

Урок 3. Означення тригонометричних функцій довільного кута

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) з'ясуєте, що таке синус та косинус довільного кута;
- 2) вивчите основні властивості синуса і косинуса довільного кута;
- 3) з'ясуєте, що таке тангенс і котангенс довільного кута;
- 4) вивчите основні властивості тангенса і котангенса довільного кута;
- 5) навчитесь позначати синуси та косинуси на тригонометричному колі;
- 6) навчитесь визначати знаки тригонометричних функцій у кожній з координатних чвертей;
- 7) дізнаєтесь, як змінюються тригонометричні функції при збільшенні кута від 0 рад до 2π рад.
- 8) навчитесь використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

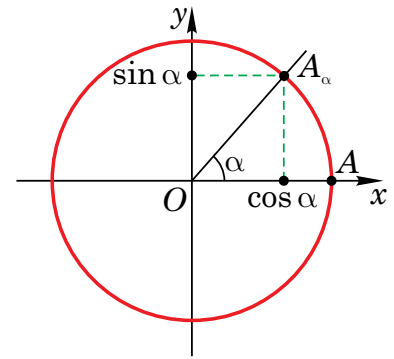
II. Повторення

1. Запишіть координати точки, що відповідають куту $\frac{\pi}{6}$ при повороті точки $A(1; 0)$ на цей кут.
2. В якій координатній чверті знаходиться точка, абсциса і ордината якої від'ємні числа?
3. Розв'яжіть рівняння $x^4 = 81$.
4. Спростіть вираз $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$.
5. Розв'яжіть нерівність $\frac{x-3}{x+4} \leq 0$.

III. Означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса

Тригонометричні функції — це важливі математичні поняття, які відіграють ключову роль у математиці, оскільки дозволяють не лише описувати співвідношення між сторонами та кутами трикутників й інших геометричних фігур, а також допомагають аналізувати періодичні процеси. Означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса можна розширити за допомогою тригонометричного кола. Це дає змогу застосовувати тригонометричні функції не тільки в геометрії, а й у фізиці, техніці, астрономії та в інших науках.

Означення. Ординату точки A_α , яка відповідає куту α повороту точки $A(1; 0)$, називають **синусом** кута α (позначають $\sin \alpha$), а абсцису точки A_α називають **косинусом** кута α (позначають $\cos \alpha$) (див. рисунок).



Властивості синуса та косинуса

1. Для будь-якого кута абсциса та ордината точки A_α не можуть бути більшими за 1 чи меншими від -1 , тому завжди будуть правильними такі нерівності: $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ та $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.
2. Кутам α та β , для яких виконується рівність $\alpha - \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка на тригонометричному колі, тому $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha$ і $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. Кутам α та $-\alpha$ відповідають точки на тригонометричному колі, симетричні відносно осі Ox , тому $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ та $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.
4. Кутам α та $\alpha + \pi$ відповідають діаметрально протилежні точки на тригонометричному колі, тобто точки, симетричні відносно початку координат, тому $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ і $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$.
5. Оскільки координати усіх точок, які належать тригонометричному колу, задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$, то: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Означення. Тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

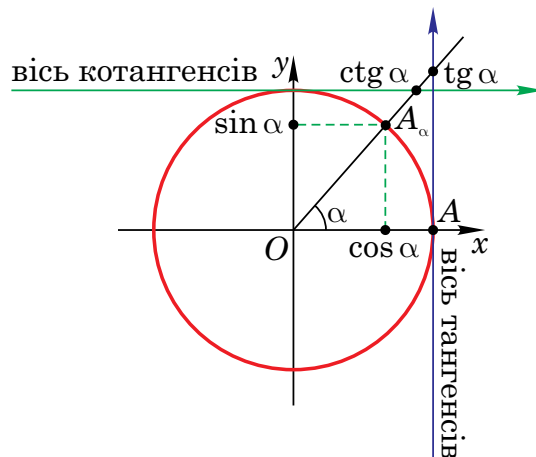
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Котангенсом кута α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Безпосередньо з означень тангенса та котангенса випливає, що для будь-якого кута α , такого, що $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, є правильними рівності:

- 1) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$;
- 2) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$;
- 3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$.

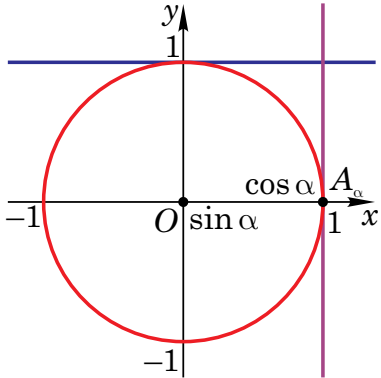
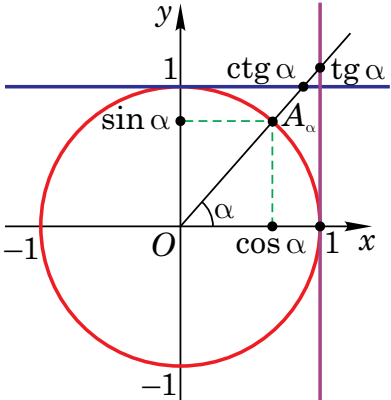
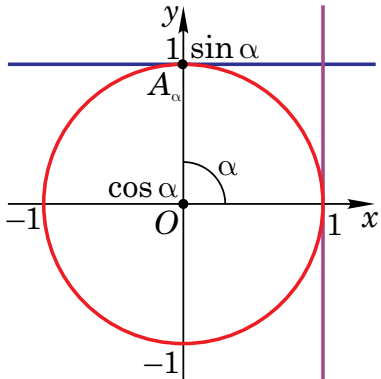
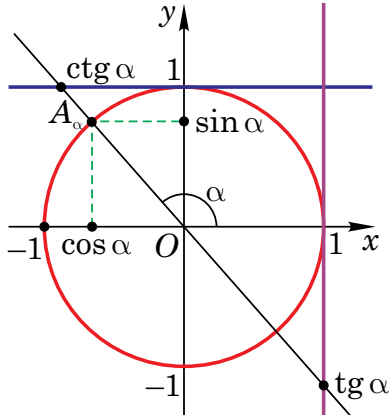


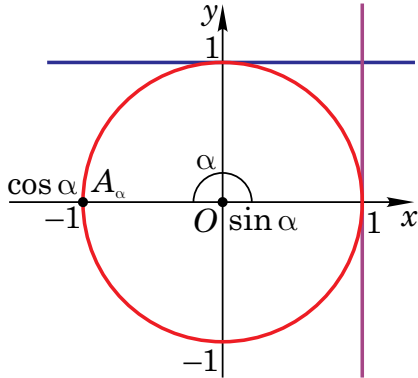
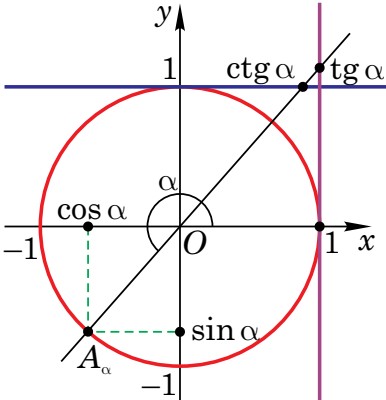
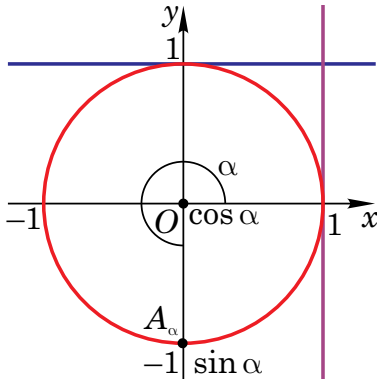
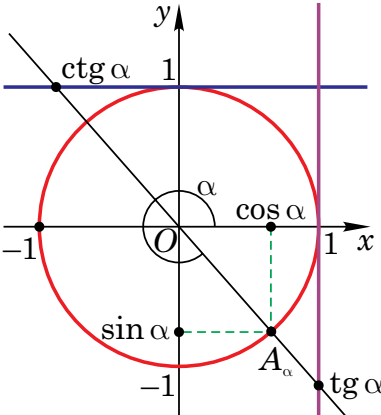
Запишемо рівняння прямої OA_α , $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Оскільки ця пряма не вертикальна і завжди проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд $y = kx$, де k — кутовий коефіцієнт цієї прямої (див. рисунок).

Оскільки пряма проходить через точку $A_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha)$, то $\sin \alpha = k \cos \alpha$, звідси $k = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$. Тобто рівняння прямої $y = (\operatorname{tg} \alpha) \cdot x$. Пряма $y = (\operatorname{tg} \alpha) \cdot x$ перетинає пряму $x = 1$ у точці з координатами $(1; \operatorname{tg} \alpha)$, а пряму $y = 1$ — у точці $(\operatorname{ctg} \alpha; 1)$ (див. рисунок).

Властивості тангенса й котангенса

№	Властивість	Доведення
1.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.	$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$
2.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$.	$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$
3.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi)$	$\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \frac{\sin(\alpha - \pi)}{\cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$ $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$
4.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi)$	$\operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \frac{\cos(\alpha - \pi)}{\sin(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$ $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \frac{\cos(\alpha + \pi)}{\sin(\alpha + \pi)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$

Кут (у рад)	Рисунок	Пояснення
0		$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{ctg} 0$ — не існує.
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		При збільшенні кута α від 0 до $\frac{\pi}{2}$: — косинус зменшується від 1 до 0; — синус збільшується від 0 до 1; — тангенс збільшується від 0 до $+\infty$; — котангенс зменшується від $+\infty$ до 0.
$\frac{\pi}{2}$		$\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ — не існує, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$.
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$		При збільшенні кута α від $\frac{\pi}{2}$ до π : — косинус зменшується від 0 до -1; — синус зменшується від 1 до 0; — тангенс збільшується від $-\infty$ до 0; — котангенс зменшується від 0 до $-\infty$.

Кут (у рад)	Рисунок	Пояснення
π		$\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, $\operatorname{tg} \pi = 0$, $\operatorname{ctg} \pi$ — не існує.
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$		При збільшенні кута α від π до $\frac{3\pi}{2}$: — косинус збільшується від -1 до 0 ; — синус зменшується від 0 до -1 ; — тангенс збільшується від 0 до $+\infty$; — котангенс зменшується від $+\infty$ до 0 .
$\frac{3\pi}{2}$		$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$ — не існує, $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} = 0$.
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$		При збільшенні кута α від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π : — косинус збільшується від 0 до 1 ; — синус збільшується від -1 до 0 ; — тангенс збільшується від $-\infty$ до 0 ; — котангенс зменшується від 0 до $-\infty$.

Дослідити властивості тригонометричних функцій довільного кута можна за допомогою Geogebra-аплету:

<https://www.geogebra.org/m/xpx8a2tq>



Приклад 5. Знайдіть найбільше й найменше значення, яких може набувати вираз $1 - 4 \cos \alpha$.

Розв'язання. $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, $-4 \leq -4 \cos \alpha \leq 4$,
 $-4 + 1 \leq -4 \cos \alpha + 1 \leq 4 + 1$, $-3 \leq -4 \cos \alpha + 1 \leq 5$.

Отже, найбільше значення виразу дорівнює 5, а найменше: -3 .

Відповідь. 5 та -3 .

Історична довідка

Тригонометрія — це розділ математики, що виник ще в стародавні часи. Її розвиток зумовлений потребами астрономії. Саме в астрономії сферична тригонометрія з'явилася раніше, ніж геометрія на площині. Перші знання з тригонометрії з'явилися у Вавилоні та Стародавньому Єгипті, де жреці використовували їх для вимірювання земельних ділянок і передбачення астрономічних явищ.

Давньогрецький математик Гіппарх (II ст. до н. е.) вважається засновником тригонометрії. Він створив перші таблиці хорд, які є прообразом сучасних тригонометричних функцій. Надалі тригонометрію розвивали Клавдій Птолемей, Аріабхата та Бхаскара в Індії, а також перські й арабські вчені — Аль-Баттані та Омар Хаям.

У середньовічній Європі тригонометрія набула значного поширення завдяки працям арабських учених, перекладених латиною.

Назви ліній синуса і косинуса вперше були введені індійськими вченими. Також вони склали перші таблиці синусів, хоча ці таблиці були менш точними, ніж таблиці Птолемея. З Індії бере свій початок учення про тригонометричні величини. Таке вчення називали «гоніометрією» (від «гоніо» — кут, «метрію» — вимірювати), яка й отримала пізніше назву «тригонометрія».

У сьогоденні тригонометрія використовується не лише в математиці, а й у фізиці, інженерії, навігації, комп'ютерній графіці та в багатьох інших сферах.

1) Що таке «рубай»?

2) Хто написав такі рядки:

«Ти до зла не хились, а роби лиш добро!

Бо не зло тобі друг, а добро, лиш добро.

Якщо зло і добро тобі в друзі прибились,

Вибирай однозначно — добро, лиш добро!»?

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Пілот винищувача проходить тренування на центрифугі, яка обертається

з постійною кутовою швидкістю $\omega = \frac{2\pi}{3}$ рад/с. Він сидить у кабіні, яка закріплена

на кінці важеля довжиною, що дорівнює радіусу R обертання центрифуги, де $R = 7$ м. Початкове положення пілота відповідає точці $(R; 0)$ у декартовій системі координат, а центр центрифуги збігається з початком координат. Знайдіть загальні рівняння, за якими можна знайти координати кабіни в цій системі координат, у будь-який момент часу t та обчисліть координати кабіни через 40 с після початку руху.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність

$$0 < \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < 1.$$

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Заповніть таблицю:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$						
$\cos \alpha$						
$\operatorname{tg} \alpha$						
$\operatorname{ctg} \alpha$						

2. Якщо кут належить трикутнику, то які тригонометричні функції цього кута можуть набувати від'ємних значень і коли саме?

3. Визначте знак кожного з добутків:

- 1) $\sin 101^\circ \cdot \sin 133^\circ$; 2) $\cos 211^\circ \cdot \sin 116^\circ$;
 3) $\operatorname{tg} 111^\circ \cdot \sin 180^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 300^\circ \cdot \sin 221^\circ$.

4. Визначте знак різниці:

- 1) $\sin 123^\circ - \sin 132^\circ$; 2) $\cos 35^\circ - \cos 40^\circ$;
 3) $\operatorname{tg} 220^\circ - \operatorname{tg} 217^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 304^\circ - \operatorname{ctg} 316^\circ$.

5. Замініть вираз тотожно рівним йому, змінивши знак кута на протилежний:

- 1) $\cos(-15^\circ)$; 2) $\operatorname{ctg}(-235^\circ)$;
 3) $\operatorname{tg}(\alpha - 160^\circ)$; 4) $\sin(\alpha - 40^\circ)$.

6. Які знаки мають $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, якщо α дорівнює:

- 1) $\frac{\pi}{5}$; 2) $1,3\pi$; 3) $\frac{7}{16}\pi$; 4) $\frac{6}{17}\pi$?

Рівень В

1. Визначте, при яких значеннях x , таких, що $0 \leq x < 2\pi$, функція $y = \sin x - \cos x$:

- 1) дорівнює нулю; 2) набуває додатних значень;
 3) набуває від'ємних значень; 4) дорівнює 1.

2. Чи можуть тригонометричні функції половини кута трикутника бути від'ємними? Відповідь обґрунтуйте.

3. Спростіть вираз:

1) $\frac{a^2}{\sin 90^\circ} - 2ab \cdot \sin 180^\circ + \frac{b^2}{\sin 270^\circ}$; 2) $a^3 \cdot \operatorname{ctg} 270^\circ + b^3 \cdot \operatorname{tg} 90^\circ$.

4. Знайдіть найбільше і найменше значення, яких може набувати вираз $\frac{1}{4} + 2 \cos \alpha$.

5. Порівняйте:

1) $\sin 20^\circ$ і $\cos 20^\circ$; 2) $\sin 50^\circ$ і $\cos 50^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 40^\circ$ і $\operatorname{ctg} 40^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 50^\circ$ і $\operatorname{ctg} 50^\circ$.

6. Визначте знак кожного з добутків:

1) $\sin 119^\circ \cdot \cos 119^\circ \cdot \operatorname{tg} 119^\circ$; 2) $\cos 312^\circ \cdot \sin 312^\circ \cdot \operatorname{ctg} 312^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 111^\circ \cdot \operatorname{ctg} 182^\circ \cdot \sin 359^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 123^\circ \cdot \sin 321^\circ \cdot \cos 213^\circ$.

7. Визначте знак різниці:

1) $\sin 120^\circ - \sin 240^\circ$; 2) $\cos 20^\circ - \cos 120^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 31^\circ - \operatorname{ctg} 131^\circ$.

8. Визначте знак виразу:

1) $\sin 1 \cdot \cos(-1,5) \cdot \operatorname{tg} 4 \cdot \operatorname{ctg} 6,2$; 2) $\operatorname{ctg} 1,7 \cdot \sin(-2) \cdot \cos 6 \cdot \operatorname{tg} 2,5$.

9. Нехай $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Порівняйте з нулем число:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 3) $\cos(\pi + \alpha)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Розмістіть у порядку спадання числа: $\sin 0$, $\cos 0$, $\sin 1$, $\cos 1$, $\sin 2$, $\cos 3$.

11. Доведіть, що будь-яка хорда тригонометричного кола виражається подвоєним синусом половини центрального кута, який спирається на цю хорду.

12. Якщо сторона правильного десятикутника, вписаного в коло одиничного радіуса, дорівнює $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то обчисліть $\sin 18^\circ$.

Рівень С

1. Яких значень від 0° до 360° може набувати кут α , щоб виконувалось співвідношення $\cos 150^\circ > \cos \alpha$?

2. Знайдіть найбільше і найменше значення, яких може набувати вираз $10 - 7 \cos^2 \alpha$.

3. При яких значеннях x вираз $\frac{1}{1 - \cos x}$ набуває найменшого значення? Знайдіть це значення.

4. Не користуючись калькулятором, знайдіть значення виразу:

1) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}$; 2) $\sin \frac{17\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \frac{21\pi}{13}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{19\pi}{12} + 1$.

5. Порівняйте:

1) $\operatorname{tg} 1500^\circ$ і $\operatorname{tg} 1501^\circ$; 2) $\sin 1300^\circ$ і $\sin 1301^\circ$;
3) $\cos 1700^\circ$ і $\cos 1699^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 1750^\circ$ і $\operatorname{ctg} 1751^\circ$.

6. Визначте знак виразу:

1) $\cos 3\alpha$, якщо $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\operatorname{tg} 3\alpha$, якщо $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$;

3) $\sin \frac{\alpha}{4}$, якщо $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$;

4) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, якщо $2\pi < \alpha < 3\pi$.

7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка за заданим кутом визначала би зростання (спадання) основних тригонометричних функцій.

Рефлексія

1. Я розумію, що таке синус та косинус довільного кута.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю, як позначати синус та косинус на тригонометричному колі.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я знаю означення тангенса і котангенса довільного кута.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я знаю, як позначати тангенси й котангенси на відповідних осях тангенсів та котангенсів.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

5. Я знаю основні властивості тригонометричних функцій.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

6. Я умію визначати знаки тригонометричних функцій у кожній з координатних чвертей.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

7. Я знаю, як змінюються тригонометричні функції при збільшенні кута від 0 рад до 2π рад.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

8. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

1. Історія виникнення тригонометричних функцій.

2. Застосування тригонометричних функцій у фізиці.

3. Використання тригонометричних функцій у комп'ютерній графіці.

4. Тригонометричні функції в акустиці.

5. Полярна система координат.

6. Сферична тригонометрія.
7. Перетворення Фур'є та застосування тригонометричних функцій для аналізу радіосигналів.
8. Дослідження зміни значень функцій секанс і косеканс при зміні кута в межах першого кола.







