

10

Тема 3.

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 8. Ірраціональні нерівності

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення ірраціональних нерівностей.
2. Теореми про рівносильність ірраціональних нерівностей відповідним системам та сукупностям.
3. Метод заміни змінної при розв'язуванні ірраціональних нерівностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П];

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює їхнє застосування, наводить аргументи [12 МАО 4.3.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Обирайте кількість та зміст матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання геометричної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання геометричних і практичних задач.
- 7) Запропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів і задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Які рівняння називають ірраціональними? Які нерівності називають ірраціональними?
- 2) Наведіть приклади ірраціональних рівнянь та нерівностей.
- 3) Що таке ОДЗ ірраціонального рівняння? Ірраціональної нерівності?
- 4) Як від ірраціональної нерівності перейти до рівносильної системи чи сукупності раціональних нерівностей?
- 5) В якій ситуації при розв'язуванні ірраціональної нерівності потрібно виконати перевірку?

II. Повторення

1. Знайдіть ОДЗ рівняння $\sqrt{2x-5} = 6$.

А	Б	В	Г	Д
$[0, 4; +\infty)$	$[2, 5; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$[6; +\infty)$	$(5; +\infty)$

2. Число 2 є коренем рівняння ...

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2x-5} = 1$	$\sqrt{2x-5} = -1$	$\sqrt{5-2x} = 1$	$\sqrt{5-2x} = -1$	$\sqrt{2x+5} = 2$

3. Знайдіть множину розв'язків нерівності $x^2 + 3x + 2 < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2; -1)$	$[-2; -1]$	$(-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$	R	$\emptyset$

4. Оберіть спадну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{2}{3}}$	$y = x^{-\frac{2}{3}}$	$y = \sqrt{x}$

5. Оберіть нерівність, що не має дійсних розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x} \geq -2$	$\sqrt{x} \leq 2$	$x^{\frac{2}{3}} > 1$	$\sqrt{x} \leq -2$	$x^{\frac{2}{3}} \leq 1$

Як я вирішую певну проблему?

Задача. До двох кіл, що дотикаються зовнішнім чином, проведено спільну зовнішню дотичну. Радіуси кіл відрізняються на 5 см. Яким має бути радіус меншого кола, щоб відрізок спільної дотичної був не більший за 12 см?

III. Означення ірраціональних нерівностей

Ви знаєте вже багато видів ірраціональних рівнянь та методів їхнього розв'язання, які часто використовуються в математиці та прикладних ситуаціях. Наступним логічним кроком є розгляд ірраціональних нерівностей та відповідної теорії, як *розв'язати нерівності* (знайти множину всіх чисел, що при підстановці замість змінної у початкову нерівність перетворюють її на правильну числову нерівність).

Означення. Ірраціональними називають нерівності, в яких невідома величина (змінна) знаходиться під знаком кореня або невідома величина підноситься до степеня з дробовим показником.

Так само, як і для ірраціональних рівнянь, важливу роль при розв'язуванні ірраціональних нерівностей відіграє *ОДЗ (область допустимих значень)* – множина значень змінної, при яких обидві частини нерівності мають сенс, тобто всі дії в них можна коректно виконати.

Примітка. Для коренів парного степеня підкореневі вирази мають бути невід'ємними. При піднесенні виразу до додатного дробового степеня, даний вираз має бути невід'ємним.

Як і при розв'язанні інших типів нерівностей, часто потрібно виконати деякі алгебричні перетворення. При цьому можуть виникати нерівності, системи або сукупності умов двох типів: *рівносильні даній в умові нерівності* (мають таку саму множину розв'язків), і наслідки (множина їхніх розв'язків складається з усіх розв'язків початкової нерівності і деяких інших чисел – *сторонніх розв'язків*). Сторонні корені ірраціо-

нального рівняння часто можна відкинути перевіркою, натомість для ірраціональних нерівностей таку перевірку, здебільшого, зробити буде неможливо, оскільки доведеться перевіряти безліч чисел.

Ілюстративні приклади

6. Знайдіть область допустимих значень ірраціональної нерівності:

а) $\sqrt{x-3} \leq 5 - \sqrt{4-x}$; б) $\sqrt[3]{x-3} - \sqrt[5]{4-x} > \sqrt{2}$; в) $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}} \geq 3,75$.

Розв'язання. а) Оскільки у рівнянні змінна присутня під знаком квадратного кореня (парного степеня), то підкореневі вирази мають бути невід'ємними:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ 4-x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 4.$$

Отже, ОДЗ даної нерівності – це проміжок $[3; 4]$.

Відповідь. $[3; 4]$.

б) Оскільки у нерівності змінна присутня лише під знаками кубічного кореня і кореня п'ятого степеня (непарних степенів), то ніякого обмеження на підкореневі вирази, окрім того, щоб вони були коректно визначені, немає. Отже, ОДЗ даного рівняння – вся множина дійсних чисел.

Відповідь. $\mathbb{R}$.

в) Оскільки до складу рівняння входить змінна у додатних дробових степенях, то для знаходження ОДЗ використовуємо для кожного доданка означення степеня

з раціональним показником: $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$.

Отже, ОДЗ даного рівняння складається з усіх невід'ємних чисел.

Відповідь. $[0; +\infty)$.

7. Розв'яжіть нерівності:

а) $\sqrt{x-3} \geq 5$; б) $\sqrt{x-2} \leq 4$; в) $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} \leq 6$.

Розв'язання. а) Обидві частини даної нерівності набувають невід'ємних значень, а для таких чисел функція $y = t^2$ є зростаючою і більшому аргументу відповідає більше значення функції. Але додатково треба врахувати ОДЗ. Тож, приходимо

до наступної системи: $\sqrt{x-3} \geq 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 25, \\ x-3 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 28$.

Зрозуміло, що при виконанні умови $x-3 \geq 25$ умова $x-3 \geq 0$ буде виконуватися автоматично.

Відповідь. $[28; +\infty)$.

б) Обидві частини даної нерівності набувають невід'ємних значень, а для таких чисел функція $y = t^2$ є зростаючою, і більшому аргументу відповідає більше значення функції. Але додатково треба врахувати ОДЗ. Тож, приходимо до наступної

системи: $\sqrt{x-2} \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \leq 16, \\ x-2 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 18$.

Відповідь. $[2; 18]$.

в) Розглянемо ОДЗ нерівності $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} \leq 6$: $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 1-x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x=0$. Отже, якщо

дана нерівність і виконується, то лише при $x=0$. Залишається зробити перевірку:
 $\sqrt{1-1} + 2\sqrt{1-1} \leq 6$.

Відповідь. $x=0$.

IV. Теорема про рівносильність ірраціональних нерівностей відповідним системам та сукупностям

Ви вже знаєте схеми розв'язання стандартних ірраціональних рівнянь, що дозволяють звести їх до рівносильних систем. Аналогічна ідея лежить і в основі розв'язання базових ірраціональних нерівностей. Зокрема, для нерівностей із арифметичним квадратним коренем часто варто піднести обидві частини до квадрата. Але при цьому треба врахувати й ОДЗ нерівності, і те, що обидві частини мають бути невід'ємними, щоб функція $y=t^2$ була зростаючою. Існують також ситуації, коли такий підхід є неможливим. Розглянемо найбільш поширені варіанти рівносильних систем (сукупностей) для нестрогих ірраціональних нерівностей, що містять арифметичний квадратний корінь. Для аналогічних випадків строгих нерівностей варто скористатися ідеями, аналогічними представленим нижче.

<i>Ірраціональні нерівності та рівносильні умови</i>		
Вид нерівності	Рівносильна система (сукупність)	Приклад
$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x^2-3} \leq \sqrt{2-x} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3 \leq 2-x, \\ x^2-3 \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\sqrt{x^2-3} \leq x-1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3 \leq (x-1)^2, \\ x^2-3 \geq 0, \\ x-1 \geq 0. \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$	$\begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{cases}$	$\sqrt{x^2-3} \geq x-1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2-3 \geq (x-1)^2, \\ x-1 \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-3 \geq 0, \\ x-1 < 0. \end{cases} \end{cases}$

При аналізі доведень акцентуйте увагу на рівносильності умов A та B : з умови A можна отримати умову B , і навпаки, з умови B можна отримати умову A . За допомогою подібних міркувань можна відтворити умови рівносильних систем у випадках складних ірраціональних нерівностей, щоб не запам'ятовувати їх напам'ять.

$$1. \quad \sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Доведення. При піднесенні обох (невід'ємних) частин нерівності до квадрата отримаємо наслідок: $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$. Також, з умов для ОДЗ рівняння випливає, що $f(x)$ має набувати лише невід'ємних значень. Таким чином, з даної нерівності відповідна система умов:

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, навпаки, виконуються умови системи. Оскільки функція $f(x)$ набуває невід'ємних значень, то й не менша від неї функція $g(x)$ має таку саму властивість. Оскільки функція арифметичного квадратного кореня є зростаючою на області визначення, то: $\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$.

Отже, наслідком даної нерівності є розглядувана система й, навпаки, із системи випливає виконання умови, заданої нерівністю. Таким чином, нерівність та система є рівносильними.

$$2. \quad \sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Доведення. Оскільки арифметичний квадратний корінь, за означенням, набуває лише невід'ємних значень, то й не менший від нього вираз також є невід'ємним: $g(x) \geq 0$. При піднесенні обох (невід'ємних) частин нерівності до квадрата отримаємо наслідок: $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Rightarrow f(x) \leq g^2(x)$. Також, з умов для ОДЗ нерівності випливає, що $f(x)$ має набувати лише невід'ємних значень. Таким чином, з даної нерівності випливає відповідна система умов:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, навпаки, виконуються умови системи. Обидві частини першої нерівності системи набувають невід'ємних значень, а для таких чисел функція арифметичного квадратного кореня є зростаючою на області визначення, тож:

$$\begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g^2(x)}, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} \leq g(x).$$

Отже, наслідком даної нерівності є розглядувана система й, навпаки, із системи випливає виконання умови, заданої нерівністю. Таким чином, нерівність та система є рівносильними.

$$3. \quad \sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Доведення.

3.1. $g(x) \geq 0$.

При піднесенні обох (невід'ємних) частин нерівності до квадрата отримаємо наслідок: $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Rightarrow f(x) \geq g^2(x)$. Таким чином, з даної нерівності у розглядуваному випадку випливає відповідна система умов:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Нехай, навпаки, виконуються умови системи $\begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$ Права частина першої

нерівності системи набуває невід'ємних значень, а ліва не менша від неї, тому також є невід'ємною. Для таких чисел функція арифметичного квадратного кореня є зростаючою на області визначення, тож:

$$\begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g^2(x)}, \\ g(x) \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \sqrt{f(x)} \geq g(x).$$

Отже, для випадку $g(x) \geq 0$ нерівність $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ є рівносильною системі

$$\begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

3.2. $g(x) < 0$.

Оскільки арифметичний квадратний корінь, за означенням, набуває лише невід'ємних значень, то від'ємний вираз $g(x)$ завжди менше від нього. Зрозуміло, що цей факт має місце на ОДЗ даної нерівності:

$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} \geq g(x), \\ g(x) < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

$$\text{Остаточно отримуємо, що } \sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Ілюстративні приклади

8. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 4} \leq \sqrt{3x}$.

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної системи та будемо шукати множину її

$$\text{розв'язків: } \sqrt{x^2 - 4} \leq \sqrt{3x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 \leq 3x, \\ x^2 - 4 \geq 0. \end{cases}$$

Виконаємо рівносильні перетворення:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0, \\ x^2 - 4 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-4) \leq 0, \\ x^2 \geq 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; 4] \\ |x| \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; 4].$$

Відповідь. $[2; 4]$.

9. Знайдіть розв'язки нерівності $\sqrt{5-x^2} \leq x-1$.

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної системи та будемо шукати множину її

$$\text{розв'язків: } \sqrt{5-x^2} \leq x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x^2 \leq (x-1)^2, \\ 5-x^2 \geq 0, \\ x-1 \geq 0. \end{cases}$$

Виконаємо рівносильні перетворення:

$$\begin{cases} 5-x^2 \leq (x-1)^2, \\ 5-x^2 \geq 0, \\ x-1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-2x-4 \geq 0, \\ x^2 \leq 5, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x \geq 2, \\ |x| \leq \sqrt{5}, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; \sqrt{5}].$$

Відповідь. $[2; \sqrt{5}]$.

10. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\sqrt{5-x^2} \geq x-1$.

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної сукупності та будемо шукати множину її розв'язків:

$$\sqrt{5-x^2} \geq x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x^2 \geq (x-1)^2, \\ x-1 \geq 0, \\ 5-x^2 \geq 0, \\ x-1 < 0. \end{cases}$$

Розглянемо два випадки і виконаємо рівносильні перетворення у кожному з них.

$$1) \begin{cases} 5-x^2 \geq (x-1)^2, \\ x-1 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-2x-4 \leq 0, \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1; 2], \\ x \geq 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 2].$$

$$2) \begin{cases} 5-x^2 \geq 0, \\ x-1 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq \sqrt{5}, \\ x < 1; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\sqrt{5}; 1).$$

Задля отримання остаточної відповіді залишається об'єднати результати, отримані в обох випадках.

Відповідь. $[-\sqrt{5}; 2]$.

V. Метод заміни змінної при розв'язуванні ірраціональних нерівностей

Іноколи при розв'язуванні нерівностей методом рівносильних перетворень виникають доволі громіздкі вирази, які складно перетворювати. Тоді варто звернути увагу на загальний алгебричний метод заміни змінної. Такий прийом може значно скоротити час на розв'язання ірраціональних нерівностей.

Ілюстративні приклади

11. Розв'яжіть нерівність $x^2 + 2x + \sqrt{x^2 + 2x + 8} \leq 12$.

Розв'язання. Виконаємо рівносильні перетворення і отримаємо наступну нерівність: $x^2 + 2x + 8 + \sqrt{x^2 + 2x + 8} - 20 \leq 0$.

Зробимо заміну змінної: $y = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$. Тоді розглядувана нерівність перетвориться на квадратичну, яку легко розв'язати:

$$y^2 + y - 20 \leq 0, \quad -5 \leq y \leq 4.$$

Повернемося до змінної x : $-5 \leq \sqrt{x^2 + 2x + 8} \leq 4$.

Ліва частина подвійної нерівності виконується на всій області допустимих значень, а права — за умови $x^2 + 2x + 8 \leq 16$.

Нерівність рівносильна системі квадратичних нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 8 \leq 16, \\ x^2 + 2x + 8 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 \leq 0, \\ x^2 + 2x + 8 \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-4; 2], \\ x \in \mathbb{R}; \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-4; 2].$$

Відповідь. $[-4; 2]$.

VI. Розв'язання геометричної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему?

Задача. До двох кіл, що дотикаються зовнішнім чином, проведено спільну зовнішню дотичну. Радіуси кіл відрізняються на 5 см. Яким має бути радіус меншого кола, щоб відрізок спільної дотичної був не більший за 12 см?

Розв'язання. Зробимо рисунок відповідно до умови та будемо розв'язувати задачу, виходячи з нього.

Нехай $AD = x$ (см), тоді $DC = x + 5$ (см).

Проведемо висоту AJ прямокутної трапеції $ABEC$.

За теоремою Піфагора, в трикутнику AJC маємо:

$$AJ = \sqrt{(2x + 5)^2 - 5^2} = \sqrt{4x^2 + 20x},$$

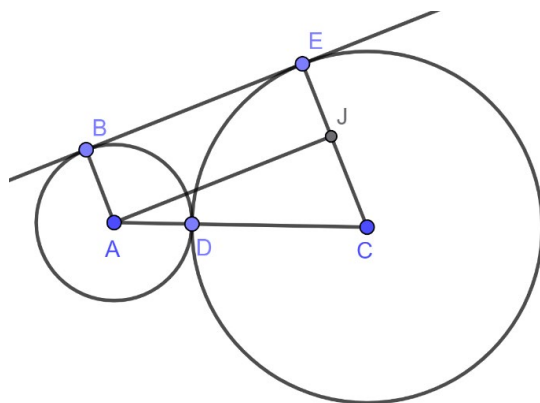
$$\text{і тоді } BE = \sqrt{4x^2 + 20x} = 2\sqrt{x^2 + 5x}.$$

Відповідно до умови, отримуємо ірраціональну нерівність $2\sqrt{x^2 + 5x} \leq 12$. Тоді, при $x > 0$: $2\sqrt{x^2 + 5x} \leq 12 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 5x} \leq 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x \leq 36 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 36 \leq 0$.

При розв'язанні квадратичної нерівності отримуємо, що $x \in [-9; 4]$.

З урахуванням, що через x позначено довжину відрізка, отримуємо, що $x \leq 4$.

Відповідь. Радіус меншого кола має бути не більший за 4 см.



VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть ОДЗ нерівності:

а) $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x} \geq 5$; б) $\sqrt{x-2} + \sqrt{5-x} \leq \sqrt{3}$; в) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} \leq \sqrt{3}$.

2. Установіть, чи є рівносильними нерівності:

а) $\sqrt{x-2} \leq 4$ і $x-2 \leq 16$; б) $\sqrt{x-2} \geq 4$ і $x-2 \geq 16$; в) $\sqrt{x-2} \geq -4$ і $x-2 \geq 0$.

3. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{2x+1} \leq 5$; б) $\sqrt{x-2} \geq -\sqrt{3}$; в) $\sqrt{x^2-7x+10} \leq 0$.

4. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x^2-x-6} \geq \sqrt{-2x}$; б) $\sqrt{x^2-4x} \leq \sqrt{6-3x}$; в) $\sqrt{x^2+x-3} \geq \sqrt{1-2x}$.

5. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x+7} \leq x$; б) $\sqrt{13-x} \leq x-3$; в) $\sqrt{x^2-3x-18} \leq 4-x$.

6. Перейдіть до рівносильної сукупності та розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{2x+4} \geq x+3$; б) $\sqrt{5-x} \geq x-3$; в) $\sqrt{x^2-2x} \geq 4-x$.

Рівень В

1. Знайдіть ОДЗ нерівності:

а) $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-5x+6} > 5$; б) $\frac{2-x}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{5-x} \leq -\sqrt{3}$; в) $\frac{4-x}{\sqrt{x-4}} + \sqrt{2-x} \geq 5$.

2. Установіть, чи є рівносильними нерівності:

а) $\sqrt{x-5} \leq 9$ і $x+2 \leq 88$; б) $\sqrt{2-x} \geq -1$ і $2-x \geq 1$; в) $\sqrt{x+6} \geq x$ і $x+6 \geq x^2$.

3. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x-2+2\sqrt{x+6}} \leq 4$; б) $\sqrt{5-|x+1|} \leq 2+x$; в) $\sqrt{2x^2+8x+7} < x+2$.

4. Розв'яжіть нерівність методом переходу до рівносильної сукупності:

а) $\sqrt{x^2+7x+12} \geq 6-x$; б) $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x-2$; в) $\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}$.

5. Розв'яжіть нерівність заміною змінної:

а) $x^2+3x-\sqrt{x^2+3x} \leq 2$; б) $x^2-8x-2\sqrt{x^2-8x}-3 < 0$;
в) $x^2-2\sqrt{x^2-24}-39 > 0$.

6. Урахуйте ОДЗ та розв'яжіть нерівність заміною змінної:

а) $2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x} \geq 1$; б) $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2} \leq 4$; в) $x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}-3 < 0$.

7. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{3+\sqrt{4-x}} > \sqrt{x+1}$; б) $\sqrt{1+x\sqrt{42+x^2}} \leq x+1$; в) $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-34}} < x$.

8. Доведіть, що нерівність не має дійсних розв'язків:

а) $\sqrt{3x-1} + \sqrt{5x+3} \leq 1$; б) $\sqrt{x-8} + 3 > \sqrt{7-x}$; в) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt[4]{5x-5} > 2$.

9. Використовуючи зростання функції $y = x^3$ на всій області визначення, розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{x}}} > 1$;

б) $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \leq \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 - x + 2}$;

в) $\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + x + 1} \geq x + 1$.

10. Знайдіть ОДЗ та розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+5} > 0$;

б) $(x-5) \cdot \sqrt{x^2 - 10x + 24} \leq 0$;

в) $\frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x^2 + 6x + 9} \leq 0$.

11. Розв'яжіть нерівність, розглянувши кілька випадків:

а) $(x-3)\sqrt{x^2 + 4} \leq x^2 - 9$;

б) $\frac{\sqrt{x+20}}{x} - 1 < 0$;

в) $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

12. Розв'яжіть нерівність з параметром:

а) $\sqrt{x-4} \leq \sqrt{2x-a}$;

б) $\sqrt{5-x} \leq a-2$;

в) $\sqrt{x-1} > a+1$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність, знайшовши попередньо найбільше або найменше значення для обох частин нерівності:

а) $\sqrt{x^2 + 2x + 5} > 2 - x^4$; б) $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{4 + x^2} \leq 4$; в) $2 - \sqrt{x^2 - 1} \leq \left|x + \frac{1}{x}\right|$.

2. Розв'яжіть нерівність з використанням властивостей монотонних функцій:

а) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} \geq 7$; б) $\sqrt{11-x} + \sqrt{10-3x} > 5$; в) $\sqrt{12+x} + \sqrt{21+x} \leq 13-x$.

3. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2} \geq 3$; б) $\sqrt[4]{(2-x)^4} + \sqrt[4]{(2+x)^4} \leq 6$; в) $\sqrt[6]{(x-3)^6} - \sqrt[6]{(2+x)^6} > 5$.

4. Розв'яжіть нерівність:

а) $\sqrt[3]{x+7} \geq \sqrt{x+3}$; б) $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x+3} < 3$; в) $\sqrt{3 - \sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}} \leq 1$.

5. Розгляньте окремо випадки $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$ та розв'яжіть нерівність

$x + 2a - \sqrt{3ax + 4a^2} > 0$ із параметром a .

6. Знайдіть, при яких значеннях параметра a система має розв'язки:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \leq a, \\ y - x - 1 = 0. \end{cases}$$

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
-
-

- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
-
-
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
-
-
- 4) Найскладнішим для мене було
-
-
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
-
-
- 6) Найбільше мені сподобалося
-
-

Можливі теми проєктів

1. Геометричні задачі, що призводять до ірраціональних нерівностей.
2. Використання монотонності функцій при розв'язуванні ірраціональних нерівностей.
3. Використання області визначення та множини значень функції при розв'язуванні ірраціональних нерівностей.
4. Рівносильні системи для розв'язування нерівностей виду $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ та $\sqrt{f(x)} < g(x)$ та їхні застосування.
5. Рівносильна сукупність для розв'язування нерівностей виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ та її застосування.