

10

Тема 4.

Тригонометричні функції

Урок 4. Урок–практикум. Побудова кутів за заданими значеннями тригонометричної функції

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Побудова кутів за заданими значеннями функцій.
2. Значення тригонометричних функцій деяких кутів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює їхнє застосування, наводить аргументи [12 МАО 4.3.1–1 П];

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) Історичні відомості запропонуйте учнівству на домашнє опрацювання.
- 5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 6) Матеріал уроку подано з надлишком, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 7) Обирайте ілюстративні приклади на власний розсуд.
- 8) Заплануйте проведення останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичної задачі й тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навичок і навчання учнів самостійної роботи над завданнями.

9) Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу.

10) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Робота над обраним проєктом може тривати в продовж вивчення усієї змістової теми. Тематами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали рівень А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можна за довжиною тіні знайти кут падіння сонячного променя?

2) Чому важливо уміти знаходити значення деяких кутів за відомою тригонометричною функцією цього кута?

3) Якщо відомо, що синус кута дорівнює 0,5, то чи можна однозначно вказати величину кута?

4) Що спільного між GPS-навігацією і тригонометричними функціями?

5) Чому математики, інженери та програмісти знають значення тригонометричних функцій деяких кутів напам'ять, а не використовують кожного разу калькулятор?

II. (Усно). Повторення (4–5 хв)

1. Спростіть вираз $\operatorname{tg} \alpha \cos \alpha$.

Відповідь. $\sin \alpha$.

2. Укажіть правильні нерівності:

1) $\sin 100^\circ < 0$; 2) $\cos 200^\circ > 0$; 3) $\operatorname{tg} 160^\circ > 0$; 4) $\operatorname{ctg} 220^\circ > 0$.

Відповідь. Нерівність 4).

3. Укажіть хибні нерівності:

1) $\cos 110^\circ < \sin 20^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 40^\circ > \operatorname{ctg} 170^\circ$;
3) $\operatorname{ctg} 90^\circ > \sin 80^\circ$; 4) $\sin 200^\circ < \sin 1^\circ$.

Відповідь. Нерівність 3).

4. Знайдіть значення виразу $4 \cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{3\pi}{2}$.

Відповідь. 0.

5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x} = -4$.

Відповідь. -64.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Під час проектування дороги інженери мають установити попереджувальний дорожній знак «Крутий підйом». Відомо, що за нормами цей знак установлюється тоді, коли кут нахилу дороги перевищує значення $\arctg \frac{1}{10}$. Вони провели вимірювання дорожнього полотна і встановили, що на відстані 150 м полотно дороги підіймається на 18 м. Знайдіть тангенс кута підйому та визначте, чи потрібно перед цією ділянкою дороги встановлювати знак «Крутий підйом».

Задача 2. Олімпіадна задача. Знайдіть найбільше значення функції

$$f(x) = \sin^8 x + \cos^{14} x.$$

III. Побудова кутів за заданими значеннями функцій (10–12 хв)

Щоб побудувати кут, синус якого дорівнює b , позначимо число b на осі ординат та розглянемо тригонометричне коло й пряму $y = b$ (див. рисунок).

Якщо $b > 1$ або $b < -1$, то пряма $y = b$ не має спільних точок з тригонометричним колом.

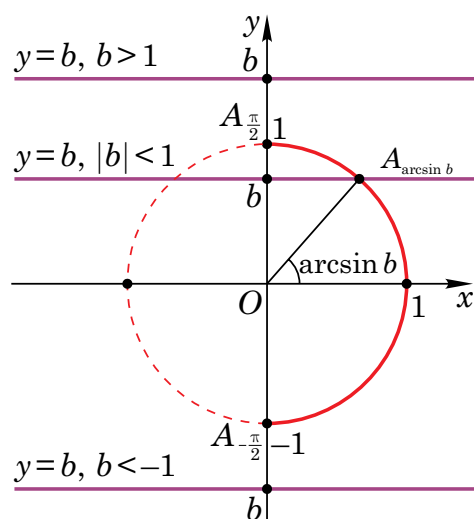
Якщо $-1 \leq b \leq 1$, то ця пряма перетинає праву частину тригонометричного кола в єдиній точці, яка відповідає деякому куту α (в радіанній мірі).

Якщо $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то назвемо кут α арксинусом числа b .

Позначення $\alpha = \arcsin b$.

Наприклад: $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$,

$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

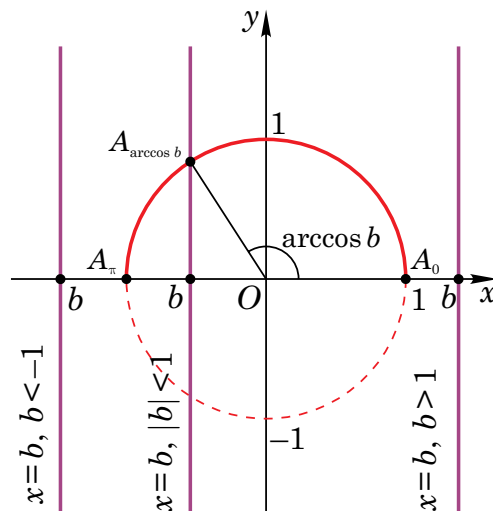


Примітка. Слово «арксинус» походить від грецького слова $\alpha\rho\chi$ — дуга, а «синус» — від латинського «sinus» («вигин»). Мається на увазі дуга тригонометричного кола, на яку спирається відповідний кут.

Аналогічно, якщо нам потрібно побудувати кут, косинус якого дорівнює числу b , то будемо позначати число b на осі абсцис і розглядати пряму $x = b$ (див. рисунок).

Якщо $b > 1$ або $b < -1$, то пряма $x = b$ не має спільних точок з тригонометричним колом, а якщо $-1 \leq b \leq 1$, то ця пряма перетинає верхню частину тригонометричного кола в єдиній точці, яка відповідає деякому куту α (в радіанній мірі). Якщо $0 \leq \alpha \leq \pi$, то називатимемо кут α арккосинусом числа b .

Позначення $\alpha = \arccos b$.



Наприклад: $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos 1 = 0$, $\arccos(-1) = \pi$.

Означення 1. Арксинусом числа b ($|b| \leq 1$) називають кут α $\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$, синус якого дорівнює b , тобто $\sin \alpha = b$.

Означення 2. Арккосинусом числа b ($|b| \leq 1$) називають кут α ($0 \leq \alpha \leq \pi$), косинус якого дорівнює b , тобто $\cos \alpha = b$.

Основні властивості арксинуса та арккосинуса

1. Якщо $|b| \leq 1$, то існують єдині значення арксинуса та арккосинуса.
2. Для $|b| > 1$ значень арксинуса та арккосинуса не існує, тобто вирази: $\arcsin 3$, $\arcsin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $\arccos \pi$, $\arccos(-4)$ — не мають змісту.
3. Якщо $|b| \leq 1$, то $\sin(\arcsin b) = b$, $\cos(\arccos b) = b$.

Щоб побудувати кут, тангенс якого дорівнює b , то побудуємо пряму $y = b$, яка завжди перетинає вісь тангенсів, тобто пряму $x = 1$, в єдиній точці (див. рисунок). Пряма, що з'єднує цю точку з початком координат, перетинає праву частину тригонометричного кола у деякій точці, що відповідає певному куту α (у радіанній мірі).

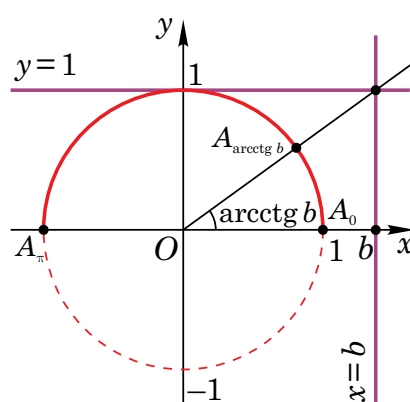
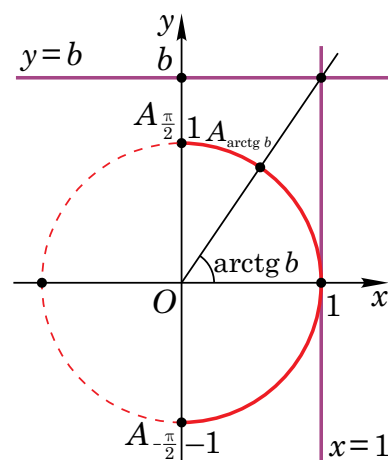
Якщо $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то називатимемо кут α арктангенсом числа b . Позначення $\alpha = \operatorname{arctg} b$.

Наприклад: $\operatorname{arctg} 0 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Щоб побудувати кут, котангенс якого дорівнює b , то побудуємо пряму $x = b$, яка завжди перетинає вісь котангенсів, тобто пряму $y = 1$, в єдиній точці (див. рисунок). Пряма, що з'єднує цю точку з початком координат, перетинає верхню частину тригонометричного кола у деякій точці, що відповідає певному куту α (у радіанній мірі).

Якщо $0 < \alpha < \pi$, то називатимемо кут α арккотангенсом числа b . Позначення $\alpha = \operatorname{arcctg} b$.

Наприклад: $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.



Означення 3. Арктангенсом числа b називають кут α $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b , тобто $\operatorname{tg} \alpha = b$.

Означення 4. Арккотангенсом числа b називають кут α ($0 < \alpha < \pi$), котангенс якого дорівнює b , тобто $\operatorname{ctg} \alpha = b$.

Основні властивості арктангенса та арккотангенса

1. Для будь-якого числа b існують єдині значення арктангенса та арккотангенса.
2. Для будь-якого числа b виконуються рівності: $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b) = b$ та $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} b) = b$.

Ілюстративні приклади (7–10 хв)

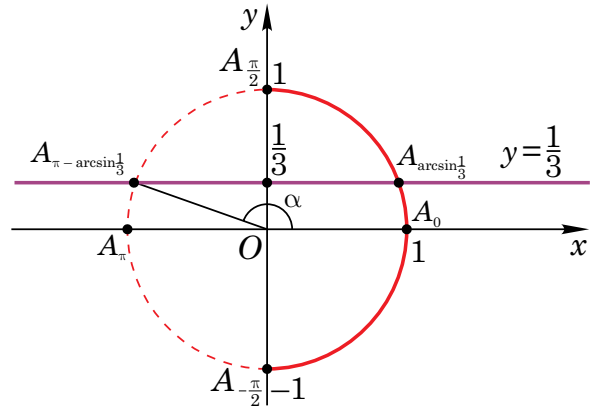
6. Побудуйте кут α , за умови, що синус цього кута дорівнює $\frac{1}{3}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

- 2) Пряма $y = \frac{1}{3}$ перетинає тригонометричне

коло у двох точках. Оскільки $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то умову задачі задовольняє кут, якому відповідає точка, яка лежить у другій координатній чверті (див. рисунок). Кут цей дорівнює $\pi - \arcsin \frac{1}{3}$.

Відповідь. $\pi - \arcsin \frac{1}{3}$.



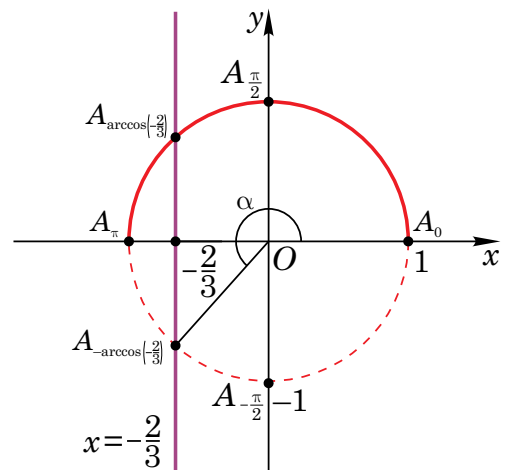
7. Побудуйте кут α , за умови, що косинус цього кута дорівнює $-\frac{2}{3}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

- 2) Пряма $x = -\frac{2}{3}$ перетинає тригонометричне

коло у двох точках. Оскільки $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то умову задачі задовольняє кут, якому відповідає точка, що лежить у третій координатній чверті (див. рисунок). Кут цей дорівнює $-\arccos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + 2\pi$.

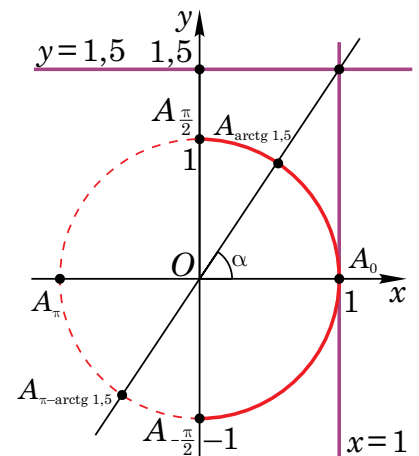
Відповідь. $-\arccos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + 2\pi$.



8. Побудуйте кут α , за умови, що тангенс цього кута дорівнює 1,5 і $\pi < \alpha < 2\pi$.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

- 2) Пряма $y = 1,5$ перетинає вісь тангенсів, тобто пряму $x = 1$, в єдиній точці. Пряма, що з'єднує цю точку з початком координат, перетинає тригонометричне коло у двох точках. Оскільки $\pi < \alpha < 2\pi$, то умову за-



дачі задовольняє кут, якому відповідає точка, яка лежить у третій координатній чверті (див. рисунок). Кут цей дорівнює $\pi + \operatorname{arctg} 1,5$.

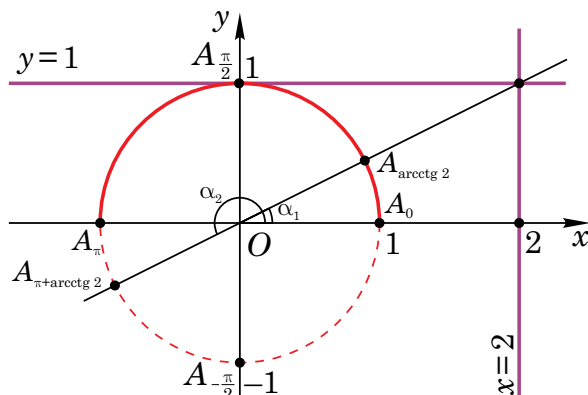
Відповідь. $\pi + \operatorname{arctg} 1,5$.

9. Побудуйте кут α , за умови, що котангенс цього кута дорівнює 2 і $0 < \alpha < 2\pi$.

Розв'язання. 1) Виконаємо побудову (див. рисунок).

2) Пряма $x = 2$ перетинає вісь котангенсів, тобто пряму $y = 1$, в єдиній точці. Пряма, що з'єднує цю точку з початком координат, перетинає тригонометричне коло у двох точках. Оскільки $0 < \alpha < 2\pi$, то умову задачі задовольняють два кути, яким відповідають точки, які лежать у першій та третій координатних чвертях (див. рисунок). Кути ці дорівнюють $\alpha_1 = \operatorname{arctg} 2$ та $\alpha_2 = \pi + \operatorname{arctg} 2$.

Відповідь. $\alpha_1 = \operatorname{arctg} 2$, $\alpha_2 = \pi + \operatorname{arctg} 2$.



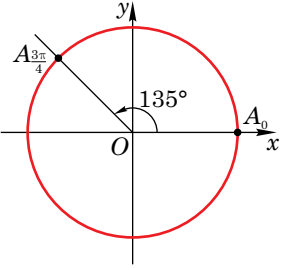
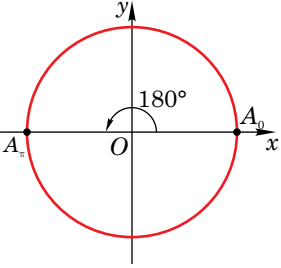
IV. Значення тригонометричних функцій деяких кутів (7–8 хв)

З урахуванням означень тригонометричних функцій доповнимо таблицю, наведену на одному з попередніх уроків.

Кут α	Рисунок	Координати точки	Тригонометричні функції кута
$0 = 0^\circ$		$A_0(1; 0)$	$\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{ctg} 0$ — не існує.
$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$		За властивістю катета, протилежного до кута 30° : $A_x A_{\frac{\pi}{6}} = OA_y = \frac{1}{2}$. За теоремою Піфагора: $OA_x = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отже, $A_{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.	$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = 1 : \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Кут α	Рисунок	Координати точки	Тригонометричні функції кута
$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$		Трикутник $OA_xA_{\frac{\pi}{4}}$ — рівнобедрений і прямокутний, тому $OA_x = A_xA_{\frac{\pi}{4}} = OA_y$. За теоремою Піфагора: $2OA_x^2 = 1, \quad OA_x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ Отже, $A_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.	$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$ $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,$ $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1 : \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$
$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$		За властивістю катета, протилежного до кута 30°: $OA_x = \frac{1}{2}.$ За теоремою Піфагора: $OA_y = A_xA_{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ Отже, $A_{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.	$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$ $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3},$ $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = 1 : \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$
$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$		$A_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$	$\sin \frac{\pi}{2} = 1,$ $\cos \frac{\pi}{2} = 0,$ $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \text{ — не існує,}$ $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0.$
$-\frac{\pi}{6} = -30^\circ$		Оскільки точки, які відповідають числам α і $-\alpha$ на тригонометричному колі, симетричні відносно осі Ox, то $A_{-\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.	$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$ $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3},$ $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 : \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}.$

Кут α	Рисунок	Координати точки	Тригонометричні функції кута
$-\frac{\pi}{4} = -45^\circ$		Оскільки точки, які відповідають числам α і $-\alpha$ на тригонометричному колі, симетричні відносно осі Ox , то $A_{-\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.	$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$ $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$ $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = -1,$ $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 : \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1.$
$-\frac{\pi}{3} = -60^\circ$		Оскільки точки, які відповідають числам α і $-\alpha$ на тригонометричному колі, симетричні відносно осі Ox , то $A_{-\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.	$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$ $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},$ $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = -\sqrt{3},$ $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1 : \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$
$-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$		$A_{-\frac{\pi}{2}}(0; -1).$	$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,$ $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$ $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \text{ — не існує,}$ $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$
$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$		Оскільки точки, які відповідають числам α і $\alpha + \pi$ на тригонометричному колі, симетричні відносно початку координат, то $A_{\frac{2\pi}{3}}\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$	$\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$ $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},$ $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3},$ $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = 1 : \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Кут α	Рисунок	Координати точки	Тригонометричні функції кута
$\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$		Оскільки точки, які відповідають числам α і $\alpha + \pi$ на тригонометричному колі, симетричні відносно початку координат, то $A_{\frac{3\pi}{4}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.	$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$, $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = 1 : \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1$.
$\pi = 180^\circ$		$A_\pi(-1; 0)$	$\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\operatorname{tg} \pi = 0$, $\operatorname{ctg} \pi$ — не існує.

Примітка. Якщо тригонометричні функції підносити до степеня, то:

$$(\sin \alpha)^n = \sin^n \alpha, (\cos \alpha)^n = \cos^n \alpha, (\operatorname{tg} \alpha)^n = \operatorname{tg}^n \alpha, (\operatorname{ctg} \alpha)^n = \operatorname{ctg}^n \alpha.$$

Наприклад:

$$(\cos 120^\circ)^2 = \cos^2 120^\circ = (-0,5)^2 = 0,25.$$

Ілюстративні приклади (7–10 хв)

- 10.** Обчисліть значення виразу $\operatorname{tg}^2 30^\circ + 2 \sin 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ + \cos^2 30^\circ$.

Розв'язання. $\operatorname{tg}^2 30^\circ + 2 \sin 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ + \cos^2 30^\circ =$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + 1 + \frac{3}{4} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}.$$

Відповідь. $2\frac{1}{12}$.

- 11.** Спростіть вираз $a^3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + a^2 b \operatorname{tg}^2 \frac{4\pi}{3} + 9ab^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3} + 2b^3 \cos \frac{5\pi}{3}$.

Розв'язання. $a^3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + a^2 b \operatorname{tg}^2 \frac{4\pi}{3} + 9ab^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{3} + 2b^3 \cos \frac{5\pi}{3} =$

$$= a^3 \cdot 1 + a^2 b \cdot (\sqrt{3})^2 + 9ab^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2b^3 \cdot \frac{1}{2} = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3.$$

Відповідь. $(a + b)^3$.

- 12.** Знайдіть α , якщо $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ та $-2\pi < \alpha < -\frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. Якщо $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, то $\alpha = \frac{\pi}{3}$, але цей кут не задовольняє умову $-2\pi < \alpha < -\frac{3\pi}{2}$, тому скористаємось тим, що $\cos(\alpha - 2\pi) = \cos \alpha = \frac{1}{2}$, звідки $\alpha + 2\pi = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = -\frac{5\pi}{3}$. Цей кут задовольняє умову $-2\pi < \alpha < -\frac{3\pi}{2}$.

Відповідь. $-\frac{5\pi}{3}$.

Історична довідка

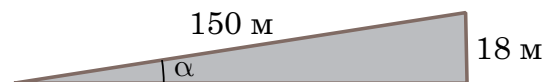
Поняття «тангенс» та «котангенс», як і перші таблиці цих величин, з'явилися через науку про сонячний годинник — «гномоніку». Сонячний годинник являв собою жердину, яка вертикально встромлена в землю (грецьке слово — гномон — це назва цієї жердини). Час вимірювався за довжиною тіні від жердини.

Термін «тангенс» (від латинського слова «tangent» — «відрізок дотичної») був уведений данським математиком Томасом Фінком у 1583 році з урахуванням значення цієї дотичної на тригонометричному колі. Термін котангенс зустрічається вперше у 1620 році у працях англійського вченого Едмунта Гутера.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Задача 1. Під час проектування дороги інженери мають установити попереджувальний дорожній знак «Крутий підйом». Відомо, що за нормами цей знак встановлюється тоді, коли кут нахилу дороги перевищує значення $\arctg \frac{1}{10}$. Вони провели вимірювання дорожнього полотна і встановили, що на відстані 150 м полотно дороги підіймається на 18 м. Знайдіть тангенс кута підйому та визначте, чи потрібно перед цією ділянкою дороги встановлювати знак «Крутий підйом».

Розв'язання. 1) Зобразимо ескіз дороги.



2) Знайдемо, з теореми Піфагора, другий катет трикутника:

$$\sqrt{150^2 - 18^2} = \sqrt{22500 - 324} = \sqrt{22176} \approx 148,9 \text{ (м)}.$$

3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{18}{148,9} \approx 0,12$, тому $\alpha = \arctg 0,12$.

4) Число 0,12 на осі тангенсів знаходиться вище за число 0,1, тому кут нахилу дороги більший за $\arctg \frac{1}{10}$.

Отже, ділянка дороги потребує встановлення знака:

Відповідь. 1) 0,12. 2) Так.



Задача 2. Олімпіадна задача. Знайдіть найбільше значення функції

$$f(x) = \sin^8 x + \cos^{14} x.$$

Розв'язання. Оскільки $\sin^2 x \leq 1$, $\cos^2 x \leq 1$, то для будь-яких значень x справедливі нерівності $\sin^8 x \leq \sin^2 x$ та $\cos^{14} x \leq \cos^2 x$.

Додамо отримані нерівності: $\sin^8 x + \cos^{14} x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Якщо $x = \frac{\pi}{2}$, то $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^8\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos^{14}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1$.

Таким чином найбільше значення функції $f(x)$ дорівнює 1.

Відповідь. 1.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Заповніть таблицю:

α	0	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{17\pi}{3}$	$-\frac{9\pi}{4}$	$-\frac{9\pi}{2}$	7π
$\sin \alpha$						
$\cos \alpha$						
$\operatorname{tg} \alpha$						
$\operatorname{ctg} \alpha$						

2. Побудуйте кути, синуси яких дорівнюють:

- 1) 0,6; 2) -0,5.

3. Побудуйте кути, косинуси яких дорівнюють:

- 1) $\frac{2}{3}$; 2) -0,4.

4. Побудуйте кути, тангенси яких дорівнюють:

- 1) -1,2; 2) 0,2.

5. Побудуйте кути, котангенси яких дорівнюють:

- 1) 0,8; 2) -1,3.

6. Обчисліть:

- 1) $\arcsin \frac{1}{2}$; 2) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$; 4) $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
 5) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$; 6) $\operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$; 7) $\operatorname{arctg}(-1)$; 8) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

Рівень В

1. Обчисліть:

- 1) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin \frac{11\pi}{6}$; 3) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3}$; 4) $\cos \left(-\frac{7\pi}{3}\right)$;
 5) $\cos \frac{7\pi}{6}$; 6) $\operatorname{tg} \left(-\frac{2\pi}{3}\right)$; 7) $\sin \left(-\frac{13\pi}{6}\right)$; 8) $\operatorname{ctg} \left(-\frac{7\pi}{4}\right)$.

2. Обчисліть:

- 1) $\sin 585^\circ \cdot \cos(-930^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 510^\circ$; 2) $\sin(-570^\circ) \cos 870^\circ \cdot \operatorname{tg} 945^\circ$;
 3) $\sin 1020^\circ \cdot \cos 675^\circ \cdot \operatorname{ctg}(-1050^\circ)$; 4) $\sin 660^\circ \cdot \cos(-855^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 600^\circ$.

3. Знайдіть значення виразу:

1) $2 \sin \alpha + \sqrt{2} \cos \alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{4}$;

2) $0,5 \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha$, якщо $\alpha = 60^\circ$;

3) $\sin 3\alpha - \cos 2\alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

4) $\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{3}$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

4. Доведіть, що $\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{6} \right) \left(\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{2\pi}{3}$.

5. Побудуйте кут x , синус якого дорівнює:

1) $\frac{1}{2}$ та $90^\circ < x < 180^\circ$;

2) $-\frac{3}{4}$ та $180^\circ < x < 270^\circ$.

6. Побудуйте кут x , косинус якого дорівнює:

1) $\frac{1}{3}$ та $270^\circ < x < 360^\circ$;

2) $-0,6$ та $90^\circ < x < 180^\circ$.

7. Побудуйте кут x , тангенс якого дорівнює:

1) $-\frac{2}{3}$ та $270^\circ < x < 360^\circ$;

2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ та $180^\circ < x < 270^\circ$.

8. Побудуйте кут x , котангенс якого дорівнює:

1) -1 та $90^\circ < x < 180^\circ$;

2) $-\sqrt{3}$ та $270^\circ < x < 360^\circ$.

9. Порівняйте:

1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ і $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ і $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}(-1)$ і $\operatorname{arcctg}(-1)$;

4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ і $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

10. Із точки, що знаходиться на відстані 86,6 м від центра основи вежі, верхівку вежі видно під кутом 22° . Знайдіть висоту вежі.

11. Знайдіть величину сили, рівнодійної двох сил, прикладених до точки A , якщо одна з них дорівнює 50 Н, а інша — 60 Н, а кут між ними становить $\frac{2\pi}{3}$.

12. Тінь від вертикальної жердини коротша від жердини на $\frac{1}{n}$ її довжини. Якою є висота сонця над горизонтом?

Рівень С

1. Обчисліть:

1) $\sin 412^\circ + \operatorname{tg} 1099^\circ \cdot \cos 52^\circ$;

2) $\sin 772^\circ + \operatorname{tg} 199^\circ \cdot \cos 412^\circ$;

3) $\cos 566^\circ + \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \sin 566^\circ$;

4) $\operatorname{tg} 186^\circ \cdot \cos 438^\circ - \sin 438^\circ$.

2. Побудуйте додатний кут x , менший від 360° , якщо:

1) $\sin x = -\frac{2}{3}$ та $\cos x > 0$;

2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ та $\operatorname{ctg} x < 0$;

3) $\operatorname{tg} x = 2$ та $\sin x < 0$;

4) $\operatorname{ctg} x = -0,8$ та $\sin x < 0$.

3. Доведіть тотожність:

$$1) \frac{\sin \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \cos \pi}{\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{3\pi}{2} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$2) \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{3}}{2 \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cos 2\pi - \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right)} = -3.$$

4. Обчисліть:

$$1) \arcsin(-1) - \arccos\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$2) \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - \arcsin(-1) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

5. Обчисліть:

$$1) \sin\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right); \quad 2) \arccos\left(\sin \frac{\pi}{3}\right);$$

$$3) \operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{1}{2} - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}(-1)\right); \quad 4) \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}\right).$$

6. Гаубиця A стріляє по цілі B з відстані 2500 м. Артилеристи отримали наказ перенести вогонь на ціль C , що знаходиться на відстані 1500 м від B . На який кут потрібно повернути ствол, якщо $AB \perp BC$?

7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка визначала би можливі значення кутів, що належать заданому проміжку, за заданою тригонометричною функцією кута.

VII. Рефлексія (2 хв)

- | | | |
|----|--|------------------------|
| 1. | Я розумію, як будувати кут за відомим синусом цього кута. | |
| | Так | Ще треба потренуватися |
| | | Ні |
| 2. | Я знаю, як будувати кут за відомим косинусом цього кута. | |
| | Так | Ще треба потренуватися |
| | | Ні |
| 3. | Я знаю, як будувати кут за відомим тангенсом цього кута. | |
| | Так | Ще треба потренуватися |
| | | Ні |
| 4. | Я розумію, як будувати кут за відомим котангенсом цього кута. | |
| | Так | Ще треба потренуватися |
| | | Ні |
| 5. | Я знаю значення тригонометричних функцій основних кутів. | |
| | Так | Ще треба потренуватися |
| | | Ні |
| 6. | Я знаю, як знаходити значення тригонометричних функцій основних кутів. | |
| | Так | Ще треба потренуватися |
| | | Ні |

- 7.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

- 1.** Історія виникнення таблиць тригонометричних функцій.
- 2.** Побудова кутів із використанням динамічних математичних програм.
- 3.** Геометричні методи складання таблиць тригонометричних функцій.
- 4.** Побудова кутів в астрономії.
- 5.** Розрахунок кутів нахилу при побудові даху будинку.
- 6.** Побудова кутів у сферичній тригонометрії.
- 7.** Знаходження значень кутів за даною тригонометричною функцією кута у комп'ютерній графіці.