

10

Тема 4.

Тригонометричні функції

Урок 3. Означення тригонометричних функцій довільного кута

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса.
2. Знаки тригонометричних функцій.
3. Зміна значень тригонометричних функцій при зміні кута в межах першого кола.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) Історичні відомості пропонуйте учням/ученицям на домашнє опрацювання.
- 5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

7) Заплануйте проведення останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичних задач і тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів самостійної роботи над завданнями.

8) Під час розв'язання задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення усієї змістової теми. Тематами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи можливо обчислювати значення тригонометричних функцій для від'ємних кутів?
- 2) Для опису яких процесів ви використали б тригонометричні функції?
- 3) Чи можуть тангенс і котангенс певного кута мати різні знаки?
- 4) Чи бувають ситуації, коли достатньо знати знак тригонометричної функції без значення функції?
- 5) Що можна сказати про знаки тригонометричних функцій для кутів кратних 90° ?
- 6) Чому тригонометричні функції важливі в комп'ютерній графіці?

II. Повторення (4–5 хв)

1. Запишіть координати точки, що відповідають куту $\frac{\pi}{6}$ при повороті точки $A(1; 0)$ на цей кут.
Відповідь. $A_{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
2. В якій координатній чверті знаходиться точка, абсциса і ордината якої від'ємні числа?
Відповідь. У третій.
3. Розв'яжіть рівняння $x^4 = 81$.
Відповідь. -3 або 3 .
4. Спростіть вираз $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$.
Відповідь. $\sqrt{x}$.

5. Розв'яжіть нерівність $\frac{x-3}{x+4} \leq 0$.

Відповідь. $(-4; 3]$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Пілот винищувача проходить тренування на центрифугі, яка обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = \frac{2\pi}{3}$ рад/с. Він сидить у кабіні, яка закріплена на кінці важеля довжиною, що дорівнює радіусу R обертання центрифуги, де $R = 7$ м. Початкове положення пілота відповідає точці $(R; 0)$ у декартовій системі координат, а центр центрифуги збігається з початком координат. Знайдіть загальні рівняння, за якими можна знайти координати кабіни в цій системі координат, у будь-який момент часу t та обчисліть координати кабіни через 40 с після початку руху.

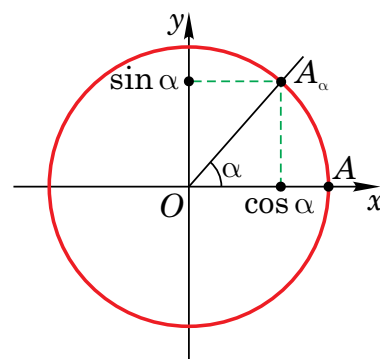
Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність

$$0 < \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < 1.$$

III. Означення синуса, косинуса, тангенса, котангенса (10–15 хв)

Тригонометричні функції — це важливі математичні поняття, які відіграють ключову роль у математиці, оскільки дозволяють не лише описувати співвідношення між сторонами та кутами трикутників й інших геометричних фігур, а також допомагають аналізувати періодичні процеси. Означення синуса, косинуса, тангенса і котангенса можна розширити за допомогою тригонометричного кола. Це дає змогу застосовувати тригонометричні функції не тільки в геометрії, а й у фізиці, техніці, астрономії та в інших науках.

Означення. Ординату точки A_α , яка відповідає куту α повороту точки $A(1; 0)$, називають **синусом** кута α (позначають $\sin \alpha$), а абсцису точки A_α називають **косинусом** кута α (позначають $\cos \alpha$) (див. рисунок).



Властивості синуса та косинуса

1. Для будь-якого кута абсциса та ордината точки A_α не можуть бути більшими за 1 чи меншими від -1 , тому завжди будуть правильними такі нерівності: $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ та $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

2. Кутам α та β , для яких виконується рівність $\alpha - \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка на тригонометричному колі, тому $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha$ і $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. Кутам α та $-\alpha$ відповідають точки на тригонометричному колі, симетричні відносно осі Ox , тому $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ та $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.
4. Кутам α та $\alpha + \pi$ відповідають діаметрально протилежні точки на тригонометричному колі, тобто точки, симетричні відносно початку координат, тому $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ і $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$.
5. Оскільки координати усіх точок, які належать тригонометричному колу, задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$, то: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Означення. Тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Котангенсом кута α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

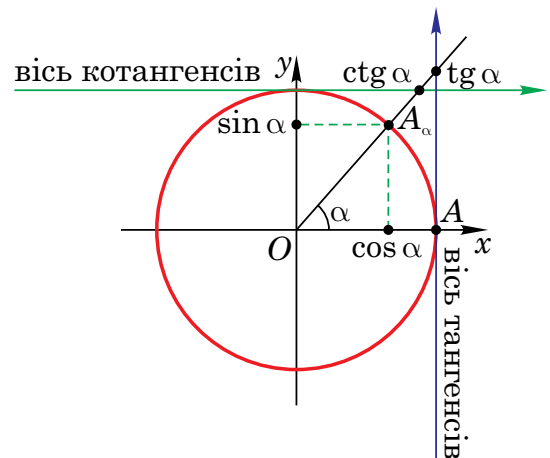
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Безпосередньо з означень тангенса та котангенса випливає, що для будь-якого кута α , такого, що $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$, є правильними рівності:

- 1) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$;
- 2) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$;
- 3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$.

Запишемо рівняння прямої OA_α , $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Оскільки ця пряма не вертикальна і завжди проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд $y = kx$, де k — кутовий коефіцієнт цієї прямої (див. рисунок).

Оскільки пряма проходить через точку $A_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha)$, то $\sin \alpha = k \cos \alpha$, звідси $k = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$. Тобто рівняння прямої $y = (\operatorname{tg} \alpha) \cdot x$. Пряма $y = (\operatorname{tg} \alpha) \cdot x$ перетинає пряму $x = 1$ у точці з координатами $(1; \operatorname{tg} \alpha)$, а пряму $y = 1$ — у точці $(\operatorname{ctg} \alpha; 1)$ (див. рисунок).



Властивості тангенса й котангенса

№	Властивість	Доведення
1.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.	$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$

№	Властивість	Доведення
2.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$.	$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$
3.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi)$	$\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \frac{\sin(\alpha - \pi)}{\cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$ $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$
4.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi)$	$\operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \frac{\cos(\alpha - \pi)}{\sin(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$ $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \frac{\cos(\alpha + \pi)}{\sin(\alpha + \pi)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$
5.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.	1) Для $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi m) = \frac{\sin(\alpha + 2\pi m)}{\cos(\alpha + 2\pi m)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$ 2) Для $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{tg}(\alpha + \pi(2m + 1)) = \frac{\sin(\alpha + \pi + 2\pi m)}{\cos(\alpha + \pi + 2\pi m)} =$ $= \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$
6.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.	1) Для $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi m) = \frac{\cos(\alpha + 2\pi m)}{\sin(\alpha + 2\pi m)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$ 2) Для $n = 2m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi(2m + 1)) = \frac{\cos(\alpha + \pi + 2\pi m)}{\sin(\alpha + \pi + 2\pi m)} =$ $= \frac{\cos(\alpha + \pi)}{\sin(\alpha + \pi)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$

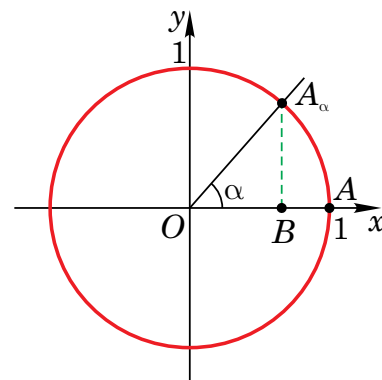
Ілюстративні приклади

6. Доведіть, що для кута $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ виконується нерівність $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$.

Доведення. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Оскільки кут α — гострий, то $\cos \alpha = OB$ та $\sin \alpha = A_\alpha B$, $OA_\alpha = 1$.

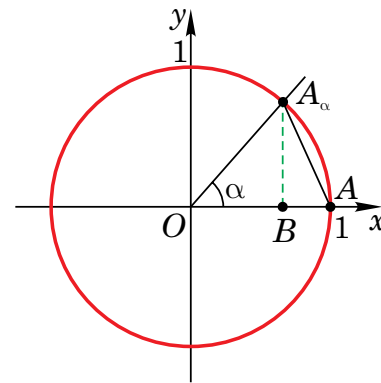
За нерівністю трикутника $OB + A_\alpha B > OA_\alpha$, тобто $\sin \alpha + \cos \alpha > 1$, що й треба було довести.



7. Доведіть, що для кута $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ виконується нерівність $\alpha > \sin \alpha$.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Для кутів $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, α — довжина дуги AA_α , $\sin \alpha = A_\alpha B$. Оскільки довжина дуги більша за довжину хорди AA_α , яка стягує цю дугу, а $AA_\alpha > A_\alpha B$ (гіпотенуза більша за катет), отже, $\alpha > \sin \alpha$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



8. Чому дорівнює значення $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ та $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то: $\frac{1}{9} + \cos^2 \alpha = 1$, $\cos^2 \alpha = \frac{8}{9}$, $\cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Оскільки $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\cos \alpha > 0$, тобто $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Тоді: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{3} : \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 2\sqrt{2}$.

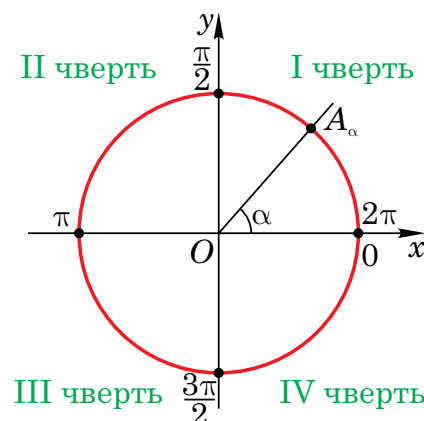
Відповідь. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, $2\sqrt{2}$.

IV. Знаки тригонометричних функцій

- 1) Чи можуть тангенс і котангенс одного кута мати різні знаки?
- 2) Чи бувають ситуації, коли достатньо знати знак тригонометричної функції без значення функції?
- 3) Чи можуть усі тригонометричні функції одночасно бути від'ємними?

Відомо, що осі декартової системи координат ділять координатну площину, а отже, і тригонометричне коло, на чотири чверті — при цьому:

- 1) усі кути $2\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, належать першій чверті;
- 2) усі кути $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, належать другій чверті;
- 3) усі кути $\pi + 2\pi n < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, належать третій чверті;
- 4) усі кути $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < 2\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, належать четвертій чверті (див. рисунок).



1) Якщо точка A_α , яка відповідає куту α , міститься у першій чверті, то її абсциса і ордината додатні, тобто $\cos \alpha > 0$ і $\sin \alpha > 0$.

2) Якщо точка A_α , яка відповідає куту α , міститься у другій чверті, то її абсциса від'ємна, а ордината додатна, тобто $\cos \alpha < 0$ і $\sin \alpha > 0$.

3) Якщо точка A_α , яка відповідає куту α , міститься у третій чверті, то її абсциса і ордината від'ємні, тобто $\cos \alpha < 0$ і $\sin \alpha < 0$.

4) Якщо точка A_α , яка відповідає куту α , міститься у четвертій чверті, то її абсциса додатна, а ордината від'ємна, тобто $\cos \alpha > 0$ і $\sin \alpha < 0$.

Оскільки $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ і $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, тому $\operatorname{tg} \alpha > 0$ і $\operatorname{ctg} \alpha > 0$, коли $\cos \alpha$ та $\sin \alpha$ одного знака, тобто в I і III чвертях, і $\operatorname{tg} \alpha < 0$ і $\operatorname{ctg} \alpha < 0$, коли $\cos \alpha$ та $\sin \alpha$ різних знаків, тобто в II і IV чвертях.

Ілюстративні приклади

9. Порівняйте з нулем значення виразу: $\sin 0,4\pi \cdot \cos 0,9\pi \cdot \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \left(-\frac{8\pi}{7} \right)$.

Розв'язання. 1) $0 < 0,4\pi < \frac{\pi}{2}$, оскільки $0,4\pi$ — кут першої чверті, тому $\sin 0,4\pi > 0$.

2) $\frac{\pi}{2} < 0,9\pi < \pi$, оскільки $0,9\pi$ — кут другої чверті, тому $\cos 0,9\pi < 0$.

3) $\frac{10\pi}{3} = 3\pi + \frac{\pi}{3}$ — кут третьої чверті, тому $\operatorname{tg} \frac{10\pi}{3} > 0$.

4) $-\frac{8\pi}{7} = -\pi - \frac{\pi}{7}$ — кут другої чверті, тому $\operatorname{ctg} \left(-\frac{8\pi}{7} \right) < 0$.

5) Отже, $\sin 0,4\pi \cdot \cos 0,9\pi \cdot \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \left(-\frac{8\pi}{7} \right) > 0$.

Відповідь. $\sin 0,4\pi \cdot \cos 0,9\pi \cdot \operatorname{tg} \frac{10\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} \left(-\frac{8\pi}{7} \right) > 0$.

10. Визначте знак виразу $\operatorname{tg} 3\alpha$, якщо $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Якщо $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$, то $\frac{\pi}{2} < 3\alpha < \pi$, тобто кут 3α — кут другої координатної чверті, тому $\operatorname{tg} 3\alpha < 0$.

Відповідь. $\operatorname{tg} 3\alpha < 0$.

11. Порівняйте $\cos 4$ і $\sin 7$.

Розв'язання. 1) $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$ — кут 4 рад — кут третьої чверті, тому $\cos 4 < 0$.

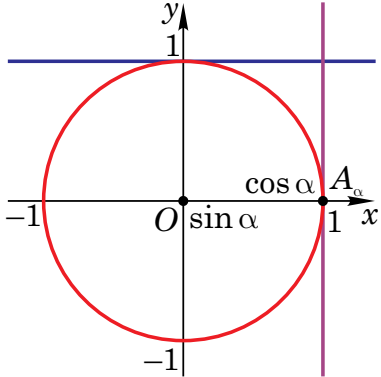
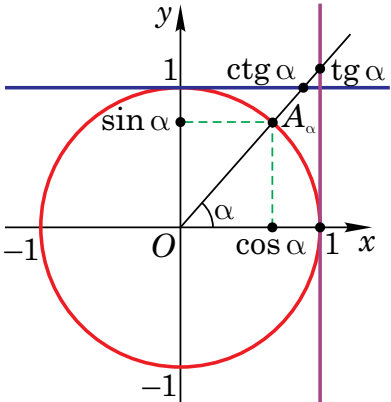
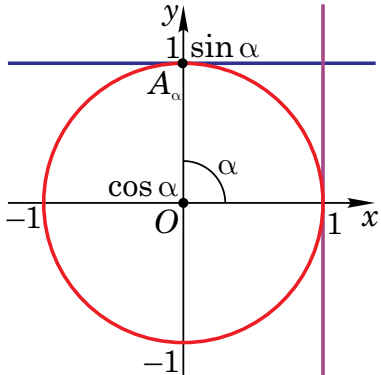
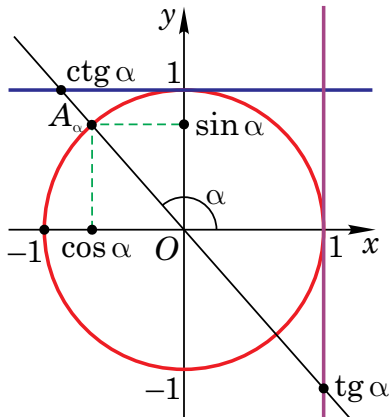
2) $2\pi < 7 < \frac{5\pi}{2}$ — кут 7 рад — кут першої чверті, тому $\sin 7 > 0$.

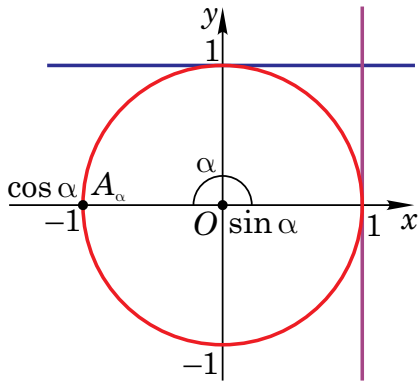
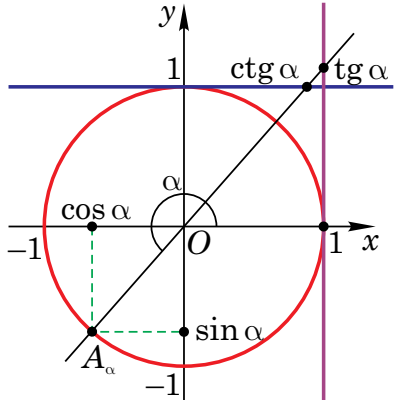
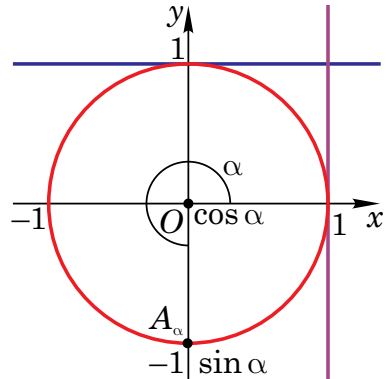
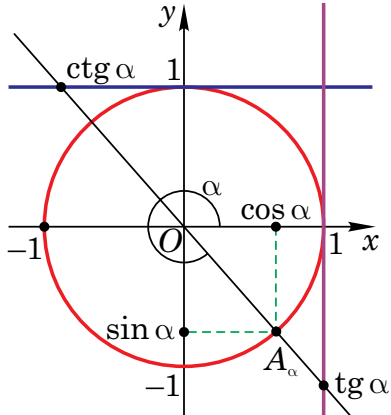
Отже, $\cos 4 < \sin 7$.

Відповідь. $\cos 4 < \sin 7$.

V. Зміна значень тригонометричних функцій при зміні кута в межах першого кола (7–9 хв)

Прослідкуємо, як змінюються тригонометричні функції при зростанні кута від 0 рад до 2π рад (див. таблицю).

Кут (у рад)	Рисунок	Пояснення
0		$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{ctg} 0$ — не існує.
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$		При збільшенні кута α від 0 до $\frac{\pi}{2}$: — косинус зменшується від 1 до 0; — синус збільшується від 0 до 1; — тангенс збільшується від 0 до $+\infty$; — котангенс зменшується від $+\infty$ до 0.
$\frac{\pi}{2}$		$\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ — не існує, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0$.
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$		При збільшенні кута α від $\frac{\pi}{2}$ до π : — косинус зменшується від 0 до -1 ; — синус зменшується від 1 до 0; — тангенс збільшується від $-\infty$ до 0; — котангенс зменшується від 0 до $-\infty$.

Кут (у рад)	Рисунок	Пояснення
π		$\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, $\operatorname{tg} \pi = 0$, $\operatorname{ctg} \pi$ — не існує.
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$		При збільшенні кута α від π до $\frac{3\pi}{2}$: — косинус збільшується від -1 до 0 ; — синус зменшується від 0 до -1 ; — тангенс збільшується від 0 до $+\infty$; — котангенс зменшується від $+\infty$ до 0 .
$\frac{3\pi}{2}$		$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2}$ — не існує, $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} = 0$.
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$		При збільшенні кута α від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π : — косинус збільшується від 0 до 1 ; — синус збільшується від -1 до 0 ; — тангенс збільшується від $-\infty$ до 0 ; — котангенс зменшується від 0 до $-\infty$.

Дослідити властивості тригонометричних функцій довільного кута можна за допомогою Geogebra-аплету:

<https://www.geogebra.org/m/xpx8a2tq>



Ілюстративні приклади

- 12.** В яких чвертях, зі збільшенням кута α , $\sin \alpha$ та $\cos \alpha$ одночасно зменшуються?

Розв'язання. Користуючись таблицею або тригонометричним колом, установлюємо, що $\sin \alpha$ та $\cos \alpha$ одночасно зменшуються тоді, коли кут збільшується та знаходиться у другій координатній чверті.

Відповідь. У другій.

- 13.** Знайдіть найбільше й найменше значення, яких може набувати вираз $1 - 4 \cos \alpha$.

Розв'язання. $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, $-4 \leq -4 \cos \alpha \leq 4$,
 $-4 + 1 \leq -4 \cos \alpha + 1 \leq 4 + 1$, $-3 \leq -4 \cos \alpha + 1 \leq 5$.

Отже, найбільше значення виразу дорівнює 5, а найменше: -3 .

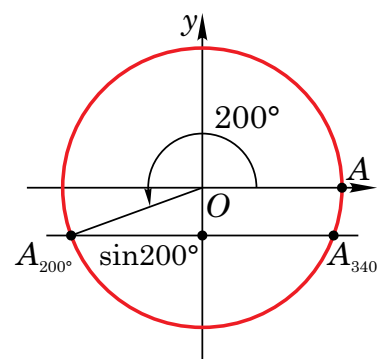
Відповідь. 5 та -3 .

- 15.** Яких значень від 0° до 360° може набувати кут α щоб виконувалось співвідношення: $\sin 200^\circ > \sin \alpha$?

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Позначимо на рисунку кут 200° та $\sin 200^\circ$. З рисунка видно, що нерівність задовольнятимуть кути $200^\circ < \alpha < 340^\circ$.

Відповідь. $200^\circ < \alpha < 340^\circ$.



Історична довідка

Тригонометрія — це розділ математики, що виник ще в стародавні часи. Її розвиток зумовлений потребами астрономії. Саме в астрономії сферична тригонометрія з'явилася раніше, ніж геометрія на площині. Перші знання з тригонометрії з'явилися у Вавилоні та Стародавньому Єгипті, де жреці використовували їх для вимірювання земельних ділянок і передбачення астрономічних явищ.

Давньогрецький математик Гіппарх (II ст. до н. е.) вважається засновником тригонометрії. Він створив перші таблиці хорд, які є прообразом сучасних тригонометричних функцій. Надалі тригонометрію розвивали Клавдій Птолемей, Аріабхата та Бхаскара в Індії, а також перські й арабські вчені — Аль-Баттані та Омар Хаям.

У середньовічній Європі тригонометрія набула значного поширення завдяки працям арабських учених, перекладених латиною.

Назви ліній синуса і косинуса вперше були введені індійськими вченими. Також вони склали перші таблиці синусів, хоча ці таблиці були менш точними, ніж таблиці Птолемея. З Індії бере свій початок учення про тригонометричні величини. Таке вчення називали «гоніометрією» (від «гоніо» — кут, «метрію» — вимірювати), яка й отримала пізніше назву «тригонометрія».

У сьогоденні тригонометрія використовується не лише в математиці, а й у фізиці, інженерії, навігації, комп'ютерній графіці та в багатьох інших сферах.

1) Що таке «рубай»?

2) Хто написав такі рядки:

«Ти до зла не хились, а роби лиш добро!

Бо не зло тобі друг, а добро, лиш добро.

Якщо зло і добро тобі в друзі прибились,

Вибирай однозначно — добро, лиш добро!»?

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Пілот винищувача проходить тренування на центрифугі, яка обертається з постійною кутовою швидкістю $\omega = \frac{2\pi}{3}$ рад/с. Він сидить у кабіні, яка закріплена на кінці важеля довжиною, що дорівнює радіусу R обертання центрифуги, де $R = 7$ м. Початкове положення пілота відповідає точці $(R; 0)$ у декартовій системі координат, а центр центрифуги збігається з початком координат. Знайдіть загальні рівняння, за якими можна знайти координати кабіни в цій системі координат, у будь-який момент часу t та обчисліть координати кабіни через 40 с після початку руху.

Розв'язання. 1) Кут α , який проходить центрифуга за час t , — $\alpha = \omega t$.

2) Якщо вибрати одиничне коло, яке має спільний центр із центром центрифуги, то це коло подібне до кола, з радіусом R та коефіцієнтом подібності R , де $R = 7$ м. Точка, що знаходиться на одиничному колі, має координати $(\cos\alpha; \sin\alpha)$. Тоді точка, яка лежить на центрифугі, має координати $(R\cos\alpha; R\sin\alpha)$.

3) За 40 с кабіна центрифуги пройде кут $\alpha = \frac{80\pi}{3}$ рад.

Таким чином, координати кабіни будуть $\left(7\cos\frac{80\pi}{3}; 7\sin\frac{80\pi}{3}\right)$.

Виділимо повні оберти кабіни й обчислимо косинус та синус кута α :

$$\frac{80\pi}{3} = 26\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad \cos\frac{80\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\frac{80\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, координати кабіни центрифуги: $\left(-\frac{7}{2}; \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$.

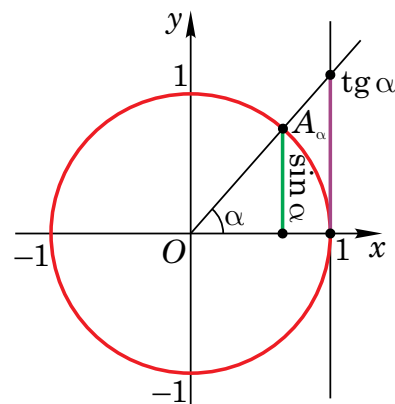
Відповідь. $\left(-\frac{7}{2}; \frac{7\sqrt{3}}{2}\right)$.

Задача 2. Олімпіадна задача. Доведіть, що для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується нерівність

$$0 < \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < 1.$$

Доведення. Оскільки для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконуються нерівності $\sin x > 0$ і $\operatorname{tg} x > 0$, то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ (див. рисунок).

Тому $\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, звідки $\frac{1}{\sin^2 x} > \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$.



Отже, виконується нерівність $0 < \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} < 1$, що й треба було довести.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Заповніть таблицю:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$						
$\cos \alpha$						
$\operatorname{tg} \alpha$						
$\operatorname{ctg} \alpha$						

2. Якщо кут належить трикутнику, то які тригонометричні функції цього кута можуть набувати від'ємних значень і коли саме?
3. Визначте знак кожного з добутків:
- 1) $\sin 101^\circ \cdot \sin 133^\circ$;
 - 2) $\cos 211^\circ \cdot \sin 116^\circ$;
 - 3) $\operatorname{tg} 111^\circ \cdot \sin 180^\circ$;
 - 4) $\operatorname{ctg} 300^\circ \cdot \sin 221^\circ$.
4. Визначте знак різниці:
- 1) $\sin 123^\circ - \sin 132^\circ$;
 - 2) $\cos 35^\circ - \cos 40^\circ$;
 - 3) $\operatorname{tg} 220^\circ - \operatorname{tg} 217^\circ$;
 - 4) $\operatorname{ctg} 304^\circ - \operatorname{ctg} 316^\circ$.
5. Замініть вираз тотожно рівним йому, змінивши знак кута на протилежний:
- 1) $\cos(-15^\circ)$;
 - 2) $\operatorname{ctg}(-235^\circ)$;
 - 3) $\operatorname{tg}(\alpha - 160^\circ)$;
 - 4) $\sin(\alpha - 40^\circ)$.
6. Які знаки мають $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, якщо α дорівнює:
- 1) $\frac{\pi}{5}$;
 - 2) $1,3\pi$;
 - 3) $\frac{7}{16}\pi$;
 - 4) $\frac{6}{17}\pi$?

Рівень В

1. Визначте, при яких значеннях x , таких, що $0 \leq x < 2\pi$, функція $y = \sin x - \cos x$:
- 1) дорівнює нулю;
 - 2) набуває додатних значень;
 - 3) набуває від'ємних значень;
 - 4) дорівнює 1.
2. Чи можуть тригонометричні функції половини кута трикутника бути від'ємними? Відповідь обґрунтуйте.
3. Спростіть вираз:
- 1) $\frac{a^2}{\sin 90^\circ} - 2ab \cdot \sin 180^\circ + \frac{b^2}{\sin 270^\circ}$;
 - 2) $a^3 \cdot \operatorname{ctg} 270^\circ + b^3 \cdot \operatorname{tg} 90^\circ$.
4. Знайдіть найбільше і найменше значення, яких може набувати вираз $\frac{1}{4} + 2\cos \alpha$.

- 5.** Порівняйте:
1) $\sin 20^\circ$ і $\cos 20^\circ$; 2) $\sin 50^\circ$ і $\cos 50^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 40^\circ$ і $\operatorname{ctg} 40^\circ$; 4) $\operatorname{tg} 50^\circ$ і $\operatorname{ctg} 50^\circ$.
- 6.** Визначте знак кожного з добутків:
1) $\sin 119^\circ \cdot \cos 119^\circ \cdot \operatorname{tg} 119^\circ$; 2) $\cos 312^\circ \cdot \sin 312^\circ \cdot \operatorname{ctg} 312^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 111^\circ \cdot \operatorname{ctg} 182^\circ \cdot \sin 359^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 123^\circ \cdot \sin 321^\circ \cdot \cos 213^\circ$.
- 7.** Визначте знак різниці:
1) $\sin 120^\circ - \sin 240^\circ$; 2) $\cos 20^\circ - \cos 120^\circ$;
3) $\operatorname{tg} 120^\circ - \operatorname{tg} 40^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 31^\circ - \operatorname{ctg} 131^\circ$.
- 8.** Визначте знак виразу:
1) $\sin 1 \cdot \cos(-1,5) \cdot \operatorname{tg} 4 \cdot \operatorname{ctg} 6,2$; 2) $\operatorname{ctg} 1,7 \cdot \sin(-2) \cdot \cos 6 \cdot \operatorname{tg} 2,5$.
- 9.** Нехай $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Порівняйте з нулем число:
1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 3) $\cos(\pi + \alpha)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.
- 10.** Розмістіть у порядку спадання числа: $\sin 0$, $\cos 0$, $\sin 1$, $\cos 1$, $\sin 2$, $\cos 3$.
- 11.** Доведіть, що будь-яка хорда тригонометричного кола виражається подвоєним синусом половини центрального кута, який спирається на цю хорду.
- 12.** Якщо сторона правильного десятикутника, вписаного в коло одиничного радіуса, дорівнює $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то обчисліть $\sin 18^\circ$.

Рівень С

- 1.** Яких значень від 0° до 360° може набувати кут α , щоб виконувалось співвідношення $\cos 150^\circ > \cos \alpha$?
- 2.** Знайдіть найбільше і найменше значення, яких може набувати вираз $10 - 7\cos^2 \alpha$.
- 3.** При яких значеннях x вираз $\frac{1}{1 - \cos x}$ набуває найменшого значення? Знайдіть це значення.
- 4.** Не користуючись калькулятором, знайдіть значення виразу:
1) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}$; 2) $\sin \frac{17\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos \frac{21\pi}{13}$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{19\pi}{12} + 1$.
- 5.** Порівняйте:
1) $\operatorname{tg} 1500^\circ$ і $\operatorname{tg} 1501^\circ$; 2) $\sin 1300^\circ$ і $\sin 1301^\circ$;
3) $\cos 1700^\circ$ і $\cos 1699^\circ$; 4) $\operatorname{ctg} 1750^\circ$ і $\operatorname{ctg} 1751^\circ$.
- 6.** Визначте знак виразу:
1) $\cos 3\alpha$, якщо $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{tg} 3\alpha$, якщо $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{3}$;
3) $\sin \frac{\alpha}{4}$, якщо $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$; 4) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, якщо $2\pi < \alpha < 3\pi$.
- 7.** *Творче завдання.* Напишіть програму, яка за заданим кутом визначала би зростання (спадання) основних тригонометричних функцій.

VIII. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 1. | Я розумію, що таке синус та косинус довільного кута. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю, як позначати синус та косинус на тригонометричному колі. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю означення тангенса і котангенса довільного кута. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, як позначати тангенси й котангенси на відповідних осях тангенсів та котангенсів. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю основні властивості тригонометричних функцій. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я умію визначати знаки тригонометричних функцій у кожній з координатних чвертей. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я знаю, як змінюються тригонометричні функції при збільшенні кута від 0 рад до 2π рад. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Історія виникнення тригонометричних функцій.
2. Застосування тригонометричних функцій у фізиці.
3. Використання тригонометричних функцій у комп'ютерній графіці.
4. Тригонометричні функції в акустиці.
5. Полярна система координат.
6. Сферична тригонометрія.
7. Перетворення Фур'є та застосування тригонометричних функцій для аналізу радіосигналів.
8. Дослідження зміни значень функцій секанс і косеканс при зміні кута в межах першого кола.