

10

Тема 4. Тригонометричні функції

Урок 10. Урок – практикум. Побудова графіків тригонометричних функцій за допомогою геометричних перетворень графіків функцій $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Побудова графіків функцій зі зміною періоду функції.
2. Побудова графіків функцій синус та косинус зі зміною множини значень функцій.
3. Побудова графіків тригонометричних функцій зі зміною періоду функцій та їхніх значень.
4. Побудова графіків тригонометричних функцій виду $f(-x)$ та $-f(x)$.
5. Дослідження властивостей тригонометричних функцій за їхніми графіками.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П];

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Поставте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям завдання на повторення. Оберіть ті завдання, які найдодільніші, на ваш погляд.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання задачі пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні. Використовуйте таблиці.

- 5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 7) Формуємо навички розв'язання прикладів та задач. Запропонуйте учням/ученицям розв'язувати тренувальні вправи за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Завдання учні/учениці розв'язують самотужки або в групах.
- 8) Акцентуйте увагу учнів/учениць на важливості створення проєктів, які можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності B або C.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Уявіть, що ви створюєте анімацію хвиль у комп'ютерній грі. Чи могли б ви обійтись без перетворень графіків тригонометричних функцій?
- 2) Чи впливає зміна певного параметра у формулі, що задає функцію, на побудову графіка функції?
- 3) Що простіше: побудувати графік з початку чи перетворити уже відомий?
- 4) Чи можуть дві функції, задані різними формулами, мати однакові графіки?
- 5) Що спільного між перетвореннями графіків функцій і редагуванням зображення у фото-редакторі?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Укажіть множину розв'язків рівняння $\sin x = 0$.
Відповідь. $\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
2. Знайдіть головний період функції $y = \operatorname{tg} 3x$.
Відповідь. $\frac{\pi}{3}$.
3. Дослідіть на парність функцію $f(x) = x \cos x$.
Відповідь. Функція непарна.
4. Графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx$ розташований у першій, другій та третій координатних чвертях. Знайдіть знаки коефіцієнтів a та b .
Відповідь. $a > 0, b > 0$.

5. Яке потрібно виконати паралельне перенесення графіка функції $y = \sqrt{x}$, щоб отримати графік функції $y = \sqrt{x+4}$?

Відповідь. Перенести графік на 4 одиниці вліво.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Еколог, що вивчає популяцію жуків-плавунців упродовж восьми тижнів, змоделював зміну їхньої кількості за допомогою функції $K(t) = 5 + 2 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, де

t — кількість тижнів дослідження, $0 \leq t \leq 8$, а $K(t)$ — кількість жуків-плавунців у тисячах. Побудуйте графік цієї функції та установіть:

- 1) чисельність популяції на початку дослідження;
- 2) чи зменшувалася кількість популяції жуків-плавунців до 2000;
- 3) найбільшу і найменшу чисельність популяції впродовж дослідження.

(Завдання з підручника Бевз Г. П. Математика : Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту : підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 288 с. : іл.)

Задача 2. Конкурсна задача. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x + \sin^2 x$.

III. Побудова графіків тригонометричних функцій зі зміною періоду функції

Нагадаємо деякі перетворення графіка функції $y = f(x)$.

$y = f(x + b)$	Паралельне перенесення вздовж осі абсцис на $ b $ одиниць — у додатному напрямі, якщо $b < 0$, та у від'ємному, — якщо $b > 0$.	
$y = f(kx), k > 1$	Стиск до осі ординат у k разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі ординат зменшується у k разів.	
$y = f(kx), 0 < k < 1$	Розтяг від осі ординат в $\frac{1}{k}$ разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі ординат збільшується в k разів.	

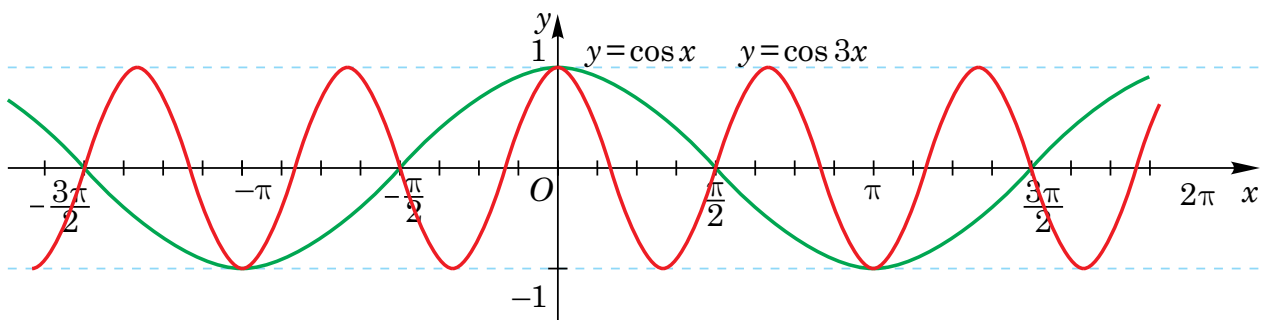
Таким чином, якщо функція $y = f(x)$ періодична з головним періодом T , то при перетворенні $y = f(kx)$ період функції збільшується у k разів, якщо $k > 1$, і зменшується в $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$, а при перетворенні графіка функції $y = f(x + b)$ період не змінюється.

Якщо T — головний період функції $f(x)$, то $\frac{T}{|k|}$ — головний період функції $f(kx + b)$.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

- 6.** Побудуйте графік функції $y = \cos 3x$ та укажіть період цієї функції.

Розв'язання. Стиснемо графік функції $y = \cos x$ до осі ординат утричі, тобто зменшимо у три рази відстані від кожної точки графіка функції $y = \cos x$ до осі ординат. Отримаємо графік $y = \cos 3x$ (див. рисунок).



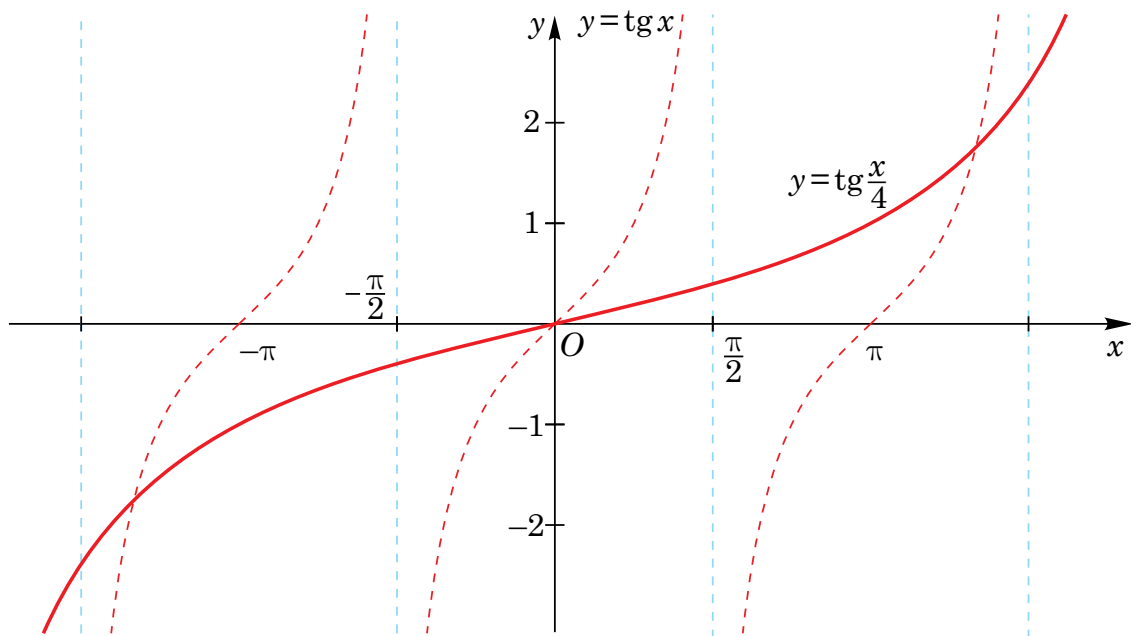
Оскільки $T = 2\pi$ — головний період функції $y = \cos x$, то $\frac{2\pi}{3}$ — головний період функції $y = \cos 3x$.

Відповідь. $T = \frac{2\pi}{3}$.

- 7.** Побудуйте графік $y = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$ та вкажіть період цієї функції.

Розв'язання. Розтягнемо графік функції $y = \operatorname{tg} x$ від осі ординат у чотири рази, тобто збільшимо у чотири рази відстані від кожної точки графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ до осі ординат. Отримаємо графік $y = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$ (див. рисунок).

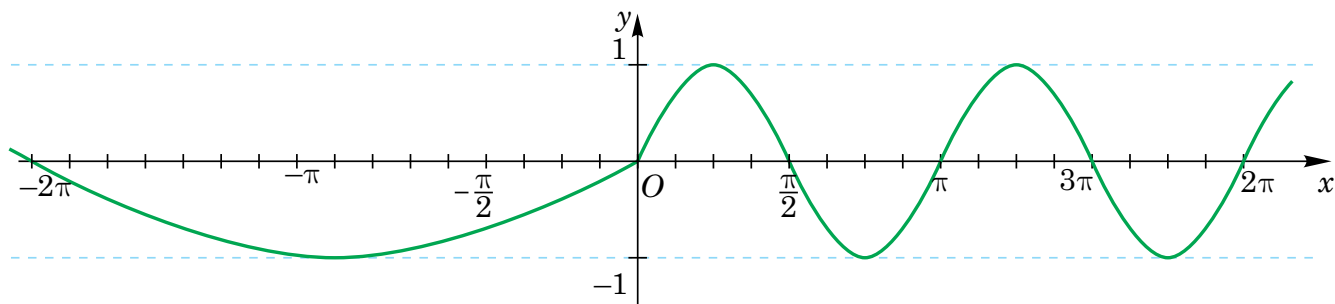
Оскільки $T = \pi$ — головний період функції $y = \operatorname{tg} x$, то 4π — головний період функції $y = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$.



Відповідь. $T = 4\pi$.

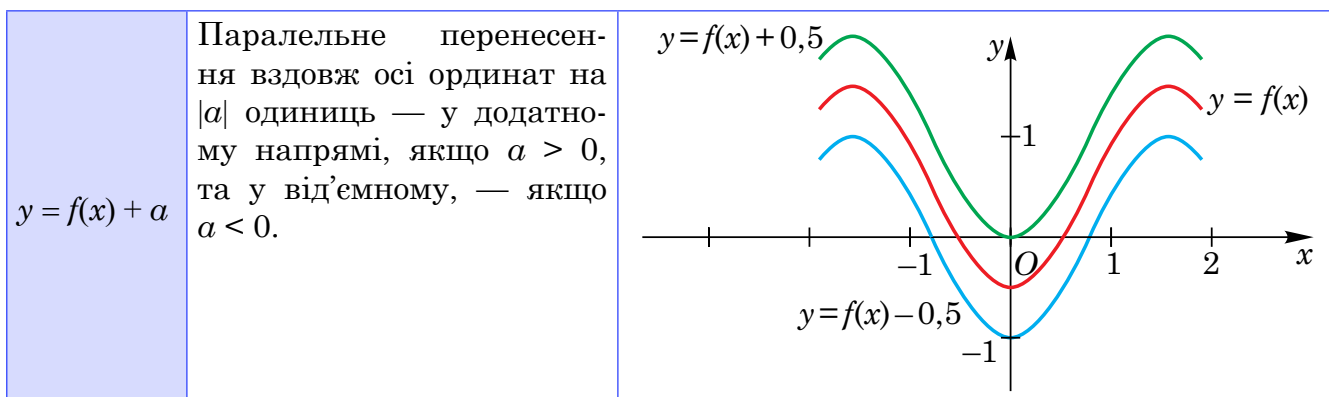
8. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \sin 2x, & x \geq 0, \\ \sin \frac{x}{2}, & x < 0. \end{cases}$

Розв'язання.



IV. Побудова графіків функцій синус та косинус зі змінюю множини значень функцій

Розглянемо перетворення графіків функцій, які змінюють множину значень.



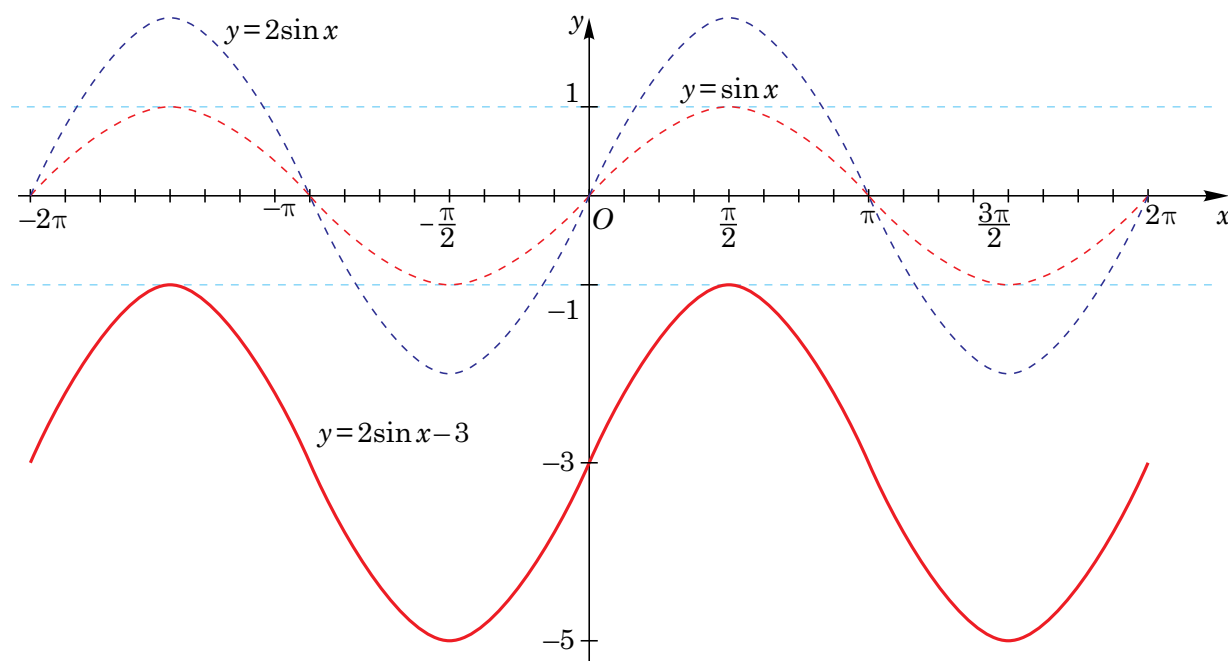
$y = mf(x),$ $m > 1$	Розтяг від осі абсцис у m разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі абсцис збільшується у m разів.	
$y = mf(x),$ $0 < m < 1$	Стиск до осі абсцис в $\frac{1}{m}$ разів, тобто відстань від кожної точки графіка $y = f(x)$ до осі абсцис зменшується в $\frac{1}{m}$ разів.	

Ілюстративні приклади (8–10 хв)

9. Побудуйте графік функції $y = 2\sin x - 3$ та знайдіть множину її значень.

Розв'язання. 1) Розтягнемо графік функції $y = \sin x$ від осі Ox удвічі (збільшимо відстань від осі Ox до кожної точки графіка $y = \sin x$ удвічі), отримаємо графік функції $y = 2\sin x$.

2) Паралельно перенесемо графік функції $y = 2\sin x$ на три одиниці вздовж осі ординат у від'ємному напрямі, отримаємо графік функції $y = 2\sin x - 3$ (див. рисунок).



Множина значень: $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-2 \leq 2\sin x \leq 2$, $-5 \leq 2\sin x - 3 \leq -1$.

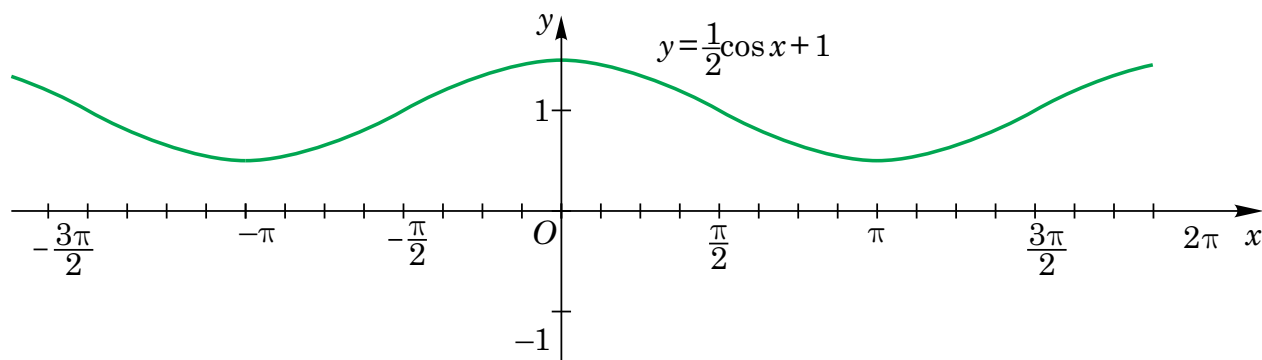
Отже, $E(y) = [-5; -1]$.

Відповідь. $E(y) = [-5; -1]$.

- 10.** Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}\cos x + 1$ та знайдіть множину значень функції.

Розв'язання. 1) Стиснемо графік функції $y = \cos x$ до осі Ox у два рази (зменшимо відстань від осі Ox до кожної точки графіка $y = \cos x$ удвічі), отримаємо графік функції $y = \frac{1}{2}\cos x$.

2) Паралельно перенесемо графік функції $y = \frac{1}{2}\cos x$ на одну одиницю вздовж осі ординат у додатному напрямі, отримаємо графік функції $y = \frac{1}{2}\cos x + 1$ (див. рисунок).



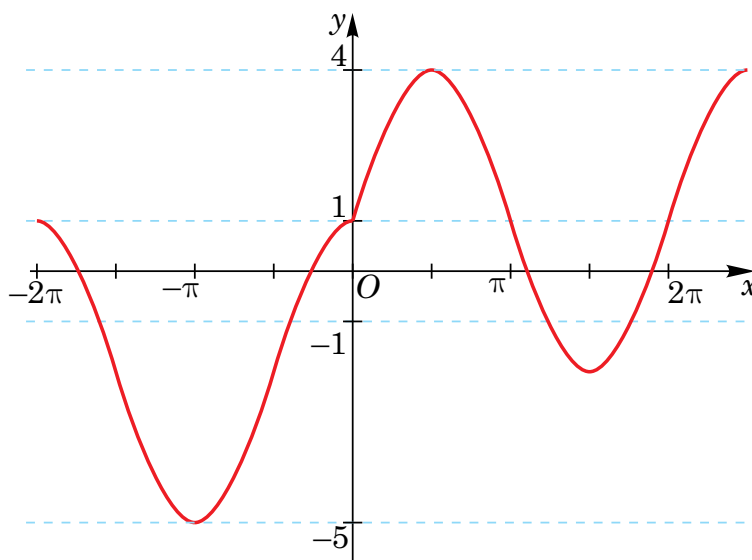
Множина значень: $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\cos x \leq \frac{1}{2}$, $0,5 \leq \frac{1}{2}\cos x + 1 \leq 1,5$.

Отже, $E(y) = [0,5; 1,5]$.

Відповідь. $E(y) = [0,5; 1,5]$.

- 11.** Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 3\sin x + 1, & x \geq 0, \\ 3\cos x - 2, & x < 0. \end{cases}$ За графіком знайдіть множину значень функції.

Розв'язання.



Множина значень: $E(y) = [-5; 4]$.

Відповідь. $E(y) = [-5; 4]$.

V. Побудова графіків тригонометричних функцій зі зміною періоду функцій та їхніх значень

Поради щодо використання перетворень графіків функцій

1. Щоб побудувати графік функції $y = mf(x) + a$, потрібно послідовно застосувати перетворення: $f(x) \rightarrow mf(x) \rightarrow mf(x) + a$.
2. Щоб побудувати графік функції $y = f(kx + b)$, потрібно послідовно застосувати перетворення: $f(x) \rightarrow f(x + b) \rightarrow f(kx + b)$.
3. Щоб побудувати графік функції $y = mf(kx)$, можна послідовно застосувати перетворення $f(x) \rightarrow mf(x) \rightarrow mf(kx)$ або $f(x) \rightarrow f(kx) \rightarrow mf(kx)$, тобто послідовність застосування перетворень неважлива.
4. Щоб побудувати графік функції $y = f(x + b) + a$, можна послідовно застосувати перетворення $f(x) \rightarrow f(x + b) \rightarrow f(x + b) + a$ або $f(x) \rightarrow f(x) + a \rightarrow f(x + b) + a$, тобто послідовність застосування перетворень неважлива.

Ілюстративні приклади (7–8 хв)

- 12.** Побудуйте графік функції $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$ та знайдіть її головний період і множину значень.

Розв'язання. 1) Розтягнемо графік функції $y = \sin x$ від осі Ox удвічі (збільшимо відстань від осі Ox до кожної точки графіка $y = \sin x$ удвічі), отримаємо графік функції $y = 2\sin x$.

2) Паралельно перенесемо графік функції $y = 2\sin x$ на $\frac{\pi}{6}$ одиниці вздовж осі абсцис у від'ємному напрямі, отримаємо графік функції $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

3) Розтягнемо графік функції $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ від осі Oy удвічі, отримаємо графік функції $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$.

4) Паралельно перенесемо графік функції $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ на одну одиницю вздовж осі ординат у від'ємному напрямі, отримаємо графік функції $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$.

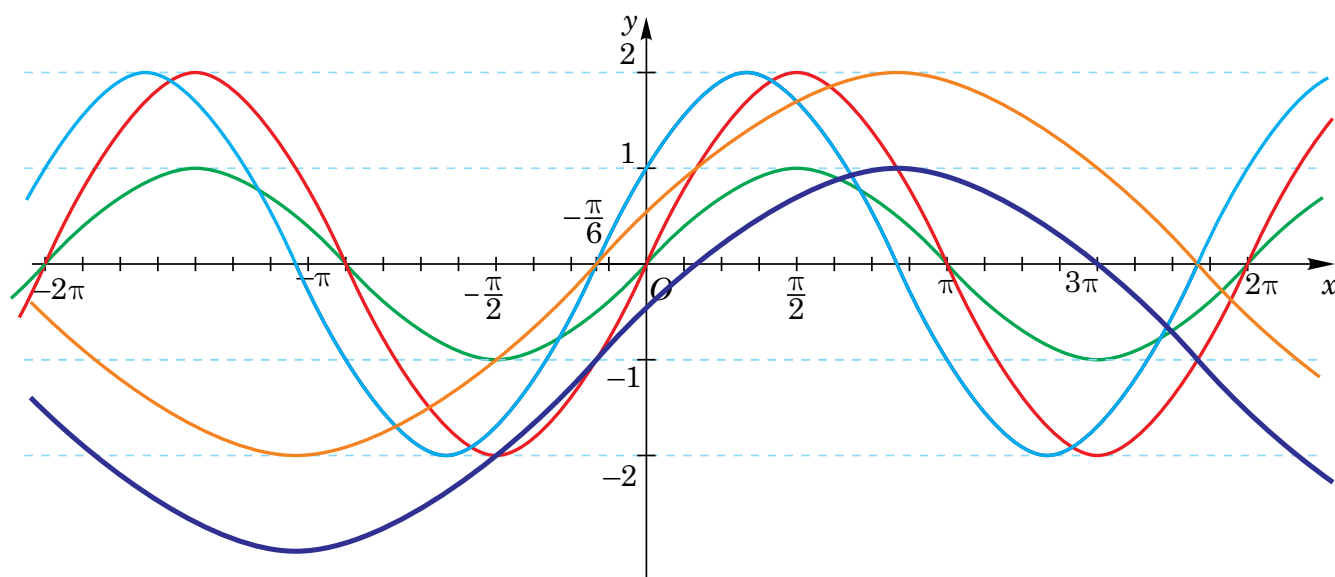
Графік побудовано на рисунку.

Оскільки $T = 2\pi$ — головний період функції $y = \sin x$, то $2\pi : \frac{1}{2} = 4\pi$ — головний період функції $y = 2\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$.

Множина значень:

$$-2 \leq 2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2, \quad -3 \leq 2 \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 1.$$

Отже, $E(y) = [-3; 1]$.



Для наочного пояснення скористайтесь Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/c9zjqupd>

Відповідь. 4π ; $E(y) = [-3; 1]$.



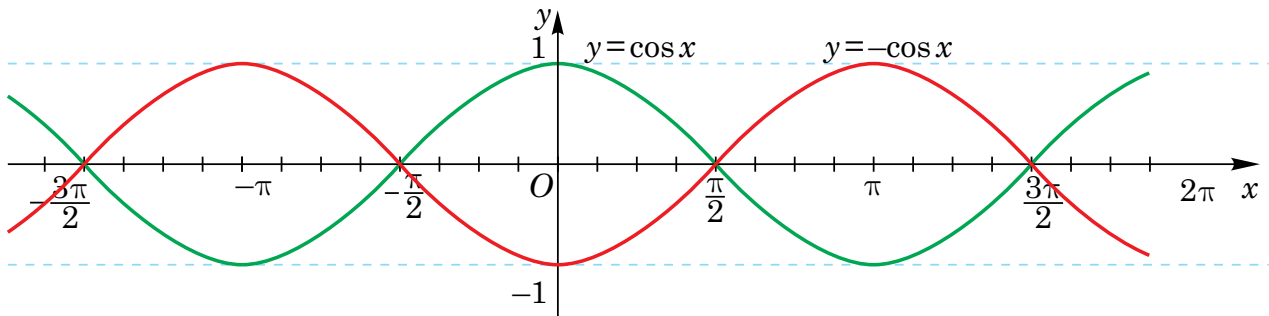
VI. Побудова графіків функцій виду $f(-x)$ та $-f(x)$

$y = -f(x)$	Симетричне відображення відносно осі абсцис	
$y = f(-x)$	Симетричне відображення відносно осі ординат	

Ілюстративні приклади (5–6 хв)

13. Побудуйте графік функції $y = \cos(-x)$.

Розв'язання. Відобразимо симетрично графік функції $y = \cos x$ відносно осі ординат, отримаємо графік функції $y = \cos(-x)$ (див. рисунок).

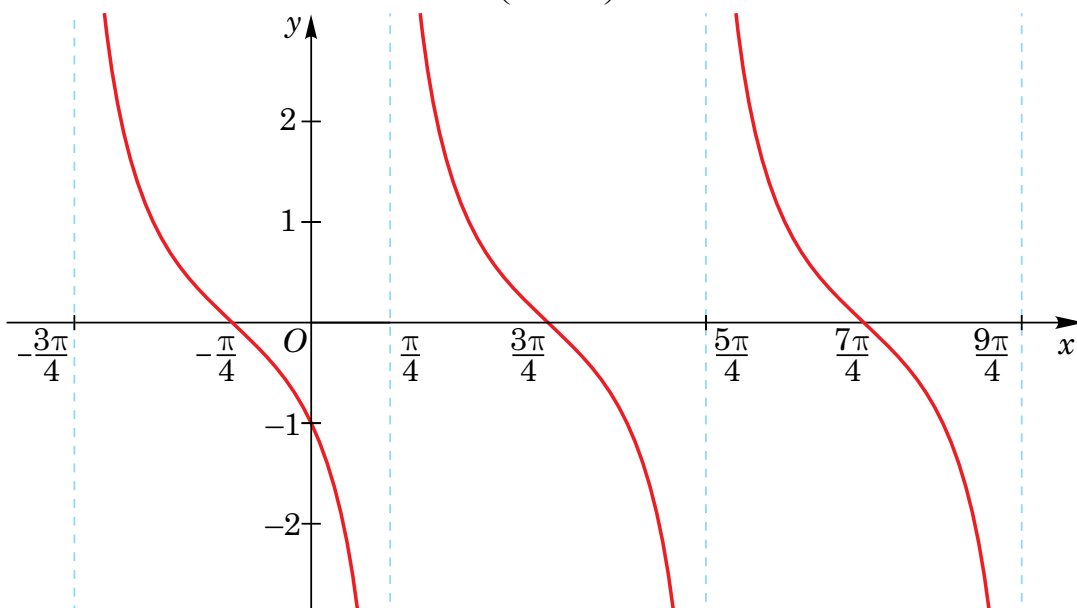


14. Побудуйте графік функції $y = -\operatorname{ctg}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. 1) Паралельно перенесемо графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ уздовж осі Ox на $\frac{\pi}{4}$ одиниці у від'ємному напрямку, отримаємо графік функції $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2) Відобразимо симетрично графік функції $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ відносно осі ординат, отримаємо графік функції $y = \operatorname{ctg}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3) Відобразимо симетрично графік функції $y = \operatorname{ctg}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$ відносно осі абсцис, отримаємо графік функції $y = -\operatorname{ctg}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$ (див. рисунок).



Примітка. Побудову графіка можна виконати після перетворень над формулою, що задає функцію: $y = -\operatorname{ctg}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\left(-\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

VII. Дослідження властивостей функцій за їхніми графіками

Орієнтовна послідовність дій для дослідження властивостей функцій за їхніми графіками

1. Знайдіть область визначення функції.
2. Знайдіть множину значень функції.
3. Дослідіть функцію на парність.
4. Дослідіть функцію на періодичність.
5. Знайдіть нулі функції.
6. Укажіть проміжки знакосталості функції.
7. Укажіть проміжки монотонності функції.

Ілюстративний приклад (5–7 хв)

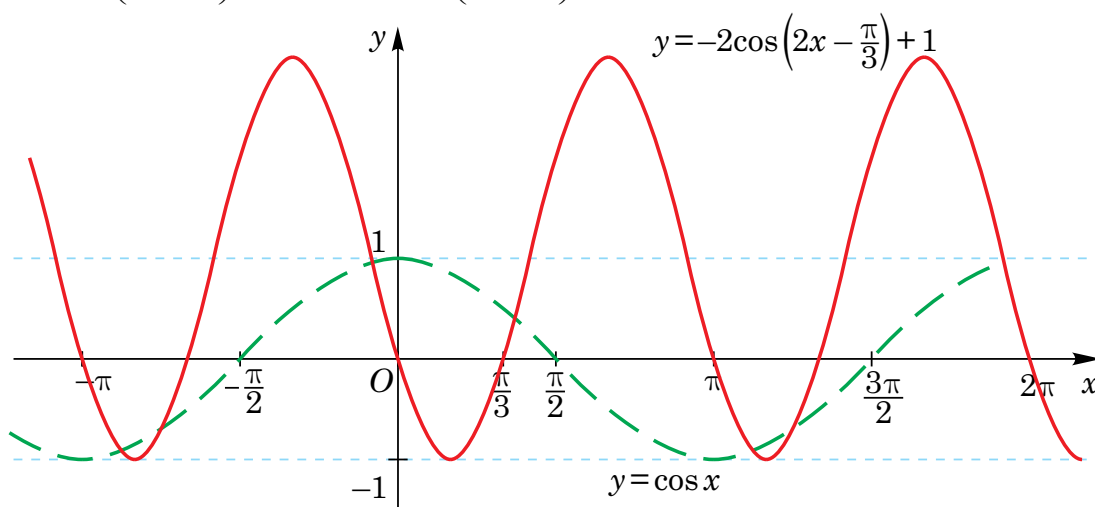
- 15.** Побудуйте графік функції $y = -2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 1$ та дослідіть властивості функції.

Розв'язання. Наведемо послідовність побудови графіка (див. рисунок), використовуючи геометричні перетворення:

- 1) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
- 2) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;
- 3) $y = -\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;
- 4) $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;
- 5) $y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

Оскільки функція косинус парна, тобто $f(-x) = f(x)$, то графіки функцій

$y = -2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ і $y = -2\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 1$ — тотожні.



Властивості функції

- 1) Областю визначення функції є множина усіх дійсних чисел.
- 2) Множиною значень є проміжок $[-1; 3]$.
- 3) Функція ні парна, ні непарна.
- 4) Функція періодична з головним періодом π .
- 5) Нулі функції — числа виду $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ та $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- 6) Функція додатна на кожному з проміжків виду $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \pi + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, і від'ємна на кожному з проміжків виду $\left(\pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 7) Функція зростає на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$, і спадає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

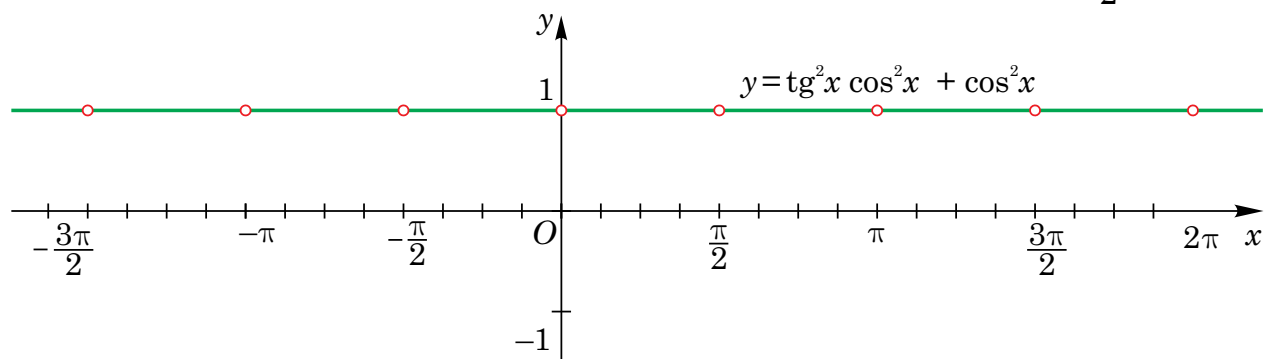
16. Конкурсна задача. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x$.

Розв'язання. 1) Знайдемо область визначення даної функції.

Функція $y = \operatorname{tg} x$ не визначена при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, тому $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) $y = \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, тобто графік функції $y = \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x$ збігається з графіком функції $y = 1$ на множині $D(y)$.

3) Будуємо графік функції $y = 1$ та вилучаємо з нього точки виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.



VIII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Еколог, що вивчає популяцію жуків-плавунців упродовж восьми тижнів, змоделював зміну їхньої кількості за допомогою функції $K(t) = 5 + 2 \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, де t — кількість тижнів дослідження, $0 \leq t \leq 8$, а $K(t)$ — кількість жуків-плавунців у тисячах. Побудуйте графік цієї функції та установіть:

- 1) чисельність популяції на початку дослідження;
- 2) чи зменшувалася кількість популяції жуків плавунців до 2000;
- 3) найбільшу і найменшу чисельність популяції впродовж дослідження.

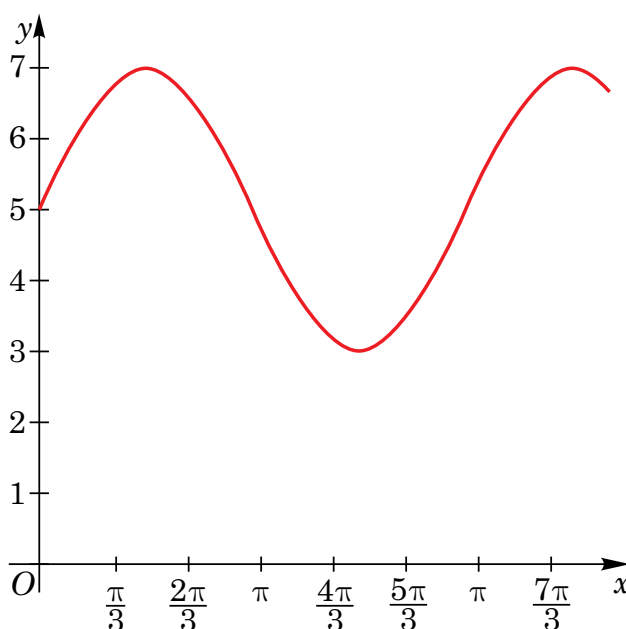
Розв'язання. 1) На початку дослідження було $K(0) = 5 + 2\sin\left(\frac{\pi \cdot 0}{3}\right) = 5$ тисяч жуків-плавунців.

$$2) -2 \leq 2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \leq 2,$$

$$3 \leq 5 + 2\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) \leq 7.$$

Таким чином, найменшою була популяція 3000 жуків-плавунців, а найбільшою — 7000.

Можна зробити висновок, що до 2000 популяція жуків не зменшувалась.



Відповідь. 1) 5000 жуків. 2) Ні. 3) Найменша — 3000 жуків, найбільша — 7000 жуків.

ІХ. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad 2) y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad 3) y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right); \quad 4) y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

2. Побудуйте графік функції:

$$1) y = \sin x + 1; \quad 2) y = \cos x - 2; \quad 3) y = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2}; \quad 4) y = \operatorname{tg} x - 1,5.$$

3. Побудуйте графік функції $y = 2\cos x - 1$ та знайдіть її множину значень.

4. Побудуйте графік функції та вкажіть її головний період:

$$1) y = \cos 3x; \quad 2) y = \operatorname{ctg} 2x.$$

5. Побудуйте графік функції та дослідіть її основні властивості:

- 1) $y = -\sin(x+1)$; 2) $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $y = 1 - \sin x$;
4) $y = 1 - \cos x$; 5) $y = 1 - \operatorname{tg} x$; 6) $y = 1 - \operatorname{ctg} x$.

6. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \cos(-x)$; 2) $y = -\operatorname{tg} x$.

Рівень В

1. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \frac{1}{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 3) $y = 2\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Побудуйте графік функції та вкажіть множину її значень і головний період:

- 1) $y = -3\sin\frac{x}{2}$; 2) $y = 2\sin\frac{x}{3}$.

3. Побудуйте графік функції та знайдіть різницю між найбільшим і найменшим її значеннями:

- 1) $y = 0,5\sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = 3\sin\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$.

4. Побудуйте графік функції $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Укажіть:

- 1) нулі функції;
2) проміжки, на яких функція набуває додатних значень, і на яких — від'ємних;
3) проміжки зростання і проміжки спадання функції.

5. Побудуйте графік функції:

- 1) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ \operatorname{tg} x, & x < 0. \end{cases}$

6. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$; 2) $y = \frac{\sin|x|}{\sin x}$.

7. Побудуйте графік функції й визначте основні властивості функції:

- 1) $f(x) = \sin 2x$; 2) $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
3) $f(x) = \sin\left(0,5x + \frac{\pi}{3}\right)$; 4) $f(x) = 1 - \cos 3x$.

8. Побудуйте графік функції:

- 1) $y = \sqrt{-(\operatorname{tg} x - 1)^2}$; 2) $y = 2x^2\sqrt{-\cos^2 x}$;
3) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$; 4) $y = \frac{\operatorname{ctg}|x| + \operatorname{ctg} x}{2}$.

9. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = \frac{1}{2 + \cos x}$; 2) $y = \frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$; 3) $y = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; 4) $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$.

10. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$; 2) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$; 3) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$; 4) $y = \operatorname{tg} x \cdot \cos x$.

11. При якому значенні параметра a рівняння має єдиний розв'язок:

1) $2 \cos x = x^2 + a$; 2) $0,5 \cos(\pi + x) = a - x^2$?

12. Укажіть кількість коренів рівняння $2 \sin \frac{x}{2} = a$ залежно від значень параметра a на проміжку $[0; 2\pi]$.

Рівень С

1. Побудуйте графік функції та вкажіть її головний період:

1) $y = \sin(3x - 1) - 2$; 2) $y = -\frac{1}{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$;
3) $y = -3 \sin(2x + 1)$; 4) $y = \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

2. Побудуйте графік функції й визначте основні властивості функції:

1) $y = \frac{3}{2} \cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$; 2) $y = 2 \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$;
3) $y = 3 \operatorname{tg} 4x + \frac{1}{3}$; 4) $y = -2 \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$.

3. Скільки коренів має рівняння $\cos x = \frac{|x|}{4\pi}$?

4. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $\cos \sqrt{a^2 - x^2} = 1$ має рівно вісім коренів.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{-(\operatorname{tg} x - 1)^2}$; 2) $y = 2x^2 \sqrt{-\cos^2 x}$;
3) $y = \cos x - \sqrt{\cos^2 x}$; 4) $y = \frac{\operatorname{ctg} |x| + \operatorname{ctg} x}{2}$.

6. Укажіть кількість коренів рівняння $2 \cos\left(\frac{3x}{2} - 1\right) + 1 = a$ залежно від значень параметра a на проміжку $[0; 2\pi]$.

7. Творче завдання. Створіть інтерактивний додаток, що демонструє побудову графіків тригонометричних функцій за допомогою геометричних перетворень.

Х. Рефлексія (2 хв)

1. Я вмію будувати графіки тригонометричних функцій за допомогою геометричних перетворень, що змінюють період.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я вмію будувати графіки синуса та косинуса за допомогою геометричних перетворень, що змінюють множину значень.

	Так	Ще треба потренуватися	Ні
3.	Я знаю, як зміниться вигляд графіка функції, якщо замінити усі її значення на протилежні.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні
4.	Я знаю, як зміниться вигляд графіка функції, якщо замінити усі її аргументи на протилежні.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні
5.	Я вмію досліджувати основні властивості тригонометричних функції за допомогою графіків.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні
6.	Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.		
	Так	Ще треба потренуватися	Ні

Можливі теми проєктів

1. Створення інтерактивних анімацій для демонстрації геометричних перетворень графіків функцій.
2. Моделювання реальних явищ природи за допомогою перетворень графіків тригонометричних функцій.
3. Графіки тригонометричних функцій у задачах фізики.
4. Геометричні перетворення графіків тригонометричних функцій у полярній системі координат.
5. Використання перетворень графіків тригонометричних функцій при вивченні звукових хвиль.
6. Створення візуальних орнаментів із графіків тригонометричних функцій.