



Тема 4.

Тригонометричні функції

Урок 13. Гармонічні коливання

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення й застосування гармонічних коливань.
2. Амплітуда коливань.
3. Період коливання.
4. Циклічна частота.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

аналізує результати дій із математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям завдання на повторення. Оберіть ті завдання, які найдодільніші, на ваш погляд.
- 3) Сформулюйте практичну задачу, розв'язати яку надайте можливість учням/ученицям наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) Порадьте учням/ученицям ознайомитися з історичними відомостями як частину домашнього завдання.

6) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.

7) Обирайте кількість матеріалу та його зміст на власний розсуд.

8) Заплануйте виконання останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичної задачі та тренувальних вправ як важливі компоненти формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можна описати ритм серця людини гармонічними коливаннями?

2) Чому знання про гармонічні коливання важливі для створення сучасної електроніки?

3) Чому у фізиці вивчення гармонічних коливань є ключем до розуміння багатьох явищ природи?

4) Чому радіо, мобільний зв'язок і Wi-Fi не можуть існувати без гармонічних коливань?

5) Що спільного між маятником годинника та електричним колом зі змінним струмом?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть найбільше значення функції $y = 0,3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь. 0,3.

2. Знайдіть головний період функції $y = 3 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Відповідь. 1.

3. Зростає чи спадає функція $y = \sin x$ на проміжку $\left[2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$?

Відповідь. Зростає.

4. Обчисліть: $\sin\left(-\frac{17}{4}\pi\right)$.

Відповідь. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Визначте знак добутку $\operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 2 \cdot \cos 1$.

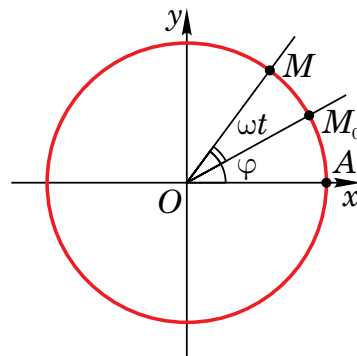
Відповідь. $\operatorname{tg} 3 \cdot \operatorname{ctg} 2 \cdot \cos 1 > 0$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Заряд q на пластинах конденсатора коливального контуру змінюється з часом відповідно до рівняння $q = 10^{-6} \cos 10^4 \pi t$. Знайдіть амплітуду коливань заряду, період і частоту коливань у контурі.

III. Означення й застосування гармонічних коливань

Нехай точка M рухається по колу з радіусом A в додатному напрямі зі сталою кутовою швидкістю ω радіанів за секунду (див. рисунок). Якщо в початковий момент часу (тобто коли $t = 0$) точка M займала положення M_0 , яке визначається кутом φ , то через t секунд вона займе деяке положення M , яке визначається кутом $\omega t + \varphi$. Абсциса точки M дорівнює $A \cos(\omega t + \varphi)$, а ордината — $A \sin(\omega t + \varphi)$.



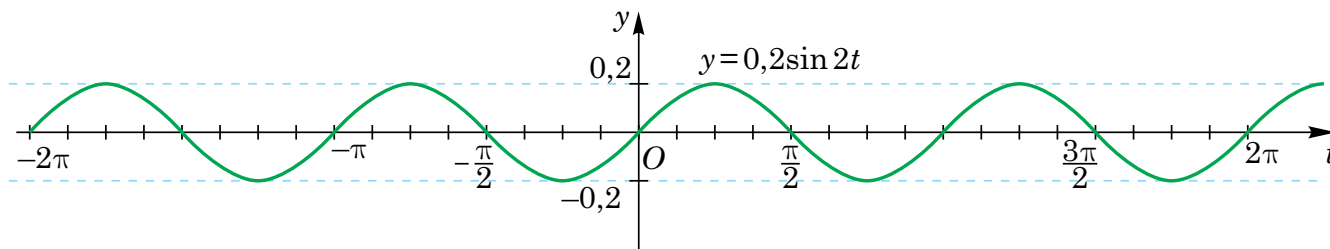
Формули $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ та $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ визначають змінну y як функцію часу t . Це і є формули гармонічного коливання. У формулах y є значенням функції, t — аргумент, а числа A , ω і φ — сталі, які називають: A — амплітуда коливання, φ — початкова фаза коливання, ω — кутова швидкість (циклічна частота), $\omega t + \varphi$ — фаза коливання.

Коливальні процеси широко поширені в природі та в техніці, а саме: вібрація натягнутої струни, рух поршня двигуна та ножів косарки, добові й річні зміни температури повітря, морські припливи й відпливи, коливання водної поверхні, биття серця, дихання, тепловий рух іонів у кристалічній ґратці твердого тіла, змінний струм і його електромагнітне поле, рух електронів в атомі, рух годинникового маятника.

Ілюстративний приклад

6. Напишіть рівняння гармонічного коливання $y = A \sin(\omega t + \varphi)$, якщо амплітуда коливань дорівнює 0,2 м, а циклічна частота дорівнює 2 рад/с. Побудуйте графік цього коливання.

Розв'язання. Оскільки $A = 0,2$, $\omega = 2$, то $y = 0,2 \sin 2t$ — шукане гармонічне коливання. Графік побудовано на рисунку.



Історична довідка

Розділ математики, який вивчає гармонічні коливання, називають «Гармонічний аналіз».

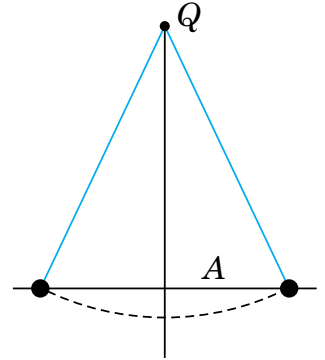
Гармонічний аналіз зародився в середині XVIII ст. при розв'язуванні задачі про коливання струни. Важливий внесок у розвиток гармонічного аналізу зробив

Ж. Б. Фур'є на початку XIX ст. Самостійною математичною дисципліною гармонічний аналіз став у кінці XIX ст. — початку XX ст. В подальшому виявилися тісні зв'язки гармонічного аналізу із загальними проблемами теорії функцій та функціонального аналізу. Методи гармонічного аналізу використовуються в багатьох галузях математики, а також фізики і техніки.

IV. Амплітуда коливань

Амплітуда коливань — це фізична величина, яка дорівнює максимальному відхиленню матеріальної точки від положення рівноваги під час коливань.

Амплітуду коливань, як правило, позначають символом A . Амплітуда визначається в лінійних одиницях довжини (див. рисунок).



Ілюстративний приклад

7. Координата рухомого тіла, виражена в сантиметрах, змінюється за вказаним законом. Знайдіть амплітуду, період, циклічну частоту та початкову фазу коливання.

Визначте координату тіла на момент часу t_1 , якщо $x(t) = 5 \cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, $t_1 = 4,5$ с.

Розв'язання. $A = 5$ см = 0,05 м, $\omega = 3\pi$ рад/с, $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$.

Тоді $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$ (с).

Отже, $x(t_1) = 5 \cos\left(3\pi \cdot 4,5 + \frac{\pi}{6}\right) = 2,5$ (см).

V. Період коливання

Період коливань — це фізична величина, яка дорівнює часу одного коливання.

В системі СІ вимірюється в секундах.

Період коливань позначають символом T .

Період гармонічного коливання визначається в секундах. Він обернено пропорційний кутовій швидкості відповідного обертання і не залежить ні від амплітуди, ні від початкової фази коливання.

Ілюстративний приклад

8. Укажіть амплітуду A і період T гармонічного коливання, яке задається функцією

$$y = -3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right).$$

Розв'язання. Можна записати: $y = -3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) = 3 \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Отже, $A = 3$, $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь. $A = 3$, $T = \frac{\pi}{2}$.

VI. Циклічна частота

Частота коливань — це фізична величина, яка дорівнює кількості коливань за одиницю часу. В системі СІ вимірюється в Герцах (Гц), де $1\text{ Гц} = 1\text{ с}^{-1}$.

Частоту коливань позначають літерою ν (ню).

Циклічна частота (або кутова швидкість) — це фізична величина, яка характеризує швидкість зміни фази періодичного процесу. Вона показує кількість коливань за 2π одиниць часу. В системі СІ вимірюється в рад/с (радіан за секунду).

Циклічну частоту позначають літерою ω (омега).

Корисні формули: $T = \frac{1}{\nu}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\omega = 2\pi\nu$.

Ілюстративні приклади

9. Тіло здійснює коливання з періодом 2 с. Чому дорівнює циклічна частота коливань?

Розв'язання. Оскільки $T = \frac{2\pi}{\omega}$, то $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ (рад/с).

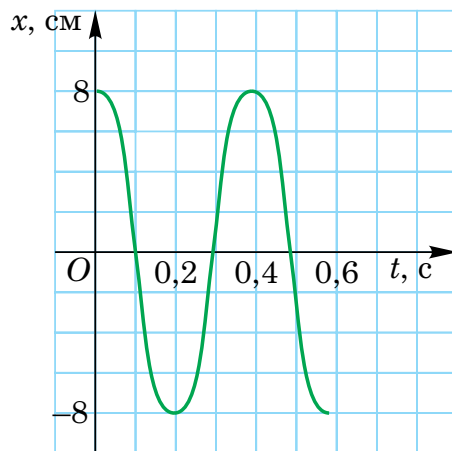
Відповідь. π рад/с.

10. За графіком руху тіла (див. рисунок), яке здійснює гармонічні коливання, визначте амплітуду, період та частоту коливань.

Розв'язання. Максимальна відстань, на яку відхиляється тіло від положення рівноваги під час коливання дорівнює 8 см, тому $A = 0,08$ м.

Період $T = 0,4$ с. Частота $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,4} = 2,5$ (Гц).

Відповідь. $A = 0,08$ м, $T = 0,4$ с, $\nu = 2,5$ Гц.



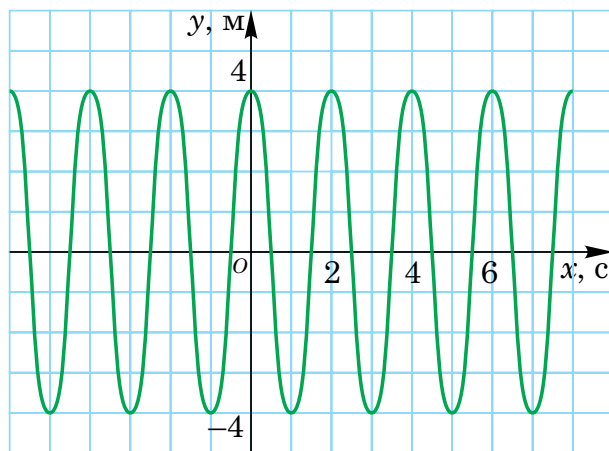
11. Камертон робить 4 коливання за 0,01 с. Яка частота коливань звукової хвилі в повітрі? Визначте період коливань камертона.

Розв'язання. Оскільки камертон здійснює 400 коливань за 1 с, то $\nu = 400$ Гц.

Тоді $T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{400} = 0,0025$ (с) — час, упродовж якого здійснюється одне повне коливання.

Відповідь. 400 Гц, 0,0025 с.

12. Тіло здійснює гармонічні коливання. За графіком (див. рисунок) залежності координати тіла від часу $y = f(x)$, визначте амплітуду, період і частоту коливань. Запишіть рівняння руху даного тіла.



Розв'язання. За графіком: $A = 4$ м, $T = 2$ с, $\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$ Гц, $\omega = 2\pi\nu = \pi$ (рад/с).

Тоді $y = 4 \cos \pi x$.

Відповідь. $A = 4$ м, $T = 2$ с, $\nu = \frac{1}{2}$ Гц, $\omega = \pi$ рад/с, $y = 4 \cos \pi x$.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (6–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Заряд q на пластинах конденсатора коливального контуру змінюється з часом відповідно до рівняння $q = 10^{-6} \cos 10^4 \pi t$. Знайдіть амплітуду коливань заряду, період і частоту коливань у контурі.

Розв'язання. Заряд на пластинах конденсатора коливального контуру є функцією від часу $q = f(t)$: $q = 10^{-6} \cos 10^4 \pi t$.

Тоді $A = 10^{-6}$ м — амплітуда коливань заряду,

$\omega = 10^4 \pi$ рад/с — циклічна частота,

$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10^4 \pi}{2\pi} = 5 \cdot 10^3$ Гц — частота коливань,

$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{5 \cdot 10^3} = 0,2 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-4}$ с — період коливань у контурі.

Відповідь. 10^{-6} м, $2 \cdot 10^{-4}$ с, $5 \cdot 10^3$ Гц.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Укажіть амплітуду гармонічного коливання, заданого формулою $y = -5 \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$.
2. Укажіть частоту гармонічного коливання, заданого формулою $y = 2 \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$.
3. На скільки одиниць і в якому напрямі вздовж осі Ox зміщений графік функції $y = -5 \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$ щодо графіка функції $y = -5 \sin 3x$?

4. Укажіть амплітуду і циклічну частоту гармонічного коливання:

1) $y = 2,6 \sin 3\pi x$;

$$2) \ y = 4 \cos\left(\frac{x}{3} - 1\right).$$

5. Побудуйте графік гармонічного коливання:

$$1) \ y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$2) \ y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$3) \ y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$$

4) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$

6. Яка відмінність між гармонічними коливаннями:

1) $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right);$

$$2) \ y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right);$$

3) $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right);$

4) $y = 0,5 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$?

Рівень В

1. Укажіть амплітуду й циклічну частоту гармонічного коливання:

$$1) \ y = -2 \sin \left(6 - \frac{\pi x}{2} \right);$$

$$2) \ y = -1,5 \cos\left(-5x - \frac{\pi}{6}\right).$$

2. Електричний струм, який живить міську освітлювальну мережу, є змінним струмом. Його сила I постійно змінюється, здійснюючи гармонічне коливання

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right), \text{ де } I_0 \text{ — максимальне значення сили струму, } T \text{ — період коли-}$$

вання, φ — початкова фаза коливання. У які моменти часу сила струму досягає мінімального або максимального значень і, коли його значення дорівнює нулю?

3. Для функції $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ назвіть амплітуду, циклічну частоту й початкову

фазу гармонічного коливання. У якому напрямі і на скільки одиниць зміщений графік заданої функції щодо графіка функції $y = 2 \sin 3x$?

4. Побудуйте графік функцій $y = f(x)$, де y — координата тіла, x — час коливальних рухів, задану рівнянням:

1) $y = \cos 2x$;

$$2) \ y = 2 \cos \frac{1}{2} x .$$

Визначте амплітуду, період, циклічну частоту коливань.

5. Коливання кульки, прикріпленої до пружини описується рівнянням

$y = 0,3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$. Визначте початкову фазу коливання, циклічну частоту й пе-

ріод коливання кульки.

6. Координати тіла, виміряні в метрах, змінюються з часом за законом

$y = 0,5 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Чому дорівнює амплітуда коливань тіла? Визначте координату

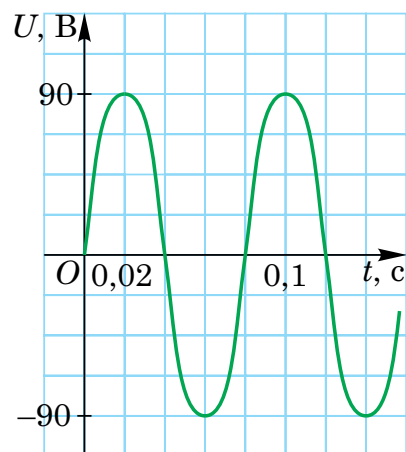
ту тіла в момент часу:

1) $t = 0$;

$$2) \quad t = \frac{1}{12} T;$$

$$3) \quad t = \frac{1}{3}T.$$

- 7.** Сила струму у відкритому коливальному контурі змінюється за законом $I(t) = 0,1 \cos 6 \cdot 10^5 \pi t$. Визначте максимальне значення сили струму та її значення для фази $\varphi = \frac{1}{3} \pi$.
- 8.** Знайдіть амплітуду, період і частоту сили струму, якщо вона змінюється за законом (сила струму виміряна в амперах, час — у секундах):
 1) $I(t) = 0,25 \sin 50 \pi t$; 2) $I(t) = 5 \sin 20 \pi t$;
 3) $I(t) = 0,5 \sin 10 \pi t$; 4) $I(t) = 3 \sin 30 \pi t$.
- 9.** Знайдіть амплітуду, період і частоту напруги, якщо вона змінюється за законом (напруга виміряна у вольтах, час — у секундах):
 1) $U(t) = 220 \cos 60 \pi t$; 2) $U(t) = 110 \cos 30 \pi t$;
 3) $U(t) = 360 \cos 20 \pi t$; 4) $U(t) = 180 \cos 45 \pi t$.
- 10.** У який найближчий момент часу t ($t > 0$), рахуючи від початку руху, зсув точки, що здійснює гармонічні коливання за законом $x(t) = 5 \cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$:
 1) максимальний; 2) дорівнює 2,5; 3) дорівнює 0; 4) дорівнює 5?
- 11.** Сила змінного електричного струму задана функцією $I(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. Побудуйте графік функції, якщо:
 1) $A = 2$; $\omega = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$; 2) $A = 1$; $\omega = 2$; $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
- 12.** За графіком (див. рисунок) визначте амплітуду сили струму (або напруги), період коливання. Запишіть закон залежності сили струму (або напруги) від часу.



Рівень С

- 1.** Побудуйте графік гармонічного коливання та укажіть його амплітуду, фазу, початкову фазу, циклічну частоту та період цього коливання:
 1) $y = 2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$;
 3) $y = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$; 4) $y = 0,5 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.
- 2.** Побудуйте графік гармонічного коливання та укажіть його амплітуду, фазу, початкову фазу, циклічну частоту та період цього коливання:
 1) $y = 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$;

$$3) y = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$4) y = 0,5 \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

3. Дано рівняння гармонічного коливання $y(t) = 3 \sin 2t$. Знайдіть проміжки зростання і спадання.
4. Складіть рівняння гармонічних коливань, якщо за 1 хвилину відбувається 3600 коливань. Амплітуда дорівнює 8 см.
5. Складіть закон гармонічних коливань для точки, якщо амплітуда її коливань становить 5 см, а період коливань дорівнює 1 с.
6. Запишіть закон руху матеріальної точки, якщо відомо, що за проміжок часу 1 хв вона здійснила 90 коливань з амплітудою 5 см, а в початковий момент часу $t_0 = 0$ точка рухалась у додатному напрямку осі Ox і її зміщення становило 2 см.
7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка моделює гармонічні коливання за заданими параметрами.

IX. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|----|--|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, що таке гармонічні коливання і де вони застосовуються. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю, що таке амплітуда гармонічного коливання і умію її визначати. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, що таке період гармонічного коливання та умію його знаходити. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, що таке частота гармонічного коливання та її зв'язок з періодом. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, що таке циклічна частота гармонічного коливання. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю, що таке фаза та початкова фаза гармонічного коливання. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Дослідження гармонічних коливань на прикладі пружинного маятника.
2. Моделювання акустичних коливань.
3. Математичне моделювання гармонічних коливань в середовищі Geogebra чи Desmos.

4. Гармонічні коливання в біології та в медицині.
5. Маятник Фуко та його коливання.
6. Порівняння механічних та електромагнітних коливань.