обидві частини мають бути невід'ємними, щоб функція $y = t^2$ була зростаючою. Існують також ситуації, коли такий підхід є неможливим. Розглянемо найбільш поширені варіанти рівносильних систем (сукупностей) для нестрогих ірраціональних нерівностей, що містять арифметичний квадратний корінь. Для аналогічних випадків строгих нерівностей варто скористатися ідеями, аналогічними представленим нижче.

<i>Ірраціональні нерівності та рівносильні умови</i>		
Вид нерівності	Рівносильна система (сукупність)	Приклад
$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2-3} \leq \sqrt{2-x} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3 \leq 2-x, \\ x^2-3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$
$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2-3} \leq x-1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3 \leq (x-1)^2, \\ x^2-3 \geq 0, \\ x-1 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$

$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3} \geq x - 1 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 \geq (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0, \\ \begin{cases} x^2 - 3 \geq 0, \\ x - 1 < 0. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$
-------------------------	--	--

При аналізі доведень акцентуйте увагу на рівносильності умов A та B : з умови A можна отримати умову B , і навпаки, з умови B можна отримати умову A . За допомогою подібних міркувань можна відтворити умови рівносильних систем у випадках складних ірраціональних нерівностей, щоб не запам'ятовувати їх напам'ять.

1.
$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Доведення. При піднесенні обох (невід'ємних) частин нерівності до квадрата отримаємо наслідок: $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$. Також, з умов для ОДЗ рівняння випливає, що $f(x)$ має набувати лише невід'ємних значень. Таким чином, з даної нерівності відповідна система умов:

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, навпаки, виконуються умови системи. Оскільки функція $f(x)$ набуває невід'ємних значень, то й не менша від неї функція $g(x)$ має таку саму властивість. Оскільки функція арифметичного квадратного кореня є зростаючою на області визначення, то: $\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$.

Отже, наслідком даної нерівності є розглядувана система й, навпаки, із системи випливає виконання умови, заданої нерівністю. Таким чином, нерівність та система є рівносильними.

2.
$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Доведення. Оскільки арифметичний квадратний корінь, за означенням, набуває лише невід'ємних значень, то й не менший від нього вираз також є невід'ємним: $g(x) \geq 0$. При піднесенні обох (невід'ємних) частин нерівності до квадрата отримаємо наслідок: $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Rightarrow f(x) \leq g^2(x)$. Також, з умов для ОДЗ нерівності випливає, що $f(x)$ має набувати лише невід'ємних значень. Таким чином, з даної нерівності випливає відповідна система умов:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, навпаки, виконуються умови системи. Обидві частини першої нерівності системи набувають невід'ємних значень, а для таких чисел функція арифметичного квадратного кореня є зростаючою на області визначення, тож:

$$\begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g^2(x)}, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} \leq g(x).$$

Отже, наслідком даної нерівності є розглядувана система й, навпаки, із системи випливає виконання умови, заданої нерівністю. Таким чином, нерівність та система є рівносильними.

$$3. \quad \sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Доведення.

3.1. $g(x) \geq 0$.

При піднесенні обох (невід'ємних) частин нерівності до квадрата отримаємо наслідок: $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Rightarrow f(x) \geq g^2(x)$. Таким чином, з даної нерівності у розглядуваному випадку випливає відповідна система умов:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, навпаки, виконуються умови системи $\begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ Права частина першої

нерівності системи набуває невід'ємних значень, а ліва не менша від неї, тому також є невід'ємною. Для таких чисел функція арифметичного квадратного кореня є зростаючою на області визначення, тож:

$$\begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g^2(x)}, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} \geq g(x).$$

Отже, для випадку $g(x) \geq 0$ нерівність $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ є рівносильною системою

$$\begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

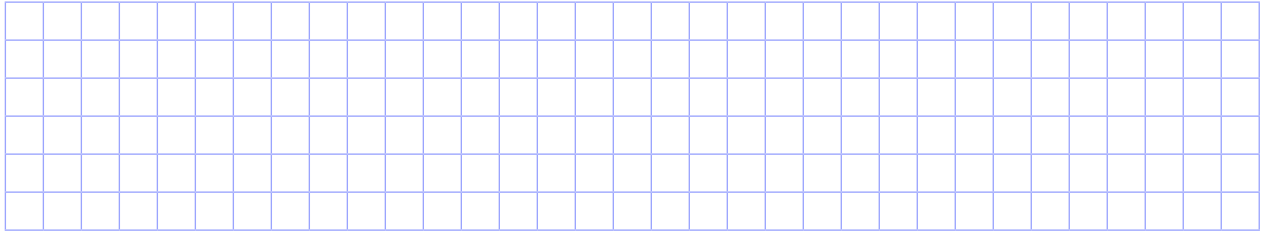
3.2. $g(x) < 0$.

Оскільки арифметичний квадратний корінь, за означенням, набуває лише невід'ємних значень, то від'ємний вираз $g(x)$ завжди менше від нього. Зрозуміло, що цей факт має місце на ОДЗ даної нерівності:

$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} \geq g(x), \\ g(x) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

$$\text{Остаточно отримуємо, що } \sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 4} \leq \sqrt{3x}$.



Приклад 3. Знайдіть розв'язки нерівності $\sqrt{5 - x^2} \leq x - 1$.



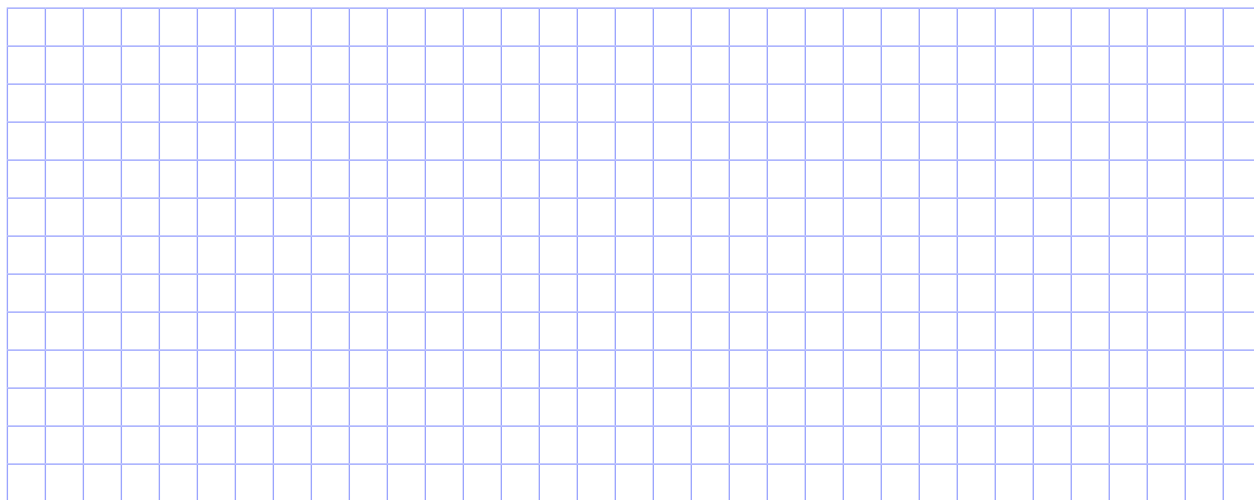
Приклад 4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\sqrt{5 - x^2} \geq x - 1$.



V. Метод заміни змінної при розв'язуванні ірраціональних нерівностей

Інколи при розв'язуванні нерівностей методом рівносильних перетворень виникають доволі громіздкі вирази, які складно перетворювати. Тоді варто звернути увагу на загальний алгебричний метод заміни змінної. Такий прийом може значно скоротити час на розв'язання ірраціональних нерівностей.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $x^2 + 2x + \sqrt{x^2 + 2x + 8} \leq 12$.



VI. Розв'язання геометричної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. До двох кіл, що дотикаються зовнішнім чином, проведено спільну зовнішню дотичну. Радіуси кіл відрізняються на 5 см. Яким має бути радіус меншого кола, щоб відрізок спільної дотичної був не більший за 12 см?

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть ОДЗ нерівності:

а) $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x} \geq 5$; б) $\sqrt{x-2} + \sqrt{5-x} \leq \sqrt{3}$; в) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} \leq \sqrt{3}$.

2. Установіть, чи є рівносильними нерівності:

а) $\sqrt{x-2} \leq 4$ і $x-2 \leq 16$; б) $\sqrt{x-2} \geq 4$ і $x-2 \geq 16$; в) $\sqrt{x-2} \geq -4$ і $x-2 \geq 0$.

3. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{2x+1} \leq 5$; б) $\sqrt{x-2} \geq -\sqrt{3}$; в) $\sqrt{x^2 - 7x + 10} \leq 0$.

4. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x^2 - x - 6} \geq \sqrt{-2x}$; б) $\sqrt{x^2 - 4x} \leq \sqrt{6 - 3x}$; в) $\sqrt{x^2 + x - 3} \geq \sqrt{1 - 2x}$.

5. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x+7} \leq x$; б) $\sqrt{13-x} \leq x-3$; в) $\sqrt{x^2 - 3x - 18} \leq 4-x$.

6. Перейдіть до рівносильної сукупності та розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{2x+4} \geq x+3$; б) $\sqrt{5-x} \geq x-3$; в) $\sqrt{x^2 - 2x} \geq 4-x$.

Рівень В

1. Знайдіть ОДЗ нерівності:

а) $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-5x+6} > 5$; б) $\frac{2-x}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{5-x} \leq -\sqrt{3}$; в) $\frac{4-x}{\sqrt{x-4}} + \sqrt{2-x} \geq 5$.

2. Установіть, чи є рівносильними нерівності:

а) $\sqrt{x-5} \leq 9$ і $x+2 \leq 88$; б) $\sqrt{2-x} \geq -1$ і $2-x \geq 1$; в) $\sqrt{x+6} \geq x$ і $x+6 \geq x^2$.

3. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+6} \leq 4$; б) $\sqrt{5-|x+1|} \leq 2+x$; в) $\sqrt{2x^2+8x+7} < x+2$.

4. Розв'яжіть нерівність методом переходу до рівносильної сукупності:

а) $\sqrt{x^2+7x+12} \geq 6-x$; б) $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x-2$; в) $\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}$.

5. Розв'яжіть нерівність заміною змінної:

а) $x^2+3x-\sqrt{x^2+3x} \leq 2$; б) $x^2-8x-2\sqrt{x^2-8x}-3 < 0$;
в) $x^2-2\sqrt{x^2-24}-39 > 0$.

6. Урахуйте ОДЗ та розв'яжіть нерівність заміною змінної:

а) $2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x} \geq 1$; б) $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2} \leq 4$; в) $x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}-3 < 0$.

7. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{3+\sqrt{4-x}} > \sqrt{x+1}$; б) $\sqrt{1+x\sqrt{42+x^2}} \leq x+1$; в) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-34}} < x$.

8. Доведіть, що нерівність не має дійсних розв'язків:

а) $\sqrt{3x-1} + \sqrt{5x+3} \leq 1$; б) $\sqrt{x-8} + 3 > \sqrt{7-x}$; в) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt[4]{5x-5} > 2$.

9. Використовуючи зростання функції $y = x^3$ на всій області визначення, розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{x}}} > 1$; б) $\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} \leq \sqrt[3]{x^3+2x^2-x+2}$;
в) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+x+1} \geq x+1$.

10. Знайдіть ОДЗ та розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+5} > 0$; б) $(x-5) \cdot \sqrt{x^2-10x+24} \leq 0$;
в) $\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x^2+6x+9} \leq 0$.

11. Розв'яжіть нерівність, розглянувши кілька випадків:

а) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9$; б) $\frac{\sqrt{x+20}}{x}-1 < 0$;
в) $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

12. Розв'яжіть нерівність з параметром:

а) $\sqrt{x-4} \leq \sqrt{2x-a}$; б) $\sqrt{5-x} \leq a-2$; в) $\sqrt{x-1} > a+1$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність, знайшовши попередньо найбільше або найменше значення для обох частин нерівності:
а) $\sqrt{x^2 + 2x + 5} > 2 - x^4$; б) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{4 + x^2} \leq 4$; в) $2 - \sqrt{x^2 - 1} \leq \left|x + \frac{1}{x}\right|$.
2. Розв'яжіть нерівність з використанням властивостей монотонних функцій:
а) $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x + 11} \geq 7$; б) $\sqrt{11 - x} + \sqrt{10 - 3x} > 5$; в) $\sqrt{12 + x} + \sqrt{21 + x} \leq 13 - x$.
3. Розв'яжіть нерівність:
а) $\sqrt{(x - 1)^2} + \sqrt{(x + 2)^2} \geq 3$; б) $\sqrt[4]{(2 - x)^4} + \sqrt[4]{(2 + x)^4} \leq 6$; в) $\sqrt[6]{(x - 3)^6} - \sqrt[6]{(2 + x)^6} > 5$.
4. Розв'яжіть нерівність:
а) $\sqrt[3]{x + 7} \geq \sqrt{x + 3}$; б) $\sqrt{2x + 5} + \sqrt{x + 3} < 3$; в) $\sqrt{3 - \sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 1}} \leq 1$.
5. Розгляньте окремо випадки $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$ та розв'яжіть нерівність $x + 2a - \sqrt{3ax + 4a^2} > 0$ із параметром a .
6. Знайдіть, при яких значеннях параметра a система має розв'язки:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq a, \\ y - x - 1 = 0. \end{cases}$$

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Геометричні задачі, що призводять до ірраціональних нерівностей.
2. Використання монотонності функцій при розв'язуванні ірраціональних нерівностей.
3. Використання області визначення та множини значень функції при розв'язуванні ірраціональних нерівностей.
4. Рівносильні системи для розв'язування нерівностей виду $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ та $\sqrt{f(x)} < g(x)$ та їхні застосування.
5. Рівносильна сукупність для розв'язування нерівностей виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ та її застосування.





