

10

Тема 4.

Тригонометричні функції

Урок 10. Урок – практикум. Побудова графіків тригонометричних функцій за допомогою геометричних перетворень графіків функцій $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

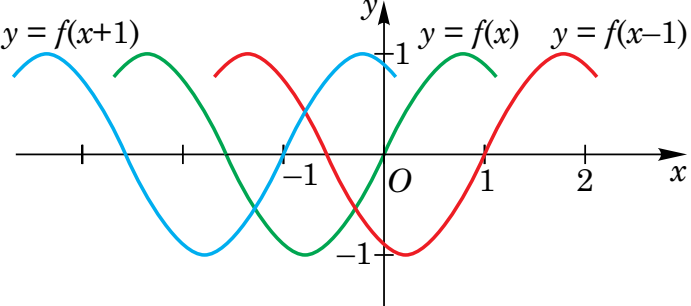
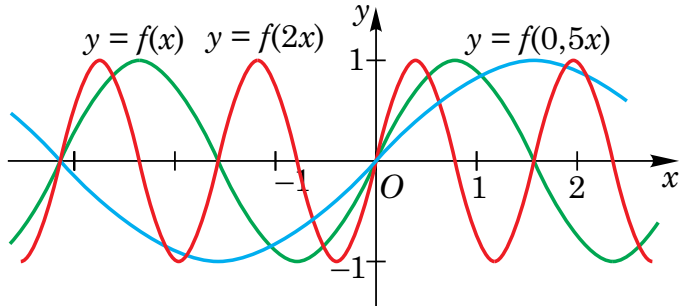
- 1) навчитеся будувати графіки тригонометричних функцій за допомогою геометричних перетворень, що змінюють період;
- 2) навчитеся будувати графіки синуса та косинуса за допомогою геометричних перетворень, що змінюють множину значень;
- 3) дізнаєтесь, як зміниться вигляд графіка функції, якщо замінити усі її значення на протилежні;
- 4) дізнаєтесь, як зміниться вигляд графіка функції, якщо замінити усі її аргументи на протилежні.
- 5) навчитеся досліджувати основні властивості тригонометричних функцій за допомогою графіків;
- 6) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Укажіть множину розв'язків рівняння $\sin x = 0$.
2. Знайдіть головний період функції $y = \operatorname{tg} 3x$.
3. Дослідіть на парність функцію $f(x) = x \cos x$.
4. Графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx$ розташований у першій, другій та третій координатних чвертях. Знайдіть знаки коефіцієнтів a та b .
5. Яке потрібно виконати паралельне перенесення графіка функції $y = \sqrt{x}$, щоб отримати графік функції $y = \sqrt{x+4}$?

III. Побудова графіків тригонометричних функцій зі зміною періоду функції

Нагадаємо деякі перетворення графіка функції $y = f(x)$.

$y = f(x + b)$	Паралельне перенесення вздовж осі абсцис на $ b $ одиниць — у додатному напрямі, якщо $b < 0$, та у від'ємному, — якщо $b > 0$.	
$y = f(kx), k > 1$ $y = f(kx), 0 < k < 1$	Стиск до осі ординат у k разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі ординат зменшується у k разів. Розтяг від осі ординат в $\frac{1}{k}$ разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі ординат збільшується в k разів.	

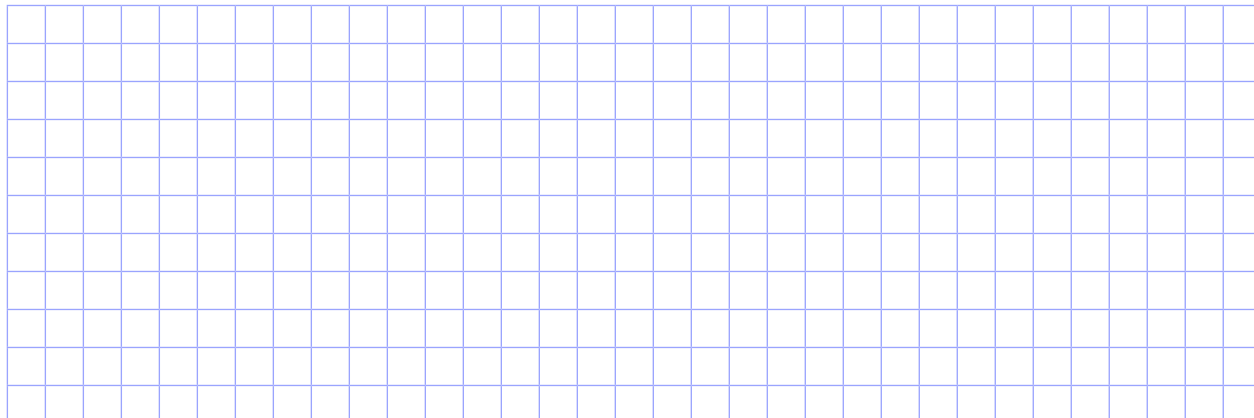
Таким чином, якщо функція $y = f(x)$ періодична з головним періодом T , то при перетворенні $y = f(kx)$ період функції збільшується у k разів, якщо $k > 1$, і зменшується в $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$, а при перетворенні графіка функції $y = f(x + b)$ період не змінюється.

Якщо T — головний період функції $f(x)$, то $\frac{T}{|k|}$ — головний період функції $f(kx + b)$.

Приклад 1. Побудуйте графік функції $y = \cos 3x$ та укажіть період цієї функції.



Приклад 2. Побудуйте графік $y = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$ та вкажіть період цієї функції.

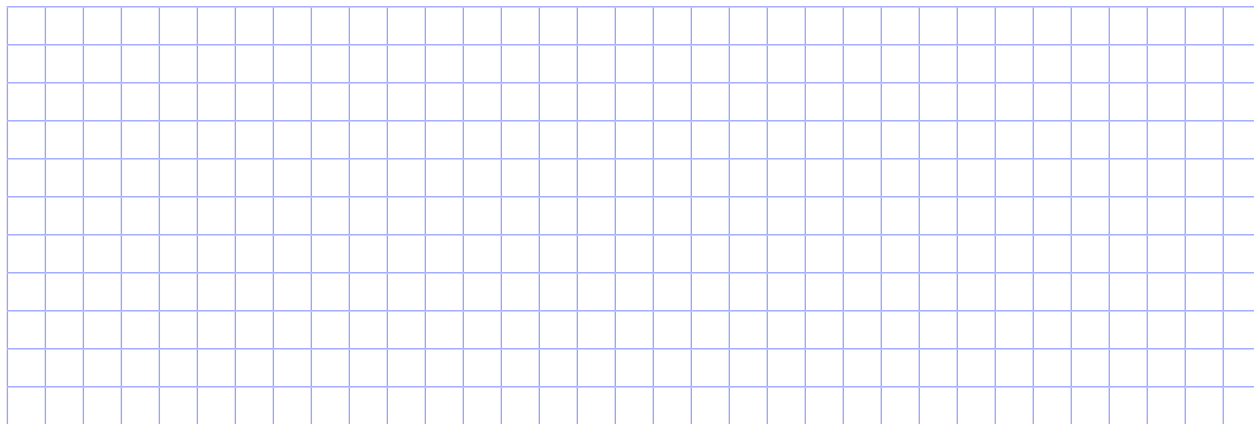


IV. Побудова графіків функцій синус та косинус зі зміною множини значень функцій

Розглянемо перетворення графіків функцій, які змінюють множину значень.

$y = f(x) + a$	Паралельне перенесення вздовж осі ординат на a одиниць — у додатному напрямі, якщо $a > 0$, та у від'ємному, — якщо $a < 0$.	
$y = mf(x), m > 1$ $y = mf(x), 0 < m < 1$	Розтяг від осі абсцис у m разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі абсцис збільшується у m разів. Стиск до осі абсцис в $\frac{1}{m}$ разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі абсцис зменшується в $\frac{1}{m}$ разів.	

Приклад 3. Побудуйте графік функції $y = 2 \sin x - 3$ та знайдіть множину її значень.

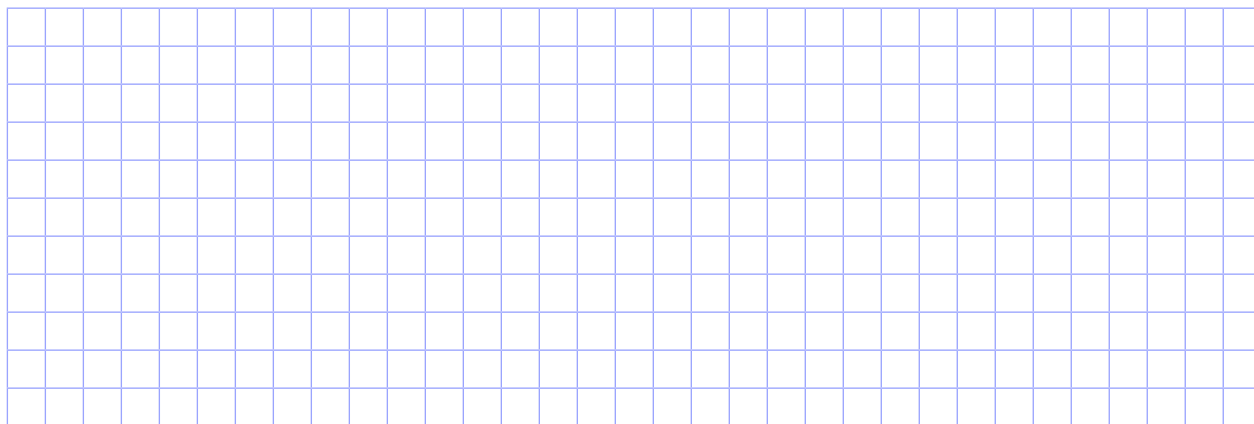


V. Побудова графіків тригонометричних функцій зі зміною періоду функцій та їхніх значень

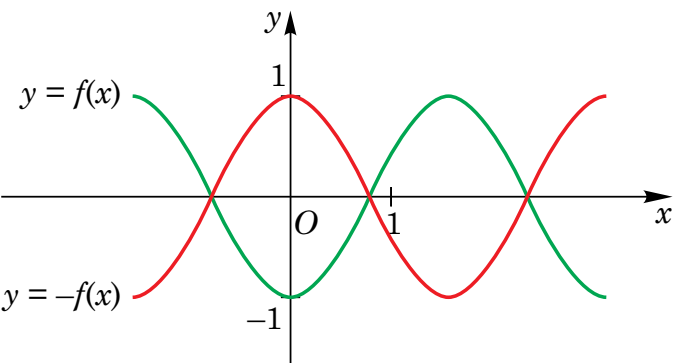
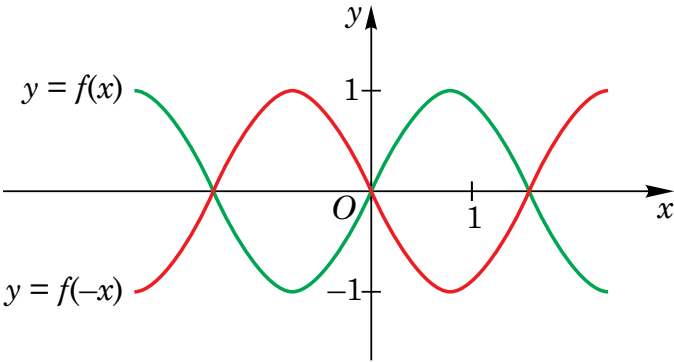
Поради щодо використання перетворень графіків функцій

1. Щоб побудувати графік функції $y = mf(x) + a$, потрібно послідовно застосувати перетворення: $f(x) \rightarrow mf(x) \rightarrow mf(x) + a$.
2. Щоб побудувати графік функції $y = f(kx + b)$, потрібно послідовно застосувати перетворення: $f(x) \rightarrow f(x + b) \rightarrow f(kx + b)$.
3. Щоб побудувати графік функції $y = mf(kx)$, можна послідовно застосувати перетворення $f(x) \rightarrow mf(x) \rightarrow mf(kx)$ або $f(x) \rightarrow f(kx) \rightarrow mf(kx)$, тобто послідовність застосування перетворень неважлива.
4. Щоб побудувати графік функції $y = f(x + b) + a$, можна послідовно застосувати перетворення $f(x) \rightarrow f(x + b) \rightarrow f(x + b) + a$ або $f(x) \rightarrow f(x) + a \rightarrow f(x + b) + a$, тобто послідовність застосування перетворень неважлива.

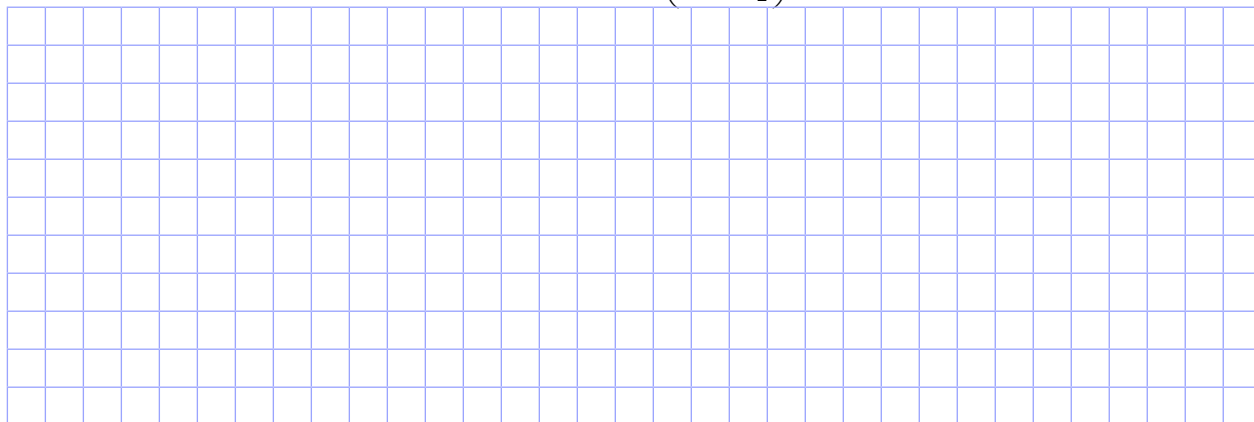
Приклад 4. Побудуйте графік функції $y = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$ та знайдіть її головний період і множину значень.



VI. Побудова графіків функцій виду $f(-x)$ та $-f(x)$

$y = -f(x)$	Симетричне відображення відносно осі абсцис	
$y = f(-x)$	Симетричне відображення відносно осі ординат	

Приклад 5. Побудуйте графік функції $y = -\operatorname{ctg}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$.

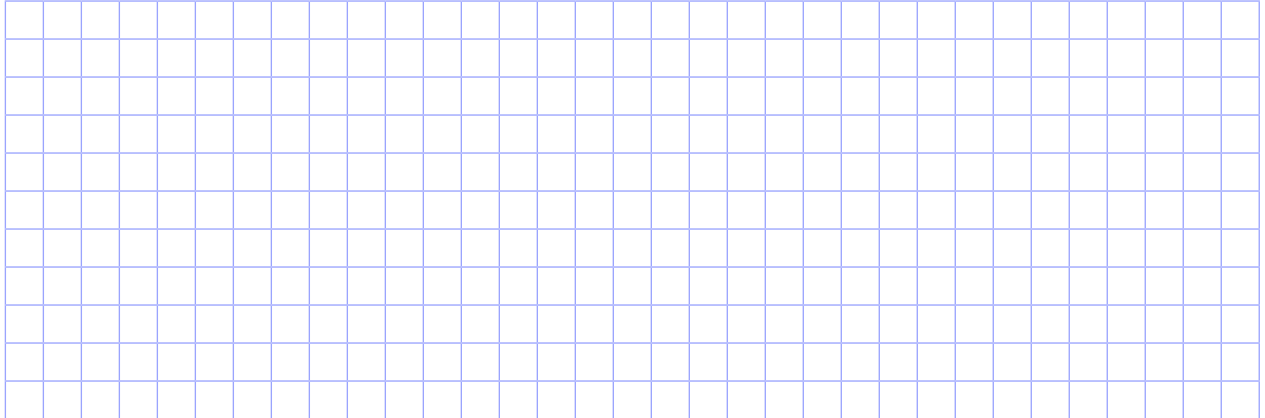


VII. Дослідження властивостей функцій за їхніми графіками

Орієнтовна послідовність дій для дослідження властивостей функцій за їхніми графіками

1. Знайдіть область визначення функції.
2. Знайдіть множину значень функції.
3. Дослідіть функцію на парність.
4. Дослідіть функцію на періодичність.
5. Знайдіть нулі функції.
6. Укажіть проміжки знакосталості функції.
7. Укажіть проміжки монотонності функції.

Приклад 6. Побудуйте графік функції $y = -2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 1$ та дослідіть властивості функції.



VIII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Еколог, що вивчає популяцію жуків-плавунців упродовж восьми тижнів, змодельовав зміну їхньої кількості за допомогою функції $K(t) = 5 + 2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, де t — кількість тижнів дослідження, $0 \leq t \leq 8$, а $K(t)$ — кількість жуків-плавунців у тисячах. Побудуйте графік цієї функції та установіть:

- 1) чисельність популяції на початку дослідження;
- 2) чи зменшувалася кількість популяції жуків плавунців до 2000;
- 3) найбільшу і найменшу чисельність популяції впродовж дослідження.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Побудуйте графік функції:
 - 1) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$;
 - 2) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
 - 3) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
 - 4) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
2. Побудуйте графік функції:
 - 1) $y = \sin x + 1$;
 - 2) $y = \cos x - 2$;
 - 3) $y = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}$;
 - 4) $y = \operatorname{tg} x - 1,5$.
3. Побудуйте графік функції $y = 2\cos x - 1$ та знайдіть її множину значень.
4. Побудуйте графік функції та вкажіть її головний період:
 - 1) $y = \cos 3x$;
 - 2) $y = \operatorname{ctg} 2x$.
5. Побудуйте графік функції та дослідіть її основні властивості:
 - 1) $y = -\sin(x + 1)$;
 - 2) $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
 - 3) $y = 1 - \sin x$;
 - 4) $y = 1 - \cos x$;
 - 5) $y = 1 - \operatorname{tg} x$;
 - 6) $y = 1 - \operatorname{ctg} x$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = \cos(-x)$;

2) $y = -\operatorname{tg} x$.

Рівень В

1. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \frac{1}{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 3) $y = 2 \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Побудуйте графік функції та вкажіть множину її значень і головний період:

1) $y = -3 \sin \frac{x}{2}$;

2) $y = 2 \sin \frac{x}{3}$.

3. Побудуйте графік функції та знайдіть різницю між найбільшим і найменшим її значеннями:

1) $y = 0,5 \sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$;

2) $y = 3 \sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$.

4. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Укажіть:

1) нулі функції;

2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і на яких — від'ємних;

3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

5. Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ \operatorname{tg} x, & x < 0. \end{cases}$

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$;

2) $y = \frac{\sin |x|}{\sin x}$.

7. Побудуйте графік функції й визначте основні властивості функції:

1) $f(x) = \sin 2x$;

2) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $f(x) = \sin\left(0,5x + \frac{\pi}{3}\right)$;

4) $f(x) = 1 - \cos 3x$.

8. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{-(\operatorname{tg} x - 1)^2}$;

2) $y = 2x^2 \sqrt{-\cos^2 x}$;

3) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$;

4) $y = \frac{\operatorname{ctg} |x| + \operatorname{ctg} x}{2}$.

9. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{2 + \cos x}$;

2) $y = \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$;

3) $y = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$;

4) $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$.

10. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

2) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$;

3) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$;

4) $y = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$.

11. При якому значенні параметра a рівняння має єдиний розв'язок:

1) $2 \cos x = x^2 + a$;

2) $0,5 \cos(\pi + x) = a - x^2$?

- 12.** Укажіть кількість коренів рівняння $2\sin\frac{x}{2} = a$ залежно від значень параметра a на проміжку $[0; 2\pi]$.

Рівень С

- 1.** Побудуйте графік функції та вкажіть її головний період:

1) $y = \sin(3x - 1) - 2$;

2) $y = -\frac{1}{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$;

3) $y = -3\sin(2x + 1)$;

4) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

- 2.** Побудуйте графік функції й визначте основні властивості функції:

1) $y = \frac{3}{2}\cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$;

2) $y = 2\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$;

3) $y = 3\operatorname{tg} 4x + \frac{1}{3}$;

4) $y = -2\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$.

- 3.** Скільки коренів має рівняння $\cos x = \frac{|x|}{4\pi}$?

- 4.** Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $\cos\sqrt{a^2 - x^2} = 1$ має рівно вісім коренів.

- 5.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{-(\operatorname{tg} x - 1)^2}$;

2) $y = 2x^2\sqrt{-\cos^2 x}$;

3) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$;

4) $y = \frac{\operatorname{ctg} |x| + \operatorname{ctg} x}{2}$.

- 6.** Укажіть кількість коренів рівняння $2\cos\left(\frac{3x}{2} - 1\right) + 1 = a$ залежно від значень параметра a на проміжку $[0; 2\pi]$.

- 7. Творче завдання.** Створіть інтерактивний додаток, що демонструє побудову графіків тригонометричних функцій за допомогою геометричних перетворень.

Рефлексія

- 1.** Я вмію будувати графіки тригонометричних функцій за допомогою геометричних перетворень, що змінюють період.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- 2.** Я вмію будувати графіки синуса та косинуса за допомогою геометричних перетворень, що змінюють множину значень.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- 3.** Я знаю, як зміниться вигляд графіка функції, якщо замінити усі її значення на протилежні.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- 4.** Я знаю, як зміниться вигляд графіка функції, якщо замінити усі її аргументи на протилежні.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 5.** Я вмію досліджувати основні властивості тригонометричних функції за допомогою графіків.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 6.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|

Можливі теми проєктів

- 1.** Створення інтерактивних анімацій для демонстрації геометричних перетворень графіків функцій.
- 2.** Моделювання реальних явищ природи за допомогою перетворень графіків тригонометричних функцій.
- 3.** Графіки тригонометричних функцій у задачах фізики.
- 4.** Геометричні перетворення графіків тригонометричних функцій у полярній системі координат.
- 5.** Використання перетворень графіків тригонометричних функцій при вивченні звукових хвиль.
- 6.** Створення візуальних орнаментів із графіків тригонометричних функцій.







