

Урок 11. Урок–практикум. Побудова графіків тригонометричних функцій та дослідження властивостей функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитеся будувати графіки функцій виду $y = A\sin(kx + b)$ та $y = A\cos(kx + b)$;
- 2) дізнаєтесь, як впливають коефіцієнти графіків функцій виду $y = A\sin(kx + b)$ та $y = A\cos(kx + b)$ на їхній загальний вигляд;
- 3) дізнаєтесь, як зміниться вигляд графіка функції, якщо взяти її по модулю;
- 4) дізнаєтесь, як зміниться вигляд графіка функції, якщо взяти по модулю її аргумент;
- 5) навчитеся досліджувати основні властивості тригонометричних функції за допомогою графіків;
- 6) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть головний період функції $y = 2\sin 3x + 1$.
2. Знайдіть множину значень функції $y = 2\cos 4x + \frac{3}{2}$.
3. Обчисліть: $\operatorname{tg} 315^\circ$.
4. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{\sin x}$.
5. Знайдіть множину значень функції $y = -3\cos x + 2$.

III. Побудова графіків тригонометричних функцій виду

$$y = A\sin(kx + b), y = A\cos(kx + b)$$

1) Будуємо графіки функцій $y = A\sin x$ та $y = A\cos x$ із застосуванням графіків функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$, за перетвореннями $f(x) \rightarrow kf(x)$ та $f(x) \rightarrow -f(x)$.

2) Будуємо графіки функцій із застосуванням графіків функцій $y = A\sin x$ та $y = A\cos x$, за перетвореннями $f(x) \rightarrow f(x + b)$.

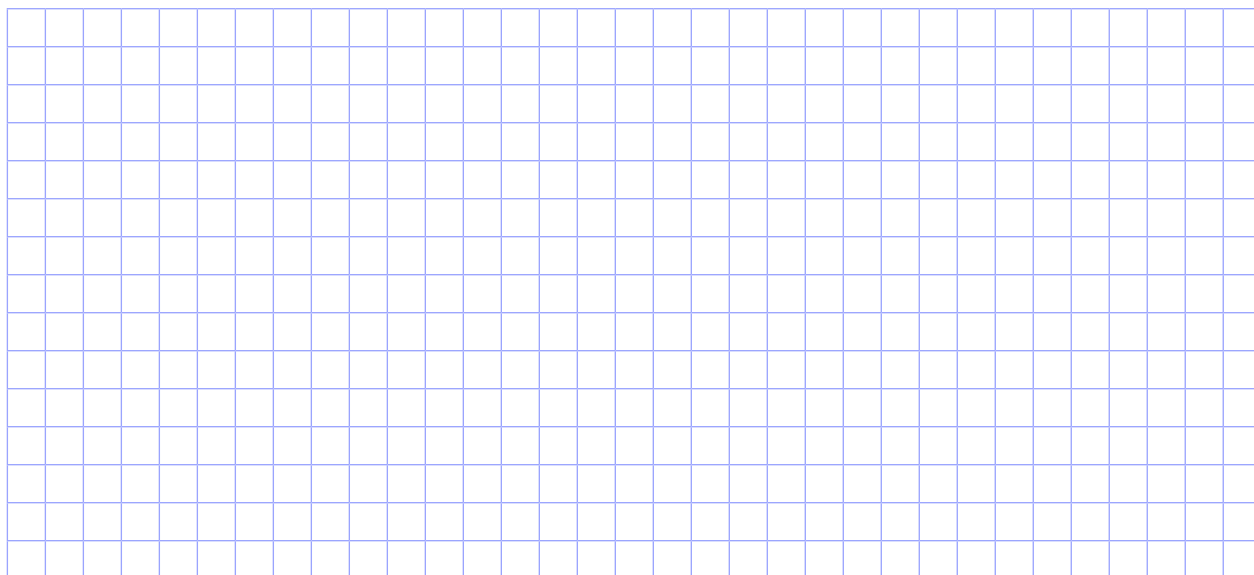
3) Будуємо графіки функцій $y = A\sin(kx + b)$ та $y = A\cos(kx + b)$ із застосуванням графіків функцій $y = A\sin(x + b)$ та $y = A\cos(x + b)$, за перетвореннями $f(x) \rightarrow f(kx)$ та $f(x) \rightarrow f(-x)$.

Для наочного пояснення можна скористатися Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/keh4v9ug>

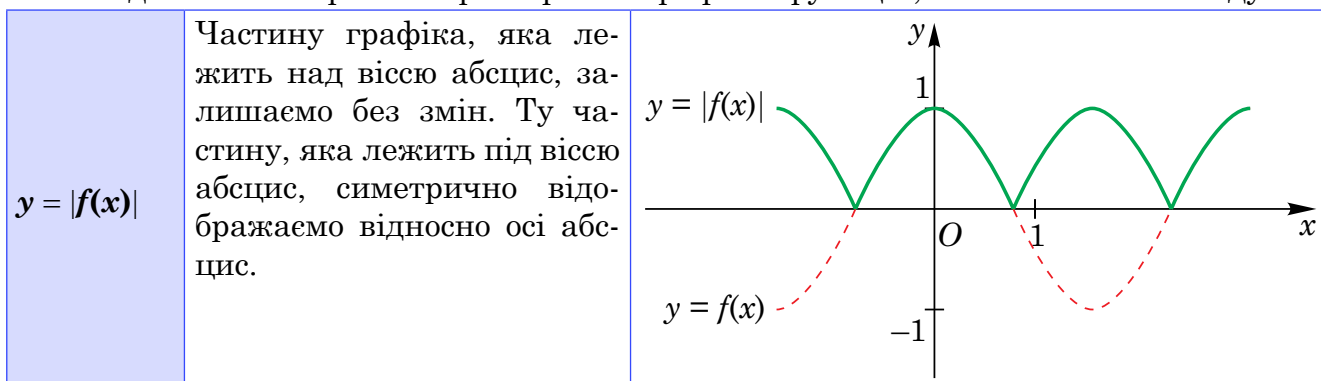


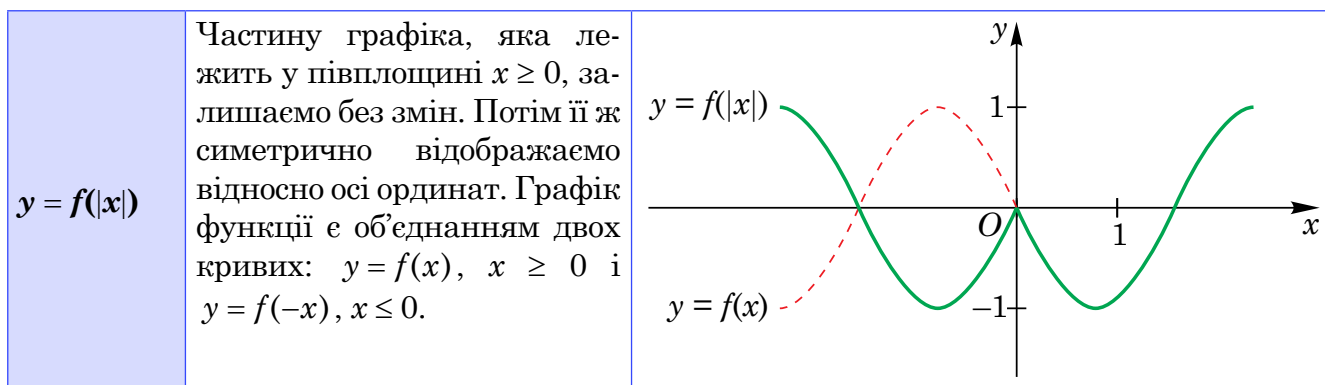
Приклад 1. Побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.



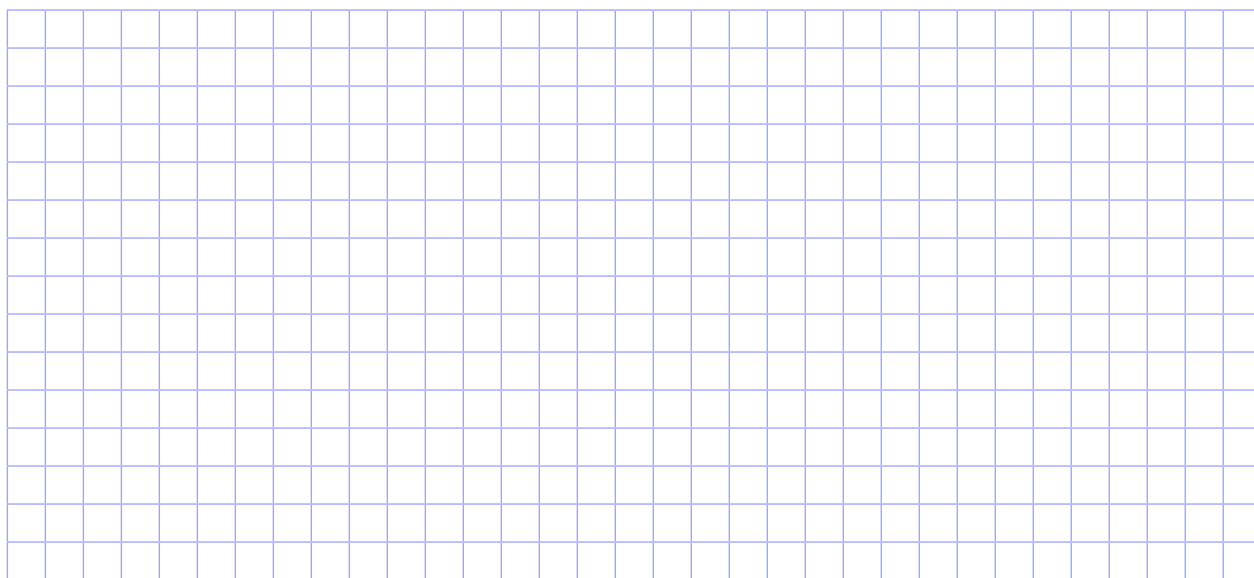
IV. Побудова графіків тригонометричних функцій з модулями

Нагадаємо геометричні перетворення графіків функцій, які містять знак модуля.

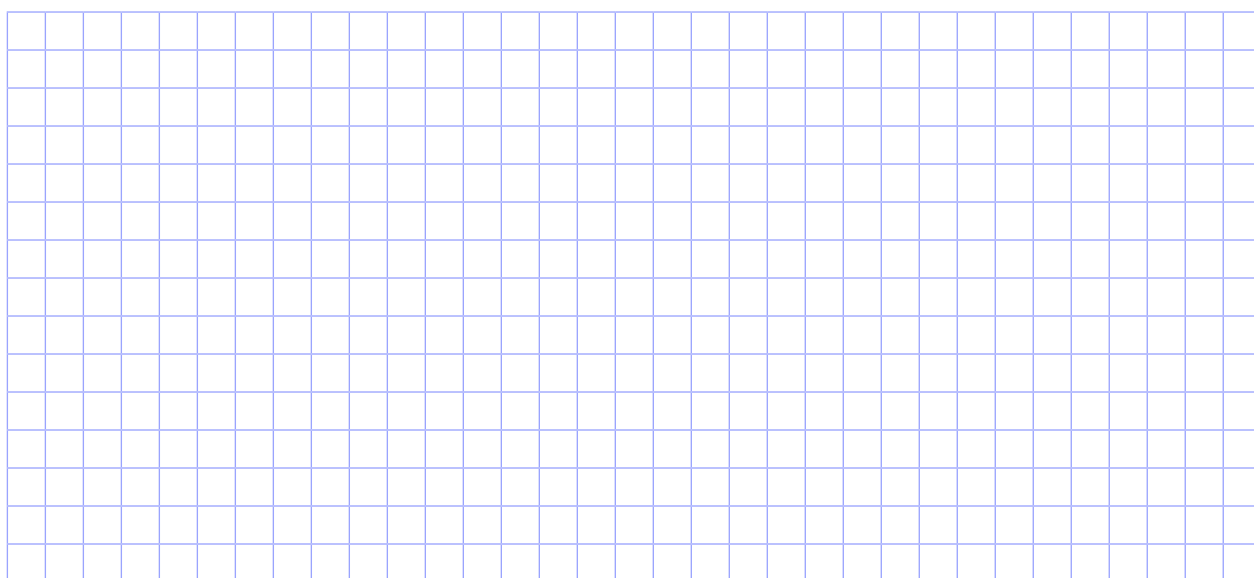




Приклад 2. Побудуйте графік функції $y = \sin \left| x + \frac{\pi}{4} \right|$.



Приклад 3. Побудуйте графік функції $y = \sin \left(|x| - \frac{\pi}{4} \right)$.

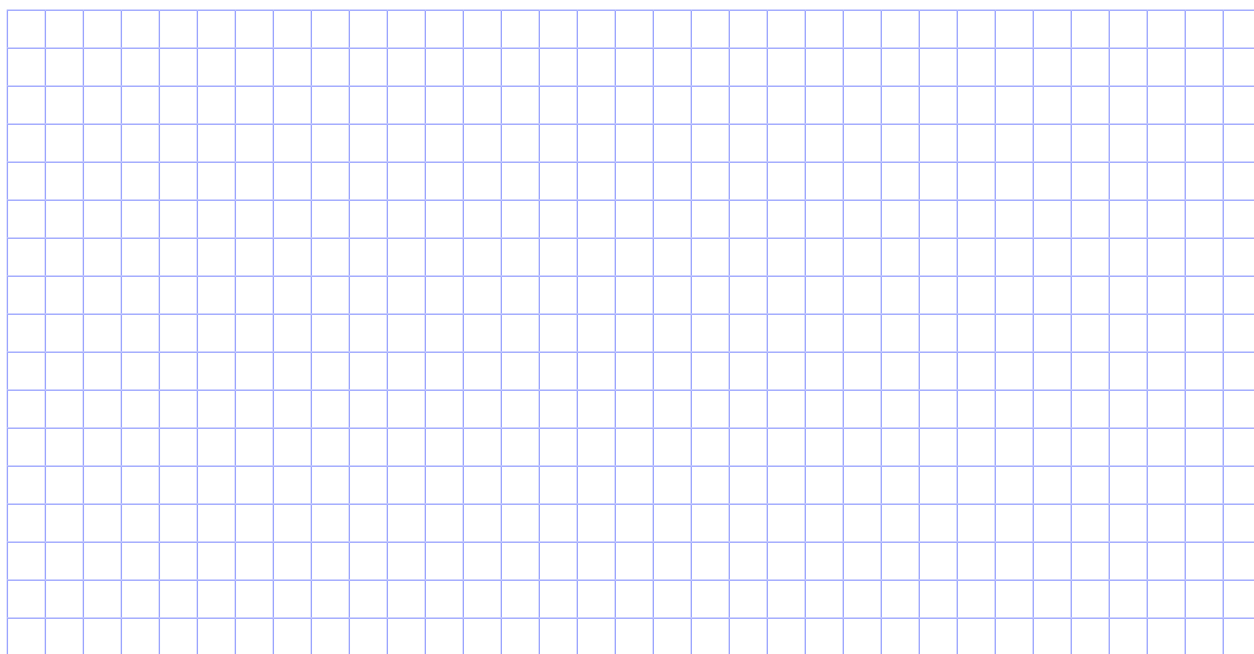


V. Дослідження властивостей функцій за їхніми графіками

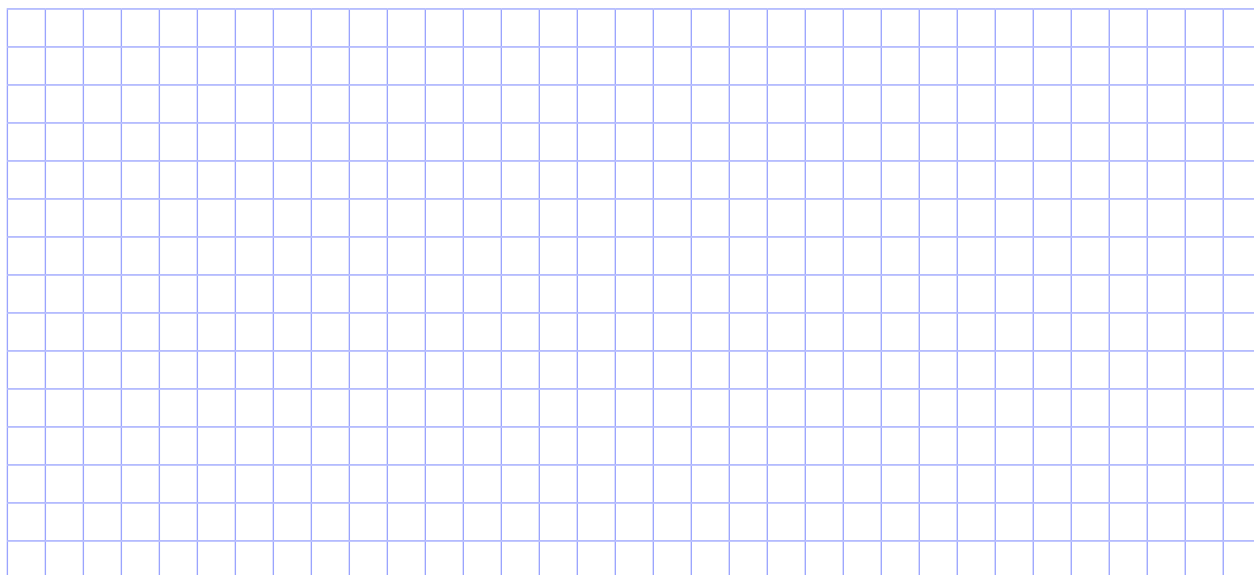
Орієнтовна послідовність дій для дослідження властивостей функцій за їхніми графіками

1. Знайдіть область визначення функції.
2. Знайдіть множину значень функції.
3. Дослідіть функцію на парність.
4. Дослідіть функцію на періодичність.
5. Знайдіть нулі функції.
6. Укажіть проміжки знакосталості функції.
7. Укажіть проміжки монотонності функції.

Приклад 4. Побудуйте графік функції $y = |\cos x|$ та дослідіть властивості функції.



Приклад 5. Побудуйте графік функції $y = -3 \cos |x| - 3$ та дослідіть її властивості.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Відомо, що під час дихання легені людини весь час здійснюють коливальні рухи — розширюючись та стискаючись. За 40 секунд учень 10 класу зробив 14 повних дихальних циклів. Під час видиху обхват його грудної клітки становив $P_1 = 89$ см, а під час вдиху — $P_2 = 97$ см. Складіть функцію $P(t)$ залежності обхвату грудної клітки від часу дихання, якщо вважати, що коливання, які здійснюються, є гармонічними та змінюються за законом $P(t) = A \sin \omega t + P_c$, де A — амплітуда коливань (у см), яку можна обчислити за формулою $A = \frac{P_2 - P_1}{2}$, ω — частота коливань (у с^{-1}), P_c — середнє значення обхвату грудної клітки (у см), яке можна обчислити за формулою $P_c = \frac{P_2 + P_1}{2}$. Побудуйте графік зазначеної залежності. Складіть аналогічну функцію для себе чи для когось зі своїх однокласників/однокласниць.

Задача 2. Конкурсна задача. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = \sin^3 x - \sin^6 x + 1$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- 1.** Укажіть найбільше й найменше значення та період функції:

1) $y = 2,6 \sin 3\pi x$;

$$2) \ y = 4 \cos\left(\frac{x}{3} - 1\right).$$

- 2.** Побудуйте графік функції:

$$1) \ y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$2) \ y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$3) \ y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$$

4) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

- ### 3. Чим відрізняються графіки функцій:

1) $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$;

$$2) \ y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right);$$

3) $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right);$

4) $y = 0,5 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$?

- #### 4. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\sin |x - 1|$;

$$2) \ y = \cos \left| x + \frac{\pi}{4} \right|.$$

- 5.** Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin(|x| + 1)$;

$$2) \ y = -\cos\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right).$$

6. Побудуйте графік функцій та визначте основні її властивості:

1) $y = |\sin x + 1|$;

2) $y = |\cos x - 1|$;

3) $y = |\sin x| + 1$;

4) $y = 1 - |\cos x|$.

Рівень В

1. Укажіть найбільше й найменше значення та період функції:

1) $y = -2 \sin\left(6 - \frac{\pi x}{2}\right)$;

2) $y = -1,5 \cos\left(-5x - \frac{\pi}{6}\right)$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = -2 \sin\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)$;

2) $y = 2 \cos(3|x| + 2)$.

3. Побудуйте графік функції та визначте основні її властивості:

1) $y = \sin|x| + 1$;

2) $y = -\sin 2|x|$;

3) $y = 2 \sin|x| + 2$;

4) $y = \cos 3|x|$.

4. Побудуйте графік функції та визначте основні її властивості:

1) $y = |\sin 3x|$;

2) $y = \left|\operatorname{tg} \frac{1}{2}x\right|$;

3) $y = |\operatorname{ctg} 2x|$;

4) $y = |\cos 3x|$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$;

2) $y = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$;

3) $y = \left|\cos x - \frac{1}{2}\right|$;

4) $y = \left|\sin x - \frac{1}{3}\right|$.

6. Побудуйте графік функції та визначте основні її властивості:

1) $y = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right) + 1$;

2) $f(x) = \cos\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = 3 \cos|x| - 3$;

4) $f(x) = |1 - \cos 3x|$.

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|3 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1\right|$;

2) $y = \left|\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - 1\right|$.

8. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$;

2) $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$;

3) $y = \cos x - |\cos x|$;

4) $y = |\sin x| - \sin x$.

9. Установіть графічно кількість коренів рівняння $\cos x = \frac{|x|}{4\pi}$.

10. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2 \sin 3x + 1$;

2) $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{3}{2}$;

3) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$;

4) $y = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

11. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2 \cos 4x + \frac{3}{2}$;

2) $y = -3 \cos \left(x - \frac{\pi}{5} \right) + 1$;

3) $y = \frac{3}{2} \cos \left(3x - \frac{3\pi}{4} \right) - \frac{1}{2}$;

4) $y = 2 \cos \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) + 3$.

12. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $\cos \sqrt{a^2 - x^2} = 1$ має рівно вісім коренів.

Рівень С

1. Побудуйте графік та вкажіть найбільше й найменше значення та період функції:

1) $y = 2 \sin \left(3x + \frac{\pi}{3} \right)$;

2) $y = 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$;

3) $y = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$;

4) $y = 0,5 \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$.

2. Побудуйте графік функції та вкажіть її основні властивості:

1) $y = \left| \cos \left| 2x - \frac{\pi}{3} \right| \right|$;

2) $y = 3 |\cos |3x - 1|| - 1$;

3) $y = 2 \left| \sin \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| \right|$;

4) $y = \left| \sin \left| \frac{1}{2}x + 1 \right| \right|$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2 \cos \left(2|x| - \frac{\pi}{3} \right) - 2$;

2) $y = -\frac{1}{2} \cos \left(3|x| - \frac{\pi}{4} \right)$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = -2 \sin \left(|x| + \frac{3\pi}{4} \right) + 2$;

2) $y = \frac{1}{2} \sin \left(|x| - \frac{\pi}{5} \right) + \frac{1}{2}$;

3) $y = \cos \left(|x| + \frac{2\pi}{3} \right) - 2$;

4) $y = \cos \left(4|x| - \frac{2\pi}{3} \right) - 1$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left| 1 - 2 \cos \left(\frac{|x|}{2} - \frac{2\pi}{3} \right) \right|$;

2) $y = \left| \frac{1}{3} \sin \left(\frac{2}{3}|x| - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{2}{3} \right|$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = [\sin x]$;

2) $y = \sin[x]$;

3) $y = \cos x + [\cos x]$;

4) $y = \{\cos x\}$.

7. Творче завдання. Напишіть програму, яка демонструє побудову графіків тригонометричних функцій виду $y = A \sin(kx + b)$, $y = A \cos(kx + b)$ через поетапні геометричні перетворення.

Рефлексія

1. Я вмію будувати графіки функцій виду $y = A \sin(kx + b)$ та $y = A \cos(kx + b)$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- | | | | | |
|-----------|--|-----|------------------------|----|
| 2. | Я знаю, як впливають коефіцієнти графіків функцій виду $y = A\sin(kx + b)$ та $y = A\cos(kx + b)$ на їхній загальний вигляд. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, як зміниться вигляд графіка функції, якщо взяти її по модулю. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, як зміниться вигляд графіка функції, якщо взяти по модулю її аргумент. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я вмію досліджувати основні властивості тригонометричних функції за допомогою графіків. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Коливання математичного маятника.
- 2.** Комп'ютерне моделювання графіків функцій виду $y = A\sin(kx + b)$ і $y = A\cos(kx + b)$.
- 3.** Перетворення графіків тригонометричних функцій в біології та в медицині.
- 4.** Анімація геометричних перетворень при побудові графіків тригонометричних функцій.
- 5.** Застосування модуля у тригонометричних функцій для створення візерунків та орнаментів.







