

Урок 11. Урок–практикум. Побудова графіків тригонометричних функцій та дослідження властивостей функцій

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Побудова графіків тригонометричних функцій виду $y = A\sin(kx + b)$, $y = A\cos(kx + b)$.
2. Побудова графіків тригонометричних функцій з модулями.
3. Дослідження властивостей тригонометричних функцій за їхніми графіками.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

реалізовує визначену послідовність дій для розв'язання специфічних проблемних ситуацій, перевіряє та досліджує отримані результати [12 МАО 4.2.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Розв'яжіть з учнями/ученицями кілька завдань на повторення, на ваш вибір.
- 3) Повторіть геометричні перетворення графіків тригонометричних функцій.
- 4) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 5) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу на її практичному застосуванні. При поясненні теорії застосовуйте таблиці, які наведено.
- 6) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади, яких запропоновано з надлишком. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 7) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

8) Заплануйте проведення останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичних задач і тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів самостійної роботи над завданнями.

9) Під час розв'язання задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

10) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми. Також темами проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями складності А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали рівень А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можна створити цікаву фігуру або орнамент, якщо аргумент функції або всю функцію взяти під знак модуля?

2) Чи відомий вам термін «модуляція звуку»? Чи пов'язаний цей термін із геометричними перетвореннями тригонометричних функцій, що містять знак модуля?

3) Чому звук має хвильову природу? Який зв'язок між звуком і гармонічними коливаннями?

4) Чи можна передбачити майбутнє положення тіла, що здійснює коливання?

5) Як ви думаєте, чи існує «ідеальне» коливання в природі?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть головний період функції $y = 2 \sin 3x + 1$.

Відповідь. $\frac{2\pi}{3}$.

2. Знайдіть множину значень функції $y = 2 \cos 4x + \frac{3}{2}$.

Відповідь. $[-0,5; 3,5]$.

3. Обчисліть: $\operatorname{tg} 315^\circ$.

Відповідь. -1 .

4. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{\sin x}$.

Відповідь. $[2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$.

5. Знайдіть множину значень функції $y = -3 \cos x + 2$.

Відповідь. $[-1; 5]$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Відомо, що під час дихання легені людини весь час здійснюють коливальні рухи — розширюючись та стискаючись. За 40 секунд учень 10 класу зробив 14 повних дихальних циклів. Під час видиху обхват його грудної клітки становив $P_1 = 89$ см, а під час вдиху — $P_2 = 97$ см. Складіть функцію $P(t)$ залежності обхвату грудної клітки від часу дихання, якщо вважати, що коливання, які здійснюються, є гармонічними та змінюються за законом $P(t) = A \sin \omega t + P_c$, де A — амплітуда коливань (у см), яку можна обчислити за формулою $A = \frac{P_2 - P_1}{2}$, ω — частота коливань (у с^{-1}), P_c — середнє значення обхвату грудної клітки (у см), яке можна обчислити за формулою $P_c = \frac{P_2 + P_1}{2}$. Побудуйте графік зазначеної залежності. Складіть аналогічну функцію для себе чи для когось зі своїх однокласників/однокласниць.

Задача 2. Конкурсна задача. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sin^3 x - \sin^6 x + 1$.

III. Побудова графіків тригонометричних функцій виду

$$y = A \sin(kx + b), y = A \cos(kx + b)$$

1) Будуємо графіки функцій $y = A \sin x$ та $y = A \cos x$ із застосуванням графіків функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$, за перетвореннями $f(x) \rightarrow kf(x)$ та $f(x) \rightarrow -f(x)$.

2) Будуємо графіки функцій із застосуванням графіків функцій $y = A \sin x$ та $y = A \cos x$, за перетвореннями $f(x) \rightarrow f(x + b)$.

3) Будуємо графіки функцій $y = A \sin(kx + b)$ та $y = A \cos(kx + b)$ із застосуванням графіків функцій $y = A \sin(x + b)$ та $y = A \cos(x + b)$, за перетвореннями $f(x) \rightarrow f(kx)$ та $f(x) \rightarrow f(-x)$.

Для наочного пояснення можна скористатися Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/keh4v9ug>



Ілюстративний приклад (5–7 хв)

6. Побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

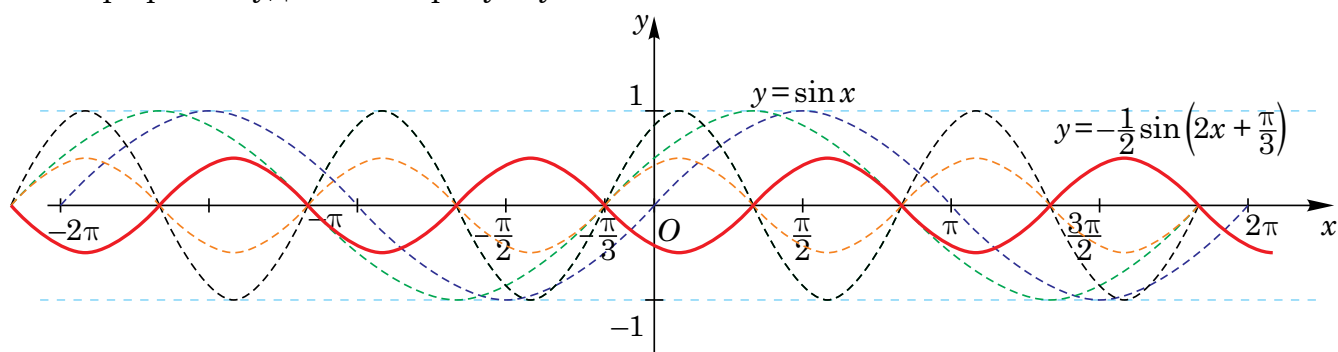
Розв'язання. 1) $y = \sin x \rightarrow y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ — паралельне перенесення графіка вздовж осі абсцис на $\frac{\pi}{3}$ одиниці у від'ємному напрямку.

2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ — стиск графіка до осі ординат удвічі.

3) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ — стиск графіка до осі абсцис удвічі.

4) $y = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = -\frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ — симетрія графіка відносно осі абсцис.

Графік побудовано на рисунку.



IV. Побудова графіків тригонометричних функцій з модулями

Нагадаємо геометричні перетворення графіків функцій, які містять знак модуля.

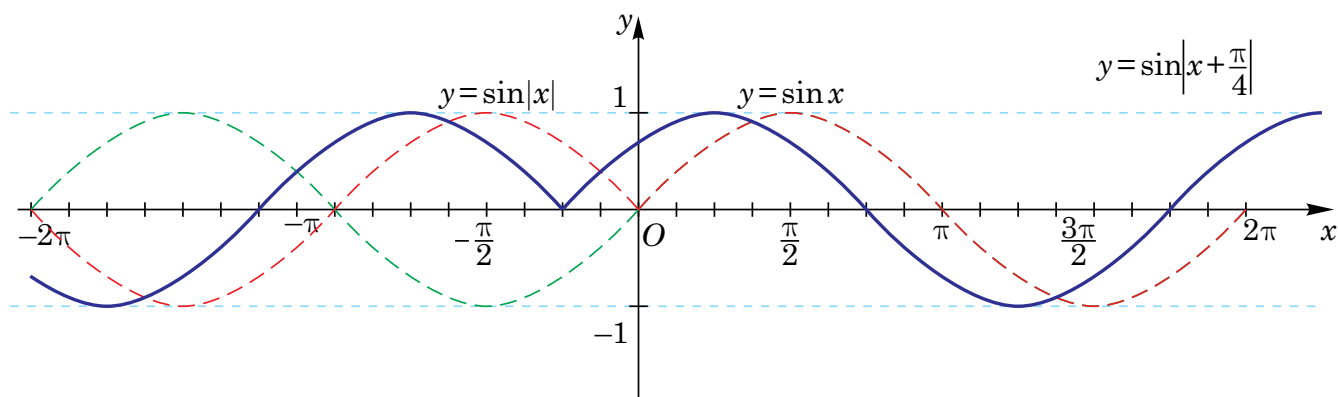
$y = f(x) $	Частина графіка, яка лежить над віссю абсцис, залишаємо без змін. Ту частину, яка лежить під віссю абсцис, симетрично відображаємо відносно осі абсцис.	
$y = f(x)$	Частина графіка, яка лежить у півплощині $x \geq 0$, залишаємо без змін. Потім її ж симетрично відображаємо відносно осі ординат. Графік функції є об'єднанням двох кривих: $y = f(x)$, $x \geq 0$ і $y = f(-x)$, $x \leq 0$.	

Ілюстративні приклади (6–8 хв)

Детально проаналізуйте, чим послідовність побудови графіка у прикладі 7 відрізняється від прикладу 8. Наголосіть учням/ученицям, що геометричні перетворення дозволяють брати по модулю або лише аргумент або всю функцію.

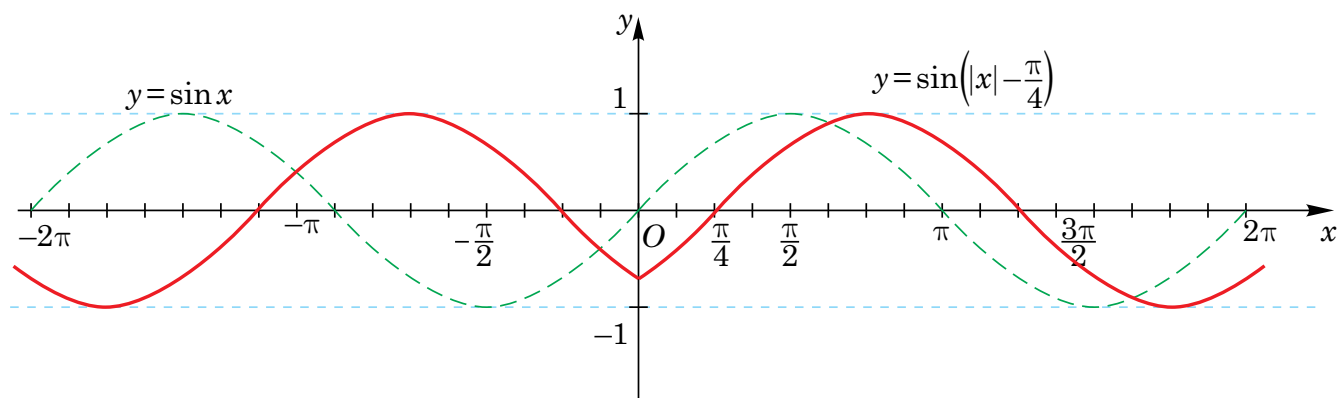
7. Побудуйте графік функції $y = \sin\left|x + \frac{\pi}{4}\right|$.

Розв'язання. Будуємо графік функції $y = \sin|x|$. Паралельно переносимо побудований графік уздовж осі абсцис на $\frac{\pi}{4}$ одиниць у від'ємному напрямі. Отримуємо шуканий графік (див. рисунок).



8. Побудуйте графік функції $y = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{4}\right)$.

Розв'язання. Паралельно перенесемо графік функції $y = \sin x$ уздовж осі абсцис на $\frac{\pi}{4}$ одиниць у додатному напрямі. Отримаємо графік функції $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Потім ту частину графіка, яка лежить у півплощині $x \geq 0$, симетрично відобразимо відносно осі ординат. Об'єднання симетричних частин графіка — шуканий графік (див. рисунок).



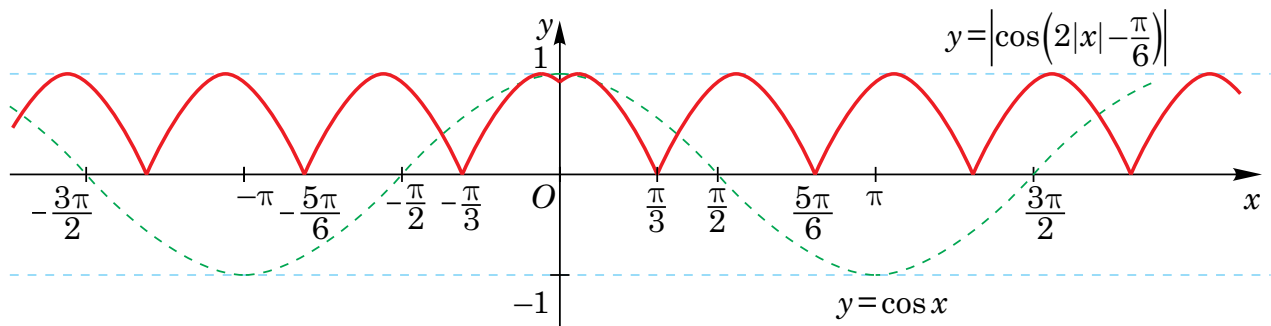
9. Побудуйте графік функції $y = \left|\cos\left(2|x| - \frac{\pi}{6}\right)\right|$.

Розв'язання. 1) $y = \cos x \rightarrow y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ — паралельне перенесення графіка вздовж осі абсцис на $\frac{\pi}{6}$ одиниць у додатному напрямку.

2) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ — стиск графіка до осі ординат удвічі.

3) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow y = \cos\left(2|x| - \frac{\pi}{6}\right)$ — симетрія відносно осі ординат частини графіка, яка лежить у півплощині $x \geq 0$.

4) $y = \cos\left(2|x| - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow y = \left|\cos\left(2|x| - \frac{\pi}{6}\right)\right|$ — симетрія відносно осі абсцис частини графіка, яка лежить під віссю (див. рисунок).



V. Дослідження властивостей функцій за їхніми графіками

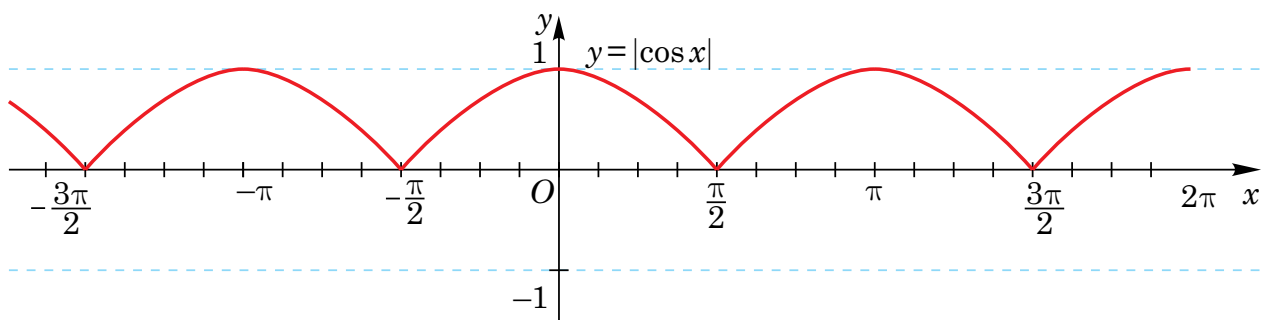
Орієнтовна послідовність дій для дослідження властивостей функцій за їхніми графіками

1. Знайдіть область визначення функції.
2. Знайдіть множину значень функції.
3. Дослідіть функцію на парність.
4. Дослідіть функцію на періодичність.
5. Знайдіть нулі функції.
6. Укажіть проміжки знакосталості функції.
7. Укажіть проміжки монотонності функції.

Ілюстративні приклади (8–10 хв)

10. Побудуйте графік функції $y = |\cos x|$ та дослідіть властивості функції.

Розв'язання. Частину графіка функції $y = \cos x$, яка лежить у півплощині $y < 0$, симетрично відобразимо відносно осі абсцис. Шуканий графік — об'єднання двох кривих: $y = \cos x$ при $y \geq 0$ і $y = -\cos x$ при $y < 0$.



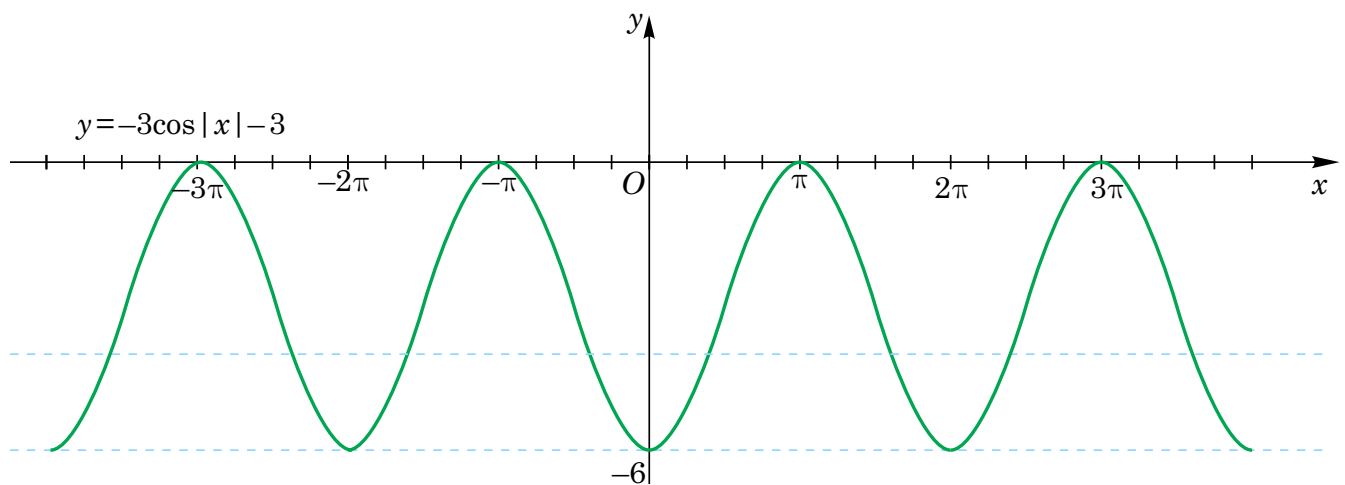
- 1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел.
- 2) Множиною значень є проміжок $[0; 1]$.
- 3) Функція парна.
- 4) Функція періодична з головним періодом π .
- 5) Нулі функції — числа виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 6) Функція додатна на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

7) Функція зростає на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ і спадає на кожному з проміжків виду $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

11. Побудуйте графік функції $y = -3\cos|x| - 3$ та дослідіть її властивості.

Розв'язання.

- 1) Оскільки функція $y = \cos x$ — парна, то графік функції $y = \cos|x|$ збігається з графіком функції $y = \cos x$.
- 2) $y = \cos|x| \rightarrow y = 3\cos|x|$ — розтяг від осі абсцис утричі.
- 3) $y = 3\cos|x| \rightarrow y = -3\cos|x|$ — симетрія відносно осі абсцис.
- 4) $y = -3\cos|x| \rightarrow y = -3\cos|x| - 3$ — паралельне перенесення вздовж осі ординат на 3 одиниці вниз (див. рисунок).



- 1) Областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел.
- 2) Множиною значень є проміжок $[-6; 0]$.
- 3) Функція парна.
- 4) Функція періодична з головним періодом 2π .
- 5) Нулі функції — числа виду $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 6) Функція від'ємна на кожному з проміжків виду $(-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
- 7) Функція зростає на кожному з проміжків виду $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$ і спадає на кожному з проміжків виду $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (6–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Відомо, що під час дихання легені людини весь час здійснюють коливальні рухи — розширюючись та стискаючись. За 40 секунд учень 10 класу зробив 14 повних дихальних циклів. Під час видиху обхват його грудної клітки становив $P_1 = 89$ см, а під час вдиху — $P_2 = 97$ см. Складіть функцію $P(t)$ залежності обхвату грудної клітки від часу дихання, якщо вважати, що коливання, які здійснюються, є гармонічними та змінюються за законом $P(t) = A \sin \omega t + P_c$, де A — амплітуда коливань (у см), яку можна обчислити за формулою $A = \frac{P_2 - P_1}{2}$, ω — частота коливань (у с^{-1}), P_c — середнє значення обхвату грудної клітки (у см), яке можна обчислити за формулою $P_c = \frac{P_2 + P_1}{2}$. Побудуйте графік зазначеної залежності. Складіть аналогічну функцію для себе чи для когось зі своїх однокласників/однокласниць.

Розв'язання. 1) Амплітуда коливань легенів: $A = \frac{P_2 - P_1}{2} = \frac{97 - 89}{2} = 4$ (см).

2) Середнє значення обхвату грудної клітки: $P_c = \frac{P_2 + P_1}{2} = \frac{97 + 89}{2} = 93$ (см).

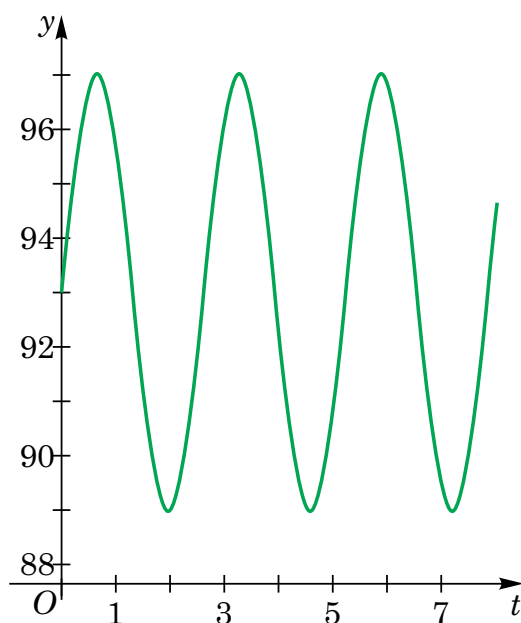
3) За 40 с учень зробив $n = 14$ вдихів. Обчислимо період коливань T :

$$T = \frac{t}{n} = \frac{40}{14} = 2,6 \text{ (с)}.$$

Обчислимо частоту коливань: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2,6} \approx \frac{12}{5} = 2,4 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$

Отже, функція $P(t)$ залежності обхвату грудної клітки від часу дихання: $P(t) = 4 \sin 2,4t + 93$.

Графік функції:



Відповідь. $P(t) = 4 \sin 2,4t + 93$.

Задача 2. Конкурсна задача. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = \sin^3 x - \sin^6 x + 1$.

Розв'язання. 1) Дану функцію можна подати як композицію двох функцій $y = f(g(x))$, де $f(x) = x - x^2 + 1$ та $g(x) = \sin^3 x$.

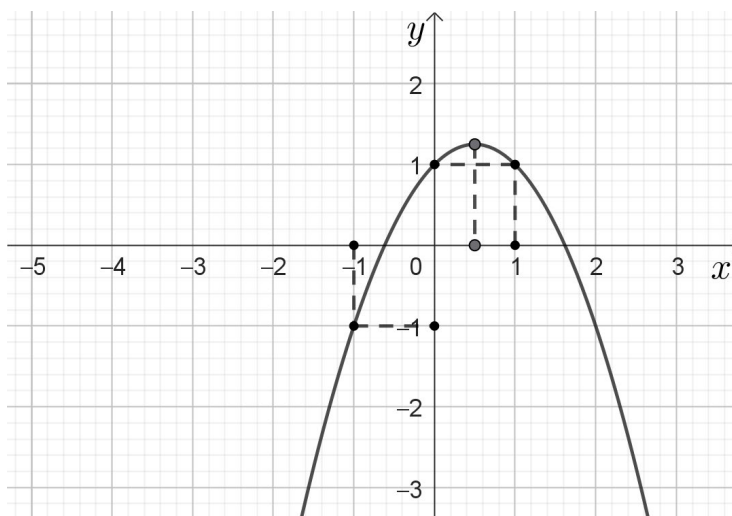
2) Множина $[-1; 1]$ є множиною значень функції $g(x) = \sin^3 x$, тому найменше і найбільше значення функції $y = \sin^3 x - \sin^6 x + 1$ збігається з найменшим і найбільшим значеннями функції $f(x) = x - x^2 + 1$ на відрізку $[-1; 1]$.

3) Знайдемо координати вершини параболи $f(x) = -x^2 + x + 1$:

$$x_0 = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}, \quad y_0 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4}.$$

Побудуємо схематично графік функції $f(x) = -x^2 + x + 1$ (див. рисунок).

Таким чином, найменше значення даної функції дорівнює -1 , а найбільше становить $\frac{5}{4}$.



Відповідь. $\frac{5}{4}$ та -1 .

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Укажіть найбільше й найменше значення та період функції:

1) $y = 2,6 \sin 3\pi x$;

$$2) \ y = 4 \cos\left(\frac{x}{3} - 1\right).$$

2. Побудуйте графік функції:

$$1) \ y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$2) \ y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$3) \ y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$$

4) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

3. Чим відрізняються графіки функцій:

1) $y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right);$

2) $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right);$

3) $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right);$

4) $y = 0,5 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)?$

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2 \sin |x - 1|;$

2) $y = \cos\left|x + \frac{\pi}{4}\right|.$

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin(|x| + 1);$

2) $y = -\cos\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right).$

6. Побудуйте графік функцій та визначте основні її властивості:

1) $y = |\sin x + 1|;$

2) $y = |\cos x - 1|;$

3) $y = |\sin x| + 1;$

4) $y = 1 - |\cos x|.$

Рівень В

1. Укажіть найбільше й найменше значення та період функції:

1) $y = -2 \sin\left(6 - \frac{\pi x}{2}\right);$

2) $y = -1,5 \cos\left(-5x - \frac{\pi}{6}\right).$

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = -2 \sin\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right);$

2) $y = 2 \cos(3|x| + 2).$

3. Побудуйте графік функції та визначте основні її властивості:

1) $y = \sin|x| + 1;$

2) $y = -\sin 2|x|;$

3) $y = 2 \sin|x| + 2;$

4) $y = \cos 3|x|.$

4. Побудуйте графік функції та визначте основні її властивості:

1) $y = |\sin 3x|;$

2) $y = \left|\operatorname{tg} \frac{1}{2}x\right|;$

3) $y = |\operatorname{ctg} 2x|;$

4) $y = |\cos 3x|.$

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|;$

2) $y = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|;$

3) $y = \left|\cos x - \frac{1}{2}\right|;$

4) $y = \left|\sin x - \frac{1}{3}\right|.$

6. Побудуйте графік функції та визначте основні її властивості:

1) $y = \sin\left(|x| - \frac{\pi}{3}\right) + 1;$

2) $f(x) = \cos\left(|x| + \frac{\pi}{4}\right);$

3) $y = 3 \cos|x| - 3;$

4) $f(x) = |1 - \cos 3x|.$

7. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|3 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1\right|;$

2) $y = \left|\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - 1\right|.$

8. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$;

2) $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$;

3) $y = \cos x - |\cos x|$;

4) $y = |\sin x| - \sin x$.

9. Установіть графічно кількість коренів рівняння $\cos x = \frac{|x|}{4\pi}$.

10. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2 \sin 3x + 1$;

2) $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{3}{2}$;

3) $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$;

4) $y = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

11. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2 \cos 4x + \frac{3}{2}$;

2) $y = -3 \cos\left(x - \frac{\pi}{5}\right) + 1$;

3) $y = \frac{3}{2} \cos\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$;

4) $y = 2 \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$.

12. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $\cos \sqrt{a^2 - x^2} = 1$ має рівно вісім коренів.

Рівень С

1. Побудуйте графік та вкажіть найбільше й найменше значення та період функції:

1) $y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$;

4) $y = 0,5 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

2. Побудуйте графік функції та вкажіть її основні властивості:

1) $y = \left| \cos\left|2x - \frac{\pi}{3}\right| \right|$;

2) $y = 3|\cos|3x - 1|| - 1$;

3) $y = 2\left| \sin\left|\frac{1}{2}x - 1\right| \right|$;

4) $y = \left| \sin\left|\frac{1}{2}x + 1\right| \right|$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2 \cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right) - 2$;

2) $y = -\frac{1}{2} \cos\left(3|x| - \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Побудуйте графік функції:

1) $y = -2 \sin\left(|x| + \frac{3\pi}{4}\right) + 2$;

2) $y = \frac{1}{2} \sin\left(|x| - \frac{\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}$;

3) $y = \cos\left(|x| + \frac{2\pi}{3}\right) - 2$;

4) $y = \cos\left(4|x| - \frac{2\pi}{3}\right) - 1$.

5. Побудуйте графік функції:

1) $y = \left| 1 - 2 \cos\left(\frac{|x|}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) \right|$;

2) $y = \left| \frac{1}{3} \sin\left(\frac{2}{3}|x| - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{3} \right|$.

6. Побудуйте графік функції:

1) $y = [\sin x]$;

2) $y = \sin[x]$;

3) $y = \cos x + [\cos x]$;

4) $y = \{\cos x\}$.

7. Творче завдання. Напишіть програму, яка демонструє побудову графіків тригонометричних функцій виду $y = A \sin(kx + b)$, $y = A \cos(kx + b)$ через поетапні геометричні перетворення.

VIII. Рефлексія (2 хв)

1. Я вмію будувати графіки функцій виду $y = A \sin(kx + b)$ та $y = A \cos(kx + b)$.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю, як впливають коефіцієнти графіків функцій виду $y = A \sin(kx + b)$ та $y = A \cos(kx + b)$ на їхній загальний вигляд.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я знаю, як зміниться вигляд графіка функції, якщо взяти її по модулю.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я знаю, як зміниться вигляд графіка функції, якщо взяти по модулю її аргумент.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

5. Я вмію досліджувати основні властивості тригонометричних функції за допомогою графіків.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

1. Коливання математичного маятника.

2. Комп'ютерне моделювання графіків функцій виду $y = A \sin(kx + b)$ і $y = A \cos(kx + b)$.

3. Перетворення графіків тригонометричних функцій в біології та в медицині.

4. Анімація геометричних перетворень при побудові графіків тригонометричних функцій.

5. Застосування модуля у тригонометричних функцій для створення візерунків та орнаментів.