

10

Тема 3.

Ірраціональні рівняння, системи ірраціональних рівнянь. Ірраціональні нерівності

Урок 9. Урок–практикум. Розв'язування ірраціональних нерівностей

Тип уроку: урок формування вмінь і навичок.

План уроку

1. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання.
2. Робота в парах над розв'язуванням ірраціональних нерівностей з використанням теорем про рівносильність.
3. Робота в малих групах над розв'язуванням ірраціональних нерівностей методом заміни змінних.
4. Самостійна робота.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Основна мета уроку – формування стійких умінь та навичок щодо розв'язування типових ірраціональних нерівностей.
- 2) Додаткова мета уроку – формування умінь розв'язувати більш складні ірраціональні нерівності.

- 3) Важливо постійно акцентувати увагу при розв'язанні нерівностей на використання та зміст понять ОДЗ, рівносильні перетворення, рівносильні системи.
- 4) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 5) Час уроку розподіляємо у відповідності до того, що є головною метою, а що — додатковою.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Дві сторони трикутника дорівнюють 13 см та 14 см. При яких значеннях довжини третьої сторони площа трикутника не перевищуватиме 84 см^2 ?

I. Розширена фронтальна перевірка домашнього завдання

1. Знайдіть ОДЗ нерівності $\sqrt{x-2} + \sqrt{2-x} \leq \sqrt{3}$.
 2. Розв'яжіть нерівність із арифметичним квадратним коренем: $\sqrt{2x+1} \leq 5$.
 3. Розв'яжіть ірраціональну нерівність $\sqrt{x^2+x-3} \geq \sqrt{1-2x}$.
 4. Перейдіть до рівносильної системи та розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2-3x-18} \leq 4-x$.
 5. Запишіть рівносильну сукупність та розв'яжіть нерівність $\sqrt{5-x} \geq x-3$.
- Відповіді.* 1. $\{2\}$; 2. $[-0,5; 12]$; 3. $(-\infty; -4]$; 4. $(-\infty; -3]$; 5. $(-\infty; 4]$.

Обговоріть фронтально декотрі задачі домашнього завдання. За необхідності, використайте опитування біля дошки або інші форми роботи.

Завдання для обговорення

1. Розв'яжіть нерівність за допомогою заміни змінної: $x^2 - 2\sqrt{x^2 - 24} - 39 > 0$.
Вказівка. Треба врахувати множину значень арифметичного квадратного кореня.
Відповідь. $(-\infty; -7) \cup (7; +\infty)$.
2. Розберіть декілька випадків та розв'яжіть нерівність $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9$.
Вказівка. Треба розібрати окремо випадки $x < 3$, $x = 3$, $x > 3$ і врахувати, що другий множник лівої частини нерівності завжди набуває додатних значень.
Відповідь. $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; +\infty)$.
3. Розв'яжіть, знайшовши попередньо найбільше або найменше значення для обох частин нерівності: $\sqrt{x^2+2x+5} > 2-x^4$.
Вказівка. Найменше значення лівої частини нерівності дорівнює 2 і найбільше значення правої частини дорівнює 2.
Відповідь. $\mathbb{R}$.

II. Робота в парах над розв'язуванням ірраціональних нерівностей з використанням теорем про рівносильність

Ірраціональні нерівності та рівносильні умови		
Вид нерівності	Рівносильна система (сукупність)	Приклад
$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3} \leq \sqrt{2 - x} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 \leq 2 - x, \\ x^2 - 3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$
$\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \leq g^2(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3} \leq x - 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 \leq (x - 1)^2, \\ x^2 - 3 \geq 0, \\ x - 1 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$
$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$	$\begin{cases} f(x) \geq g^2(x), \\ g(x) \geq 0, \\ \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{cases}$	$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3} \geq x - 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 \geq (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0, \\ \begin{cases} x^2 - 3 \geq 0, \\ x - 1 < 0. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$

Завдання для роботи в парах

4. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} \leq 0$.
5. Перейдіть до рівносильної системи та розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 2x} > \sqrt{x + 4}$.
6. Доведіть, що нерівність не має розв'язків у дійсних числах: $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 4} < 2,5$.
7. Розв'яжіть ірраціональну нерівність $\sqrt{x^2 - 3x - 4} < x - 2$ методом переходу до рівносильної системи.
8. Заповніть пропуски у наступному розв'язанні нерівності $\sqrt{x^2 - x - 2} > x + 4$.

Розв'язання. Розглянемо два випадки.

1) Нехай $x + 4 \geq 0$. Піднесемо обидві частини нерівності до квадрата і перейдемо до розгляду рівносильної системи:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > (x + 4)^2, \\ x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

Після виконання рівносильних перетворень отримуємо систему лінійних нерівностей:

[illegible]

Отже, у даному випадку маємо відповідь:

.....
2) Нехай $x + 4 < 0$. Тоді ліва частина нерівності, за умови її існування, буде завжди більша за праву, і нерівність зводиться до системи:

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, \\ x + 4 < 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо квадратичну нерівність і отримуємо рівносильну систему:

$$\begin{cases} x < \dots\dots\dots, \\ x > \dots\dots\dots, \\ x < -4. \end{cases}$$

Отже, у даному випадку маємо відповідь:

.....
Об'єднання множин розв'язків даної нерівності в розглянутих двох випадках призведе до множини всіх розв'язків.

Відповідь.

III. Робота в малих групах над розв'язуванням ірраціональних нерівностей методом заміни змінних

- 1) Об'єднуємо клас у кілька груп (4 – 6 груп).
- 2) Упродовж розв'язування задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті на різних уроках знання;
- 3) Схвалюється самостійне об'єднання учасників групи на команди для роботи над міні-проектами на кшталт «задача №1», «задача №2» і т. ін.
- 4) Один або декілька учнів/учениць можуть допомагати вчителю виконувати роль радника та консультанта.

Завдання для роботи в малих групах

9. Розв'яжіть нерівність $x + \sqrt{x} < 2$. Обговоріть відповідну заміну змінної та обмеження на її можливі значення.
10. Розв'яжіть нерівність за допомогою заміни змінної: $x^2 - 3x - \sqrt{x^2 - 3x} \leq 2$. Чи варто робити заміну на кшталт $y = x^2 - 3x$? Чому? Запропонуйте свої варіанти заміни змінної та підтвердіть або спростуйте їхню ефективність.
11. Розв'яжіть нерівність $x^{\frac{4}{5}} - 13x^{0,4} + 36 \leq 0$, використовуючи заміну змінної. На якому етапі розв'язання враховано приналежність змінної до ОДЗ?
12. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+1} + 2\sqrt[4]{x+1} \geq 8$ двома способами: заміною змінної та з використанням монотонності. Порівняйте ефективність даних методів.

- 13.** Доведіть, що нерівність $\frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \geq 2$ виконується при будь-якому дійсному значенні змінної. Яку заміну варто використати під час доведення? На яких етапах враховано область визначення та множину значень арифметичного квадратного кореня?

IV. Самостійна робота

- 1.** Яка з нерівностей не має розв'язків?

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x-2} \geq -2$	$\sqrt{x-2} \leq -2$	$\sqrt{x-2} \leq 2$	$x^2 - 2 \leq 0$	$\sqrt{x-2} \leq 0$

- 2.** Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+5} > -2$.

А	Б	В	Г	Д
$\emptyset$	R	$[-7; +\infty)$	$[-5; +\infty)$	інша відповідь

- 3.** Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності $\sqrt{x+3} > x$.

А	Б	В	Г	Д
1	0	-1	-2	-3

- 4.** Серед наведених нерівностей оберіть ту, множина розв'язків якої містить усі натуральні числа.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{-x} > 2$	$\sqrt{x} < 2$	$\sqrt{-x} < -1$	$\sqrt{x} > -1$	$\sqrt{x} > 2$

- 5.** Знайдіть найменший від'ємний розв'язок нерівності $x + \sqrt{-x-1} + 3 \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
-7	-6	-5	-4	-1

V. Розв'язання геометричної задачі. Групова робота

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** Дві сторони трикутника дорівнюють 13 см та 14 см. При яких значеннях довжини третьої сторони площа трикутника не перевищуватиме 84 см^2 ?

Розв'язання. Нехай дано трикутник ABC зі сторонами $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = x$ (см). Тоді його півпериметр дорівнюватиме $\frac{27+x}{2}$ (см). Обчислимо площу трикутника за формулою Герона:

$$S = \sqrt{\frac{27+x}{2} \left(\frac{27+x}{2} - 13 \right) \left(\frac{27+x}{2} - 14 \right) \left(\frac{27+x}{2} - x \right)}.$$

Спростимо отриманий вираз та запишемо нерівність у відповідності до умови задачі:

$$\sqrt{\frac{27+x}{2} \cdot \frac{1+x}{2} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{27-x}{2}} \leq 84.$$

Урахуємо, що x є додатним числом, і площа трикутника також додатна. Тоді, використовуючи ОДЗ отриманої нерівності, маємо: $1 < x < 27$. Такий висновок можна було б зробити і з використанням нерівності трикутника. Перейдемо до рівносильної системи:

$$\sqrt{\frac{27+x}{2} \cdot \frac{1+x}{2} \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{27-x}{2}} \leq 84 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(27^2 - x^2)(x^2 - 1)}{16} \leq 84^2, \\ 1 < x < 27. \end{cases}$$

Зробимо заміну змінної: $y = x^2$. Приходимо до системи з однієї квадратичної нерівності і однієї подвійної лінійної нерівності:

$$\begin{cases} y^2 - 730y + 113625 \geq 0, \\ 1 < x < 27; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 225, \\ y \geq 505, \\ 1 < x < 27; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 15, \\ \sqrt{505} \leq x < 27. \end{cases}$$

Відповідь. $1 < x \leq 15$ або $\sqrt{505} \leq x < 27$.

VI. Рефлексія. Самооцінювання роботи в групі (1–2 хв)

Показники	Завжди	Не систематично	Іноді
Я добре співпрацював/співпрацювала з іншими учасниками групи.			
Я намагався/намагалася зрозуміти і виконати спільні завдання.			
Я брав/брала активну участь в обговоренні проблем.			
Я висловлював/висловлювала нові ідеї та вносив/вносила пропозиції, які реалізувались.			
Я запрошував/запрошувала до роботи та підбадьорював/підбадьорювала інших			

Можливі теми проєктів

1. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{ax+b} \geq \sqrt{cx+d}$, враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d . Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
2. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{ax+b} \leq cx+d$, враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d . Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
3. Розробіть алгоритм для розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{ax+b} \geq cx+d$, враховуючи варіанти різних значень параметрів a, b, c, d . Продемонструйте роботу алгоритму на конкретних прикладах.
4. Заміна змінної в різних ірраціональних нерівностях.