

10

Тема 4. Тригонометричні функції

Урок 13. Гармонічні коливання

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

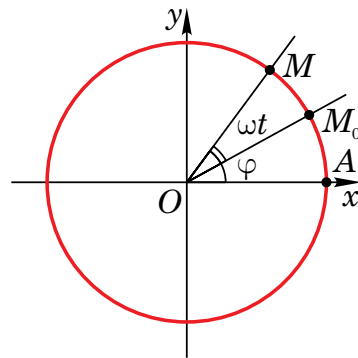
- 1) вивчите означення гармонічних коливань і з'ясуєте, де вони застосовуються;
- 2) дізнаєтесь, що таке амплітуда гармонічного коливання і навчитесь її визначати;
- 3) уведете поняття періоду гармонічного коливання та навчитесь його знаходити;
- 4) дізнаєтесь, що таке частота гармонічного коливання та її зв'язок з періодом;
- 5) вивчите означення циклічної частоти гармонічного коливання;
- 6) дізнаєтесь, що таке фаза та початкова фаза гармонічного коливання;
- 7) навчитесь використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть найбільше значення функції $y = 0,3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.
2. Знайдіть головний період функції $y = 3 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$.
3. Зростає чи спадає функція $y = \sin x$ на проміжку $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$?
4. Обчисліть: $\sin\left(-\frac{17}{4}\pi\right)$.
5. Визначте знак добутку $\operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 2 \cdot \cos 1$.

III. Означення й застосування гармонічних коливань

Нехай точка M рухається по колу з радіусом A в додатному напрямі зі сталою кутовою швидкістю ω радіанів за секунду (див. рисунок). Якщо в початковий момент часу (тобто коли $t = 0$) точка M займала положення M_0 , яке визначається кутом φ , то через t секунд вона займе деяке положення M , яке визначається кутом $\omega t + \varphi$. Абсциса точки M дорівнює $A \cos(\omega t + \varphi)$, а ордината — $A \sin(\omega t + \varphi)$.

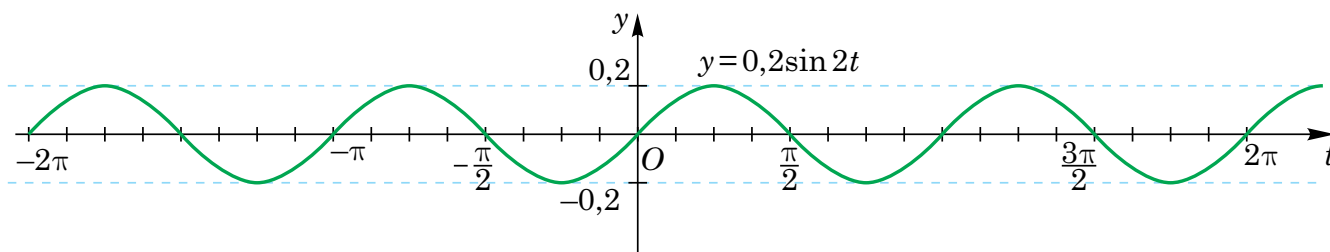


Формули $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ та $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ визначають змінну y як функцію часу t . Це і є формули гармонічного коливання. У формулах y є значенням функції, t — аргумент, а числа A , ω і φ — сталі, які називають: A — амплітуда коливання, φ — початкова фаза коливання, ω — кутова швидкість (циклічна частота), $\omega t + \varphi$ — фаза коливання.

Коливальні процеси широко поширені в природі та в техніці, а саме: вібрація напруженої струни, рух поршня двигуна та ножів косарки, добові й річні зміни температури повітря, морські припливи й відпливи, коливання водної поверхні, биття серця, дихання, тепловий рух іонів у кристалічній ґратці твердого тіла, змінний струм і його електромагнітне поле, рух електронів в атомі, рух годинникового маятника.

Приклад 1. Напишіть рівняння гармонічного коливання $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, якщо амплітуда коливань дорівнює 0,2 м, а циклічна частота дорівнює 2 рад/с. Побудуйте графік цього коливання.

Розв'язання. Оскільки $A = 0,2$, $\omega = 2$, то $y = 0,2 \sin 2t$ — шукане гармонічне коливання. Графік побудовано на рисунку.



Історична довідка

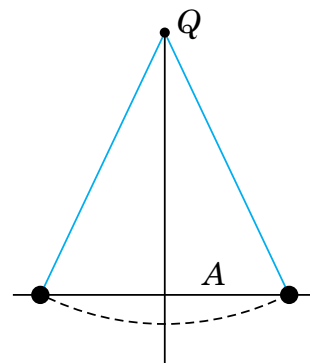
Розділ математики, який вивчає гармонічні коливання, називають «Гармонічний аналіз».

Гармонічний аналіз зародився в середині XVIII ст. при розв'язуванні задачі про коливання струни. Важливий внесок у розвиток гармонічного аналізу зробив Ж. Б. Фур'є на початку XIX ст. Самостійною математичною дисципліною гармонічний аналіз став у кінці XIX ст. — початку XX ст. В подальшому виявилися тісні зв'язки гармонічного аналізу із загальними проблемами теорії функцій та функціонального аналізу. Методи гармонічного аналізу використовуються в багатьох галузях математики, а також фізики і техніки.

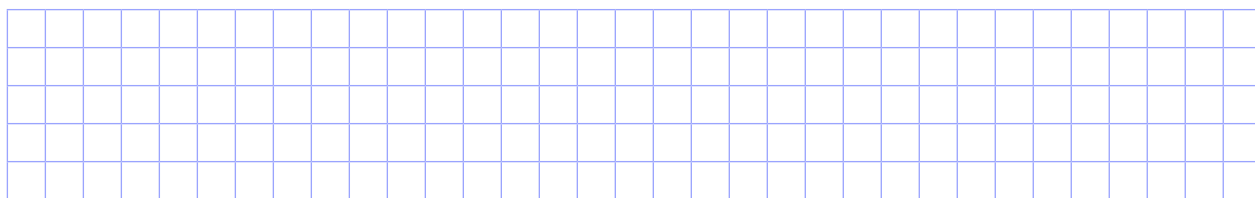
IV. Амплітуда коливань

Амплітуда коливань — це фізична величина, яка дорівнює максимальному відхиленню матеріальної точки від положення рівноваги під час коливань.

Амплітуду коливань, як правило, позначають символом A . Амплітуда визначається в лінійних одиницях довжини (див. рисунок).



Приклад 2. Координата рухомого тіла, виражена в сантиметрах, змінюється за вказаним законом. Знайдіть амплітуду, період, циклічну частоту та початкову фазу коливання. Визначте координату тіла на момент часу t_1 , якщо $x(t) = 5 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, $t_1 = 4,5$ с.



V. Період коливання

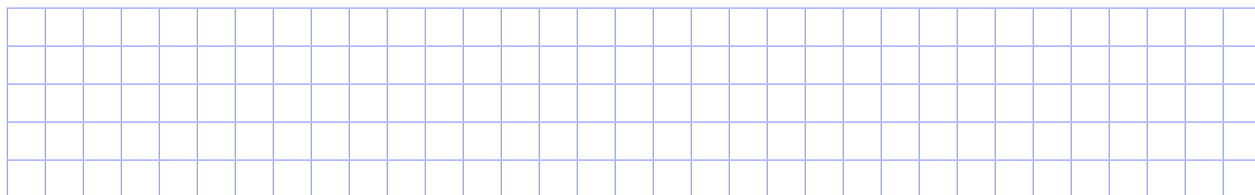
Період коливань — це фізична величина, яка дорівнює часу одного коливання.

В системі СІ вимірюється в секундах.

Період коливань позначають символом T .

Період гармонічного коливання визначається в секундах. Він обернено пропорційний кутовій швидкості відповідного обертання і не залежить ні від амплітуди, ні від початкової фази коливання.

Приклад 3. Укажіть амплітуду A і період T гармонічного коливання, яке задається функцією $y = -3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right)$.



VI. Циклічна частота

Частота коливань — це фізична величина, яка дорівнює кількості коливань за одиницю часу. В системі СІ вимірюється в Герцах (Гц), де $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$.

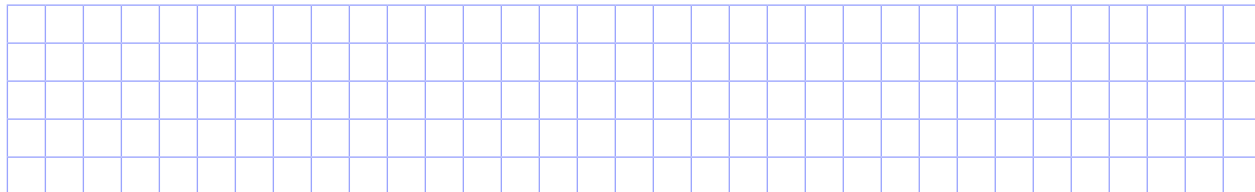
Частоту коливань позначають літерою ν (ню).

Циклічна частота (або кутова швидкість) — це фізична величина, яка характеризує швидкість зміни фази періодичного процесу. Вона показує кількість коливань за 2π одиниць часу. В системі СІ вимірюється в рад/с (радіан за секунду).

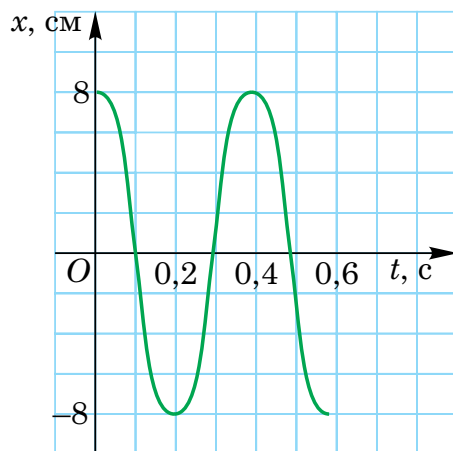
Циклічну частоту позначають літерою ω (омега).

Корисні формули: $T = \frac{1}{\nu}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = 2\pi\nu$.

Приклад 4. Тіло здійснює коливання з періодом 2 с. Чому дорівнює циклічна частота коливань?



Приклад 5. За графіком руху тіла (див. рисунок), яке здійснює гармонічні коливання, визначте амплітуду, період та частоту коливань.



VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Заряд q на пластинах конденсатора коливального контуру змінюється з часом відповідно до рівняння $q = 10^{-6} \cos 10^4 \pi t$. Знайдіть амплітуду коливань заряду, період і частоту коливань у контурі.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Укажіть амплітуду гармонічного коливання, заданого формулою $y = -5 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.
2. Укажіть частоту гармонічного коливання, заданого формулою $y = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.
3. На скільки одиниць і в якому напрямі вздовж осі Ox зміщений графік функції $y = -5 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ щодо графіка функції $y = -5 \sin 3x$?

4. Укажіть амплітуду і циклічну частоту гармонічного коливання:

$$1) \ y = 2,6 \sin 3\pi x; \qquad 2) \ y = 4 \cos\left(\frac{x}{3} - 1\right).$$

5. Побудуйте графік гармонічного коливання:

$$1) \ y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right); \quad 2) \ y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right); \quad 3) \ y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right); \quad 4) \ y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

6. Яка відмінність між гармонічними коливаннями:

$$\begin{array}{ll} 1) \ y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right); & 2) \ y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right); \\ 3) \ y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right); & 4) \ y = 0,5 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)? \end{array}$$

Рівень В

1. Укажіть амплітуду й циклічну частоту гармонічного коливання:

$$1) \ y = -2 \sin\left(6 - \frac{\pi x}{2}\right); \qquad 2) \ y = -1,5 \cos\left(-5x - \frac{\pi}{6}\right).$$

2. Електричний струм, який живить міську освітлювальну мережу, є змінним струмом. Його сила I постійно змінюється, здійснюючи гармонічне коливання

$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$, де I_0 — максимальне значення сили струму, T — період коливання, φ — початкова фаза коливання. У які моменти часу сила струму досягає мінімального або максимального значень і, коли його значення дорівнює нулю?

3. Для функції $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ назвіть амплітуду, циклічну частоту й початкову фазу гармонічного коливання. У якому напрямі і на скільки одиниць зміщений графік заданої функції щодо графіка функції $y = 2\sin 3x$?

4. Побудуйте графік функцій $y = f(x)$, де y — координата тіла, x — час коливальних рухів, задану рівнянням:

$$1) \ y = \cos 2x; \qquad 2) \ y = 2 \cos \frac{1}{2} x.$$

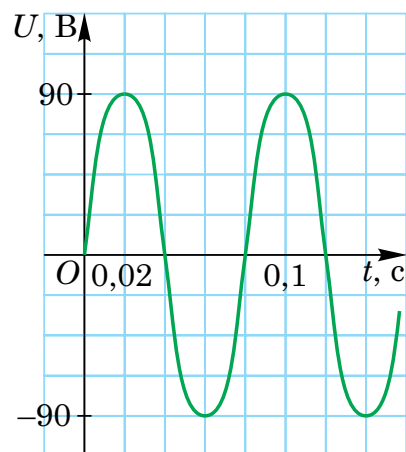
Визначте амплітуду, період, циклічну частоту коливань.

5. Коливання кульки, прикріпленої до пружини описується рівнянням $y = 0,3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$. Визначте початкову фазу коливання, циклічну частоту й період коливання кульки.

6. Координати тіла, виміряні в метрах, змінюються з часом за законом $y = 0,5 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Чому дорівнює амплітуда коливань тіла? Визначте координату тіла в момент часу:

$$1) \ t = 0; \qquad 2) \ t = \frac{1}{12}T; \qquad 3) \ t = \frac{1}{3}T.$$

- 7.** Сила струму у відкритому коливальному контурі змінюється за законом $I(t) = 0,1 \cos 6 \cdot 10^5 \pi t$. Визначте максимальне значення сили струму та її значення для фази $\varphi = \frac{1}{3} \pi$.
- 8.** Знайдіть амплітуду, період і частоту сили струму, якщо вона змінюється за законом (сила струму виміряна в амперах, час — у секундах):
 1) $I(t) = 0,25 \sin 50 \pi t$; 2) $I(t) = 5 \sin 20 \pi t$;
 3) $I(t) = 0,5 \sin 10 \pi t$; 4) $I(t) = 3 \sin 30 \pi t$.
- 9.** Знайдіть амплітуду, період і частоту напруги, якщо вона змінюється за законом (напруга виміряна у вольтах, час — у секундах):
 1) $U(t) = 220 \cos 60 \pi t$; 2) $U(t) = 110 \cos 30 \pi t$;
 3) $U(t) = 360 \cos 20 \pi t$; 4) $U(t) = 180 \cos 45 \pi t$.
- 10.** У який найближчий момент часу t ($t > 0$), рахуючи від початку руху, зсув точки, що здійснює гармонічні коливання за законом $x(t) = 5 \cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$:
 1) максимальний; 2) дорівнює 2,5; 3) дорівнює 0; 4) дорівнює 5?
- 11.** Сила змінного електричного струму задана функцією $I(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. Побудуйте графік функції, якщо:
 1) $A = 2$; $\omega = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 2) $A = 1$; $\omega = 2$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 12.** За графіком (див. рисунок) визначте амплітуду сили струму (або напруги), період коливання. Запишіть закон залежності сили струму (або напруги) від часу.



Рівень С

- 1.** Побудуйте графік гармонічного коливання та укажіть його амплітуду, фазу, початкову фазу, циклічну частоту та період цього коливання:
 1) $y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$;
 3) $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $y = 0,5 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

- 2.** Побудуйте графік гармонічного коливання та укажіть його амплітуду, фазу, початкову фазу, циклічну частоту та період цього коливання:
- 1) $y = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$;
- 3) $y = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $y = 0,5 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.
- 3.** Дано рівняння гармонічного коливання $y(t) = 3 \sin 2t$. Знайдіть проміжки зростання і спадання.
- 4.** Складіть рівняння гармонічних коливань, якщо за 1 хвилину відбувається 3600 коливань. Амплітуда дорівнює 8 см.
- 5.** Складіть закон гармонічних коливань для точки, якщо амплітуда її коливань становить 5 см, а період коливань дорівнює 1 с.
- 6.** Запишіть закон руху матеріальної точки, якщо відомо, що за проміжок часу 1 хв вона здійснила 90 коливань з амплітудою 5 см, а в початковий момент часу $t_0 = 0$ точка рухалась у додатному напрямку осі Ox і її зміщення становило 2 см.
- 7. Творче завдання.** Напишіть програму, яка моделює гармонічні коливання за заданими параметрами.

Рефлексія

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, що таке гармонічні коливання і де вони застосовуються. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю, що таке амплітуда гармонічного коливання і умію її визначати. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, що таке період гармонічного коливання та умію його знаходити. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, що таке частота гармонічного коливання та її зв'язок з періодом. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, що таке циклічна частота гармонічного коливання. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю, що таке фаза та початкова фаза гармонічного коливання. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Дослідження гармонічних коливань на прикладі пружинного маятника.
2. Моделювання акустичних коливань.
3. Математичне моделювання гармонічних коливань в середовищі Geogebra чи Desmos.
4. Гармонічні коливання в біології та в медицині.
5. Маятник Фуко та його коливання.
6. Порівняння механічних та електромагнітних коливань.







