

10

Тема 4. Тригонометричні функції

Урок 1. Узагальнення поняття кута. Радіанна міра кута

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

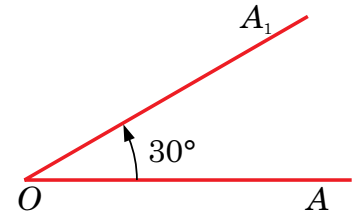
- 1) зрозумієте, як вимірювати кути, більші за 180° ;
- 2) узагальните поняття кута та навчитеся будувати кути довільної градусної міри;
- 3) дізнаєтесь про інші одиниці вимірювання кутів, окрім градусів;
- 4) зрозумієте, що таке радіанна міра кута та які її переваги;
- 5) навчитеся перетворювати кути з радіанної міри в градусну, і навпаки;
- 6) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть значення виразу $5\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[5]{-32} + \sqrt[4]{81}$.
2. Спростіть вираз $\frac{b^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{5}{12}}}$.
3. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt[4]{3 - x^2 + 2x}$.
4. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+4} > -3$.
5. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{2}{5 + \sqrt{5}}$.

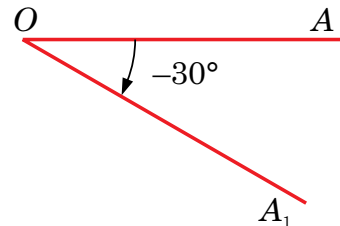
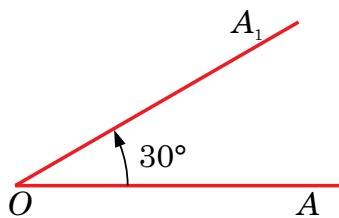
III. Узагальнення поняття кута

Будь-який кут AOA_1 , як геометричну фігуру, можна отримати за допомогою повороту променя OA навколо точки O (див. рисунок). Тоді величину повороту, що здійснює цей промінь, вимірюють величиною кута, який утворюють промені OA та OA_1 .

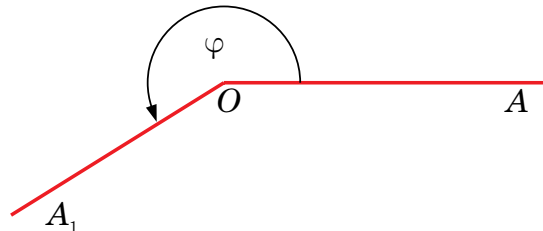
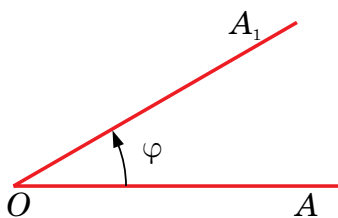


Означення 1. Промінь OA називають *початковим променем* або *початком відліку кута*, а промінь OA_1 називають *кінцевим променем* або променем, що визначає кут повороту (див. рисунок).

Означення 2. Кут називають *додатним*, якщо він утворений за допомогою повороту променя проти годинникової стрілки, і *від'ємним*, якщо він утворений поворотом променя за годинниковою стрілкою (див. рисунки).



Позначимо через φ найменший невід'ємний кут між променями OA і OA_1 (див. рисунок). Таким чином: $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$.



Якщо промінь OA_1 здійснює повний оберт навколо точки O проти руху годинникової стрілки, то такий оберт вважають поворотом на 360° . Якщо промінь OA_1 здійснює додатковий оберт, після здійснення повного оберту, то отримаємо іншу величину кута $\varphi + 360^\circ$, а якщо проти годинникової стрілки, — то $\varphi - 360^\circ$.

Тоді, будь-який кут повороту у можна подати у вигляді:

$$\psi = \varphi + 360^\circ \cdot n, \text{ де } 0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ, n \in \mathbb{Z},$$

де n — це кількість додаткових повних обертів за годинниковою стрілкою ($n > 0$) чи проти годинникової стрілки ($n < 0$).

Тригонометричне коло

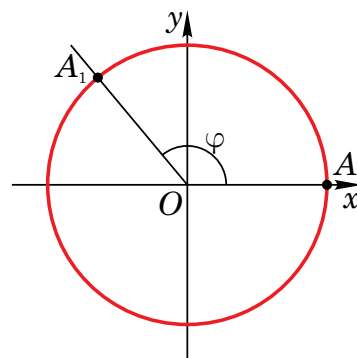
Побудуємо на площині декартову систему координат xOy і коло на ній з одиничним радіусом із центром у початку координат, тобто коло, рівняння якого $x^2 + y^2 = 1$.

Таке коло називають *тригонометричним* або *одиничним* колом (див. рисунок).

Виберемо на цьому колі точку $A(1; 0)$.

Промінь OA буде початком відліку кута AOA_1 , де A_1 — точка на колі, що визначається кутом повороту φ променя OA , тобто $R_O^\varphi(A) = A_1$.

Кожному куту φ відповідатиме точка на тригонометричному колі, й кожній точці на колі відповідатимуть кути $\varphi + 360^\circ \cdot n$, де $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$, $n \in \mathbb{Z}$.



Історична довідка

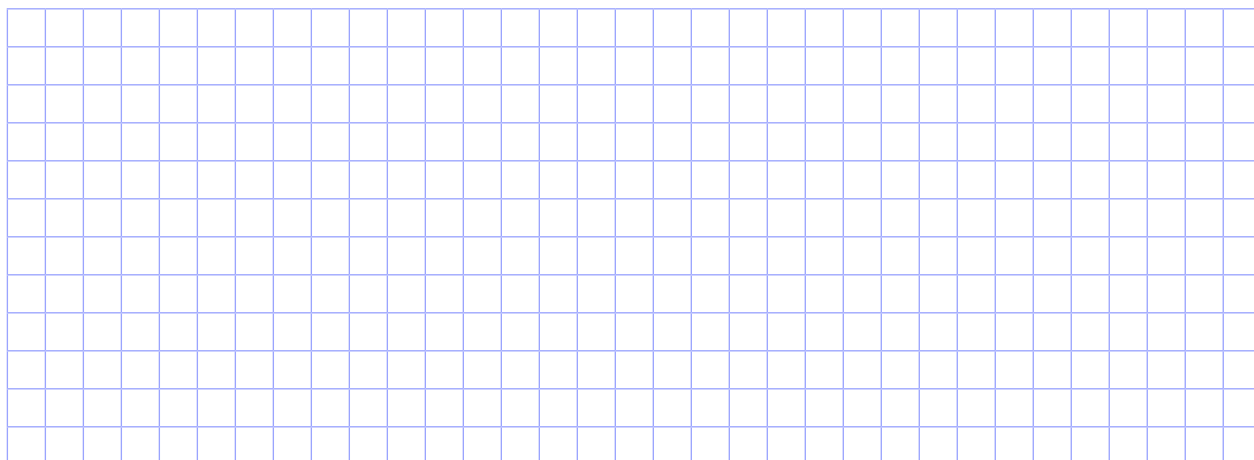
На практиці, уже більше 3000 років, за одиницю вимірювання кута прийнято $\frac{1}{360}$ повного оберту або $\frac{1}{180}$ розгорнутого кута, яку називають градусом.

У технічних вимірюваннях за одиницю кутів приймають повний оберт по колу, наприклад, на тахометрі автомобіля шкала в тисячах обертів за хвилину (об/хв). У мореплавстві за одиницю вимірювання кутів приймають румб, а саме $\frac{1}{32}$ повного оберту.

У кінці XVIII ст. під час Французької революції вчені прагнули створити десяткову систему вимірювання всіх величин і кутів. Вони запропонували гон або метричний градус, як одиницю вимірювання кутів, де прямий кут дорівнює 100 гон, розгорнутий — 200 гон, повний оберт — 400 гон.

Ця система називається градусною десятковою. Вона не набула значного поширення, бо в більшості наук і технічних дисциплін залишили класичну систему вимірювання кутів у градусах. Однак гони все ще використовуються в деяких галузях людської діяльності, наприклад, у геодезії чи в артилерії.

Приклад 1. На який кут потрібно повернути хвилину стрілку годинника, щоб перевести годинник назад на 10 хв; на 1 год 12 хв; на 2 год 40 хв?

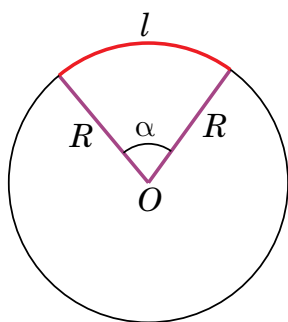


IV. Радіанна міра кута

- 1) Чи існує спосіб вимірювання кутів без використання градусної міри того чи іншого кута, як частини повного оберту?
- 2) Чи існує зв'язок між довжиною дуги кола та величиною центрального кута?
- 3) Якщо поділити два кола на однакову кількість секторів, то чи відрізнятимуться центральні кути цих секторів?

Із розвитком техніки та необхідністю в розрахунках сучасних математичних методів виникла потреба в системі вимірювання кутів, не пов'язаній із поділом повного чи розгорнутого кута на частини. Внаслідок цього з'явилася радіанна міра вимірювання кутів.

Означення. Радіанною мірою центрального кута кола називають відношення довжини дуги, на яку спирається цей кут, до радіуса кола: $\alpha = \frac{l}{R}$ (див. рисунок).



Радіанна міра кута зручніша для обчислення довжини дуги кола: $l = R\alpha$ ($\alpha > 0$), де α — кут в радіанній мірі, в порівнянні з формулою $l = \frac{\pi R}{180} \cdot n$, де n — кут в градусній мірі.

Означення. Центральний кут, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола, називається **кутом в 1 радіан** (1 рад).

Радіани — це відношення довжин, вони не залежать від конкретної одиниці вимірювання, як градуси, гони чи румби тощо. Радіан — це число, що показує, скільки разів довжина радіуса «вміщається» в довжині дуги. Якщо кут вказують без символу «°», то зазвичай вважається, що це — в радіанах.

Розглянемо задачу на геометричне перетворення подібності — гомотетію.

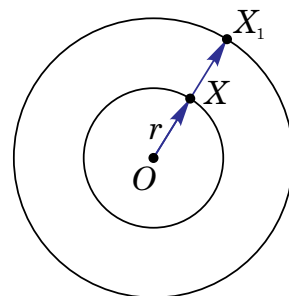
Задача. Два концентричні кола зі спільним центром O мають радіуси R і r ($R > r$). Доведіть, що гомотетія з центром O і коефіцієнтом $\frac{R}{r}$ перетворює менше коло у більше.

Доведення. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

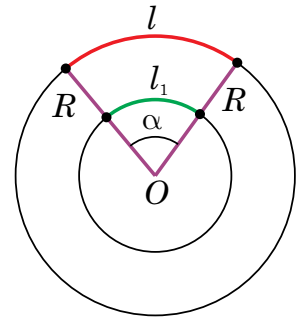
2) Виберемо довільну точку X на меншому колі та застосуємо до цієї точки гомотетію з центром O і коефіцієнтом $\frac{R}{r}$. Тоді

$$\overrightarrow{OX_1} = \frac{R}{r} \overrightarrow{OX}. \text{ Оскільки } |\overrightarrow{OX}| = r, \text{ то } |\overrightarrow{OX_1}| = \frac{|R|}{|r|} |\overrightarrow{OX}| = \frac{R}{r} \cdot r = R,$$

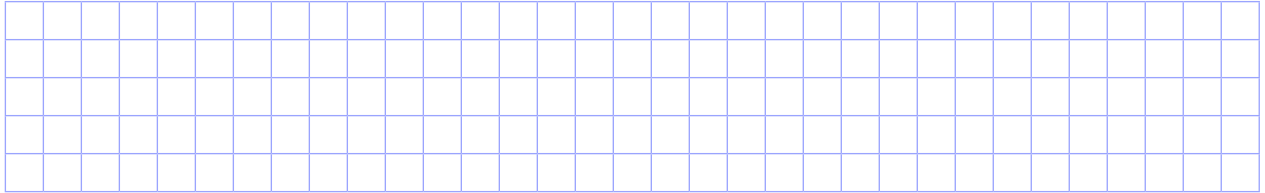
тобто точка X_1 лежить на більшому колі з радіусом R . Що й треба було довести.



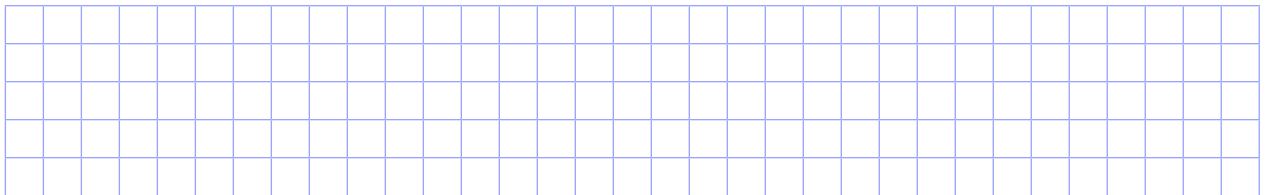
Оскільки, за властивістю гомотетії $\frac{l}{R} = \frac{l_1}{r} = \alpha$, то радіанна міра кута не залежить від розмірів кола, тому зручно розглядати кути на колі одиничного радіуса, де довжина дуги дорівнюватиме радіанній мірі кута. Найчастіше використовують тригонометричне коло $x^2 + y^2 = 1$.



Приклад 2. Знайдіть довжину дуги кола з радіусом 10 см, яка відповідає центральному куту цього кола, що дорівнює 2 рад.



Приклад 3. Доведіть, що площу сектора, який містить дугу в α рад, можна обчислити за формулою $S = \frac{R^2}{2} \cdot \alpha$, де $0 \leq \alpha \leq \pi$, R — радіус кола.



V. Залежність між радіанною та градусною мірами кутів

Знайдемо градусну міру кута величиною 1 рад. Оскільки дуга півкола довжиною πR відповідає розгорнутому куту 180° , то дуга довжиною R відповідатиме куту, в π разів меншому, тобто:

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

Наближене значення числа π становить 3,14. Тоді наближене значення:

$$1 \text{ рад} \approx 57,3^\circ.$$

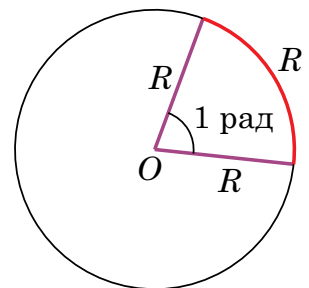
Це означає, що кут в α радіанів містить $\left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha \right)^\circ$.

Знайдемо радіанну міру кута величиною в 1° . Оскільки куту 180° відповідає π рад, то

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}.$$

Отже, якщо кут містить n° , то його радіанна міра: $n^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot n$ рад.

Важливою величиною у фізиці й техніці є кутова швидкість.

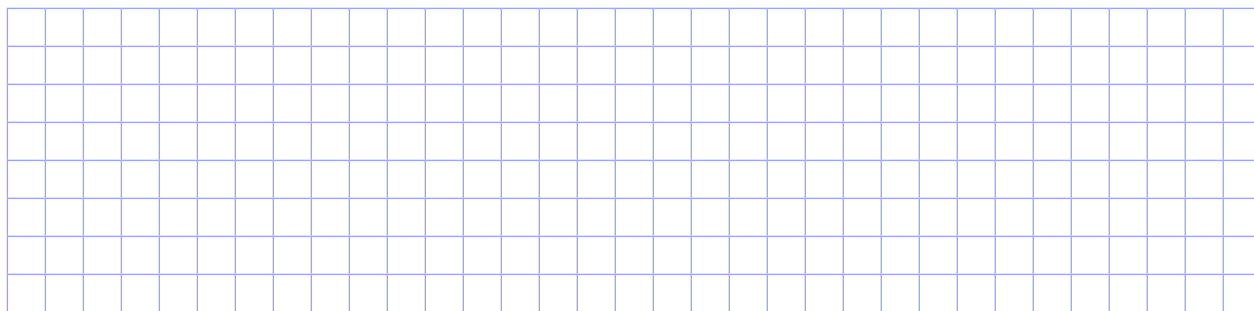


Означення. Кутова швидкість — це фізична величина, яка показує, на який кут повернула точка за одиницю часу. Кутова швидкість позначається літерою ω («омега») і в системі СІ вимірюється в рад/с (в радіанах за секунду).

Кутова швидкість визначається за формулою $\omega = \frac{\varphi}{t}$, де φ — кут повороту точки за час t . Кутова та лінійна швидкості пов'язані співвідношенням: $\omega = \frac{v}{R}$, де v — лінійна швидкість тіла, а R — радіус траєкторії тіла, що рухається по колу.

Приклад 4. Знайдіть градусну міру кута, що дорівнює:

- 1) $\frac{\pi}{2}$ рад; 2) $\frac{5\pi}{6}$ рад; 3) $-\frac{11\pi}{4}$ рад.



VI. Розв'язування практичних задач

Задача 1. Найбільший у світі фасадний годинник — годинник Мекки, довжина хвилинної стрілки якого дорівнює 22 м, а довжина годинної стрілки дорівнює 17 м. Знайдіть відстані, які по колу проходять за 2 год і 20 хв кінці обох стрілок.

Задача 2. Колесо автомобіля, радіус якого 0,5 м, обертається з постійною швидкістю $\frac{80}{3}$ рад/с.

1. Яку відстань проїде автомобіль за 1 хвилину?
2. За який час автомобіль проїде 24 км?

Задача 3. Олімпіадна задача. Андрій плаває в басейні, який має форму круга. До басейну підійшов його однокласник Борис. Андрій приплив до нього, щоб привітатися. Вони вирішили зіграти в гру, в якій Борис має упіймати Андрія. Відомо, що Борис не уміє плавати, але бігає в 4 рази швидше, ніж Андрій плаває. Андрій бігає швидше за Бориса. Чи зможе він утекти? Відповідь обґрунтуйте.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть радіанну міру кута:

- 1) 1° ; 2) 30° ; 3) 120° ; 4) 270° .

2. Знайдіть градусну міру кута:

1) 0 рад;

2) 1 рад;

3) 2π рад;

4) $\frac{2\pi}{3}$ рад.

3. Заповніть таблицю:

Радіани	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$			
Градуси				18°	150°	240°

4. Знайдіть радіус кола, якщо дуга завдовжки 0,54 см стягує центральний кут у 0,9 рад.

5. Дуга кругового сектора стягує кут $\frac{5\pi}{6}$ рад. Знайдіть площу сектора, якщо радіус круга становить 2 см.

6. Який кут (у радіанах) описує впродовж трьох годин годинна стрілка? А хвилинка стрілка?

Рівень В

1. Знайдіть радіанну міру кута:

1) 315° ;

2) -240° ;

3) -6° ;

4) 75° .

2. Знайдіть градусну міру кута:

1) $-\frac{7\pi}{4}$ рад;

2) $-\frac{20\pi}{3}$ рад;

3) $\frac{13\pi}{15}$ рад;

4) $\frac{\pi}{20}$ рад.

3. Заповніть таблицю:

Радіани				$\frac{3\pi}{10}$	2,5	1,8
Градуси	$0,5^\circ$	36°	108°			

4. Кожен із кутів 1) – 4) подайте у вигляді суми $\varphi + 360^\circ \cdot n$, де $n \in \mathbb{Z}$, φ — найменший можливий невід'ємний кут:

1) 760° ;

2) 510° ;

3) -980° ;

4) -1080° .

5. Виразіть кути правильного n -кутника у градусах і в радіанах, якщо:

1) $n = 5$;

2) $n = 7$;

3) $n = 8$;

4) $n = 12$.

6. Скільки повних обертів і в якому напрямку містить кут, радіанна міра якого дорівнює:

1) $-0,5\pi$;

2) $3\frac{1}{3}\pi$;

3) $-13,2\pi$;

4) $21,7\pi$?

7. Знайдіть радіанну міру центрального кута кола, який стягується дугою завдовжки 6 см, а радіус кола дорівнює 2 см.

8. Радіус круга становить 2,5 см, а площа кругового сектора — $6,25 \text{ см}^2$. Знайдіть кут (у радіанах), який стягується дугою цього кругового сектора.

9. Визначте градусну та радіанну міри кутів чотирикутника, якщо вони відносяться, як $7 : 8 : 9 : 12$.

10. Колесо автомобіля за 3 секунди робить 12 обертів. На скільки градусів повернеться колесо за 10 секунд? Виразіть цей кут у радіанах.
11. Обчисліть кутову швидкість (в рад/с) обертання годинної та хвилинної стрілок годинника.
12. Кутова швидкість колінчастого валу автомобіля дорівнює 21 рад/с. Визначте кількість його обертів за хвилину.

Рівень С

1. Знайдіть радіанну міру кута:
1) 105° ; 2) -238° ; 3) -63° ; 4) 72° .
2. Знайдіть градусну міру кута:
1) $-\frac{13\pi}{180}$ рад; 2) 0,5 рад; 3) $-2,1$ рад; 4) $\frac{5\pi}{36}$ рад.
3. Заповніть таблицю:

Кут в градусах	60					
Кут в радіанах		$\frac{\pi}{18}$			45	
Радіус, см	2		7	10		
Довжина дуги, см		10	3,5			200
Площа сектора, см ²				100	25	1000

4. Кожний із кутів 1) – 4) подайте у вигляді суми $\varphi + 360^\circ \cdot n$, де $n \in \mathbb{Z}$, φ — найменший можливий невід’ємний кут (у градусах):
1) 3780° ; 2) 2510° ; 3) -1780° ; 4) -2080° .
5. Колесо, радіус якого дорівнює 0,75 м, робить 1000 обертів за хвилину. Знайдіть лінійну швидкість точки, що знаходиться на ободі колеса.
6. Для вимірювання кутів артилеристи використовують особливу одиницю, яка називається «тисячною» або «поділкою кутоміра». Повний кут містить 6000 тисячних. Виразіть одну тисячну кутів: 3° , 12° , 36° , 48° .
7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка визначала би кут (у радіанах) між годинною і хвилинною стрілками годинника у заданий користувачем момент часу.

Рефлексія

1. Я розумію, що таке кут, більший за 180° .
Так Ще треба потренуватися Ні
2. Я знаю, для чого вводять кути, більші за 360° , або від’ємні кути.
Так Ще треба потренуватися Ні
3. Я розумію, що таке радіанна міра кута.
Так Ще треба потренуватися Ні

4.	Я знаю переваги радіанної міри вимірювання кутів.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні
5.	Я умію переводити кути з градусної міри в радіанну.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні
6.	Я умію переводити кути з радіанної міри у градусну.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні
7.	Я знаю, що таке тригонометричне коло, й умію позначати на ньому кути довільної міри.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні
8.	Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні

Можливі теми проєктів

1. Історія розвитку поняття кута в різних культурах та епохах.
2. Радіанна міра кута. Історія виникнення та практичне застосування.
3. Кути у фізиці та в техніці.
4. Кути в архітектурі й у дизайні.
5. Вимірювання кутів у геодезії та в картографії.
6. Вимірювання кутів в артилерії.
7. Створення програми для переведення мір кутів одна в одну.
8. Кутова швидкість та її практичне використання.







