10 Тема 4. Тригонометричні функції

Урок 5. Періодичність тригонометричних функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

1) дізнаєтесь, що таке періодичні функції;

2) вивчите основні властивості періодичних функцій;

3) дізнаєтесь, що таке сумірні числа;

4) з'ясуєте, що таке головний період періодичної функції;

5) вивчите головні періоди основних тригонометричних функцій;

6) навчитеся знаходити періоди функцій, за їхніми властивостями;

7) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Обчисліть значення виразу $\cos\frac{7\pi}{6}$.

2. Укажіть правильні рівності:

1) $|\cos 3| = \cos 3$; 2) $|\cos 3| = -\cos 3$; 3) $|\cos 3| = \sin 3$; 4) $|\cos 3| = -\sin 3$.

3. Обчисліть значення виразу $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

4. Знайдіть значення виразу $2\sin\frac{\pi}{6} - 3\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

5. Чому дорівнює значення виразу $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$?

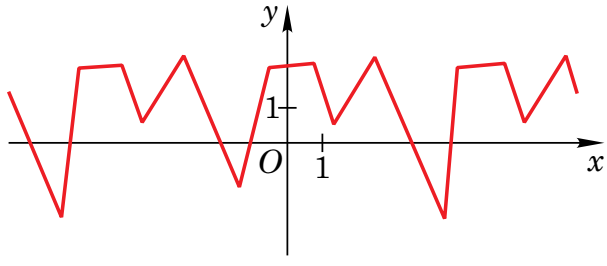
III. Періодичність функцій. Сумірні та несумірні числа

У нашому світі багато явищ повторюються: день і ніч, пори року, ритм серця, хвилі на воді. Все це — приклади періодичних явищ. Математика допомагає описувати такі явища за допомогою періодичних функцій. Періодичні функції — це математичні моделі повторюваних процесів, які зустрічаються всюди: у природі, у техніці, в музиці, в медицині. Періодичні функції допомагають передбачати й аналізувати явища, які мають циклічний характер.

Як передбачити чергову хвилю на морі або коли знову буде повний Місяць? Це можливо завдяки періодичним функціям — темі, яку ми сьогодні вивчаємо.

Означення. Функцію $f(x)$ називають ***періодичною***, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення функції $f(x)$ виконуються рівності $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$. Число T називають ***періодом*** функції $f(x)$.

На рисунку побудовано графік періодичної функції.



Основні властивості періодичних функцій

1. Якщо число T є періодом функції $f(x)$, то і число $(-T)$ також є періодом функції $f(x)$.

2. Якщо числа T_1 і T_2 є періодами функції $f(x)$, причому $T_1 + T_2 \neq 0$, то число $T_1 + T_2$ також є періодом функції $f(x)$.

3. Якщо число T є періодом функції $f(x)$, то будь-яке число виду nT, де $n \in \mathrm{Z}$, $n \neq 0$, також є її періодом.

4. Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то число $\dfrac{T}{k}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$ (b — деяке число).

Сформулюємо ще декілька означень.

Означення 1. Якщо серед усіх періодів функції $f(x)$ існує найменший додатний період, то його називають ***головним періодом*** функції $f(x)$.

Означення 2. Якщо число T є головним періодом функції $y = f(x)$, то число $\dfrac{T}{|k|}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

Означення 3. Число T, яке є як періодом функції $f(x)$, так і періодом функції $g(x)$, називають *спільним періодом* функцій $f(x)$ і $g(x)$.

Означення 4. Додатні числа a і b називають *сумірними*, якщо $\frac{a}{b}$ — раціональне число. Якщо $\frac{a}{b}$ — ірраціональне число, то числа a і b є *несумірними*.

Теорема. **Якщо існує період T_1 функції $f(x)$ і період T_2 функції $g(x)$, такі, що числа T_1 і T_2 є сумірними, то функції $f(x)$ і $g(x)$ мають спільний період.**

Приклад 1. Доведіть, що коли число T є періодом функції $f(x)$, то і число $(-T)$ також є періодом функції $f(x)$.

Приклад 2. Доведіть,, що коли числа T_1 і T_2 є періодами функції $f(x)$, причому $T_1 + T_2 \neq 0$, то число $T_1 + T_2$ також є періодом функції $f(x)$.

Приклад 3. Доведіть, що коли число T є періодом функції $f(x)$, то будь-яке число виду nT, де $n \in \mathrm{Z}$, $n \neq 0$, також є її періодом.

Приклад 4. Доведіть, що коли число T є періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{k}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

Доведення. Для будь-якого x з області визначення функції $y = f(kx + b)$ можна записати:

1) $f(kx+b) = f((kx+b)+T) = f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right)$;

2) $f(kx+b) = f((kx+b)-T) = f\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right)$.

Це означає, що для будь-якого x з області визначення функції $f(x)$ буде виконуватися рівність $f\left(k\left(x-\frac{T}{k}\right)+b\right) = f(kx+b) = f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)+b\right)$.

Отже, $\frac{T}{k}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

Що й треба було довести.

Приклад 5. Доведіть, що коли існують періоди T_1 функції $f(x)$ і T_2 функції $g(x)$ такі, що числа T_1 і T_2 є сумірними, то функції $f(x)$ і $g(x)$ мають спільний період.

IV. Періодичність тригонометричних функцій

Функція	Головний період	Доведення
$y = \sin x$	$T = 2\pi$	Оскільки $\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$, то число 2π є періодом функції $y = \sin x$. Покажемо, що не може бути меншого від 2π додатного періоду. Якщо число T є періодом функції $y = \sin x$, то рівність $\sin(x + T) = \sin x$ виконується при будь-якому дійсному значенні x, зокрема при $x = 0$. Тоді маємо: $\sin T = 0$. Звідси $T = \pi k$, $k \in Z$. З останньої рівності випливає, що будь-який період функції $y = \sin x$ може мати вигляд πk, $k \in Z$. Число π не буде періодом функції $y = \sin x$, бо $\sin(x + \pi) = -\sin x$, тому найменшим додатним періодом функції $y = \sin x$ є число 2π. Отже, число 2π — головний період функції $y = \sin x$.
$y = \cos x$	$T = 2\pi$	Оскільки $\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi)$, то число 2π є періодом функції $y = \cos x$. Покажемо, що не може бути меншого від 2π додатного періоду. Якщо число T є періодом функції $y = \cos x$, то рівність $\cos(x + T) = \cos x$ виконується при будь-якому дійсному значенні x, зокрема при $x = 0$. Тоді маємо: $\cos T = 1$. Звідси $T = 2\pi k$, $k \in Z$. З останньої рівності випливає, що будь-який період функції $y = \cos x$ може мати вигляд $2\pi k$, $k \in Z$. Найменшим додатним числом виду $2\pi k$, $k \in Z$, є число 2π, яке є періодом функції $y = \cos x$. Отже, число 2π — головний період функції $y = \cos x$.
$y = \operatorname{tg} x$	$T = \pi$	Оскільки $\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$, то число π є періодом функції $y = \operatorname{tg} x$. Покажемо, що не може бути меншого від π додатного періоду. Якщо число T є періодом функції $y = \operatorname{tg} x$, то рівність $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$ виконується при будь-якому дійсному значенні x, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, зокрема при $x = 0$. Тоді маємо: $\operatorname{tg} T = 0$. Звідси $T = \pi k$, $k \in Z$. З останньої рівності випливає, що будь-який період функції $y = \operatorname{tg} x$ може мати вигляд πk, $k \in Z$. Найменшим додатним числом виду πk, $k \in Z$, є число π, яке є періодом функції $y = \operatorname{tg} x$. Отже, число π — головний період функції $y = \operatorname{tg} x$.

Функція	Головний період	Доведення
$y = \operatorname{ctg} x$	$T = \pi$	Оскільки $\operatorname{ctg}(x-\pi) = \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x+\pi)$, то число π є періодом функції $y = \operatorname{ctg} x$. Покажемо, що не може бути меншого від π додатного періоду. Якщо число T є періодом функції $y = \operatorname{ctg} x$, то рівність $\operatorname{ctg}(x+T) = \operatorname{ctg} x$ виконується при будь-якому дійсному значенні x, $x \neq \pi n$, $n \in Z$ зокрема при $x = -\frac{T}{2}$. Тоді маємо: $\operatorname{ctg}\left(T - \frac{T}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{T}{2}\right)$; $\operatorname{ctg}\frac{T}{2} = -\operatorname{ctg}\frac{T}{2}$; $\operatorname{ctg}\frac{T}{2} = 0$. Звідси $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $T = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$. З останньої рівності випливає, що будь-який період функції $y = \operatorname{ctg} x$ може мати вигляд $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$. Найменшим додатним числом виду $\pi + 2\pi k$, $k \in Z$, є число π — період функції $y = \operatorname{ctg} x$. Отже, число π — головний період функції $y = \operatorname{ctg} x$.

Приклад 6. Обчисліть значення виразу $\sin 1020°$.

Приклад 7. Обчисліть $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$.

V. Знаходження періодів тригонометричних функцій

Узагальнимо вивчені означення і властивості функцій у вигляді алгоритму пошуку головного періоду деяких періодичних функцій.

1) Періодична функція $y = a$ (будь-яке дійсне ненульове число є періодом цієї функції), де a — довільне дійсне число, не має головного періоду.

2) Якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T, то функція $y = a \cdot f(x) + b$, де a і b — деякі числа, теж буде періодичною з періодом T.

3) Якщо T — головний період функції $f(x)$, то $\frac{T}{|k|}$ — головний період функції $f(kx + b)$.

4) Якщо T_1 — період функції $f(x)$, а T_2 — період функції $g(x)$, причому числа T_1 і T_2 є сумірними, тобто $\frac{T_1}{T_2} = \frac{a}{b}$, де $\frac{a}{b}$ — нескоротний дріб, у якого $a \in N$, $b \in N$, то функції

$y = f(x) + g(x)$ та $y = f(x) - g(x)$ — періодичні, з періодом $T = b \cdot T_1 = a \cdot T_2$, за умови, що $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$.

Зауваження. Якщо числа T_1 і T_2 несумірні, то це *не означає*, що функції $y = f(x) + g(x)$ та $y = f(x) - g(x)$ — неперіодичні.

Приклад 8. Знайдіть період функції $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

Історична довідка

На початку XVII ст. у розвитку тригонометрії з'явився новий напрямок — аналітичний. Якщо до цього головним завданням тригонометрії вважалося обчислення елементів геометричних фігур, тобто тригонометрія будувалася на геометричній основі, то у XVII – XIX ст. тригонометрія знаходить своє застосування в механіці, у фізиці, в техніці — там, де потрібно вивчати коливальний рух та інші періодичні процеси. Про періодичність тригонометричних функцій знав ще Франсуа Вієт, перші математичні дослідження якого стосувалися тригонометрії. Швейцарський математик Йоганн Бернуллі (1642 – 1727) також використовував символи тригонометричних функцій. І якщо розвиток алгебричної символіки, уведення від'ємних чисел сприяли розширенню поняття кута та дуги, то розвиток учення про коливальний рух, про звукові, світлові та електромагнітні хвилі призвело до того, що основним напрямком тригонометрії стало вивчення коливальних та інших періодичних процесів (Г.І. Глейзер «Історія математики в школі»).

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

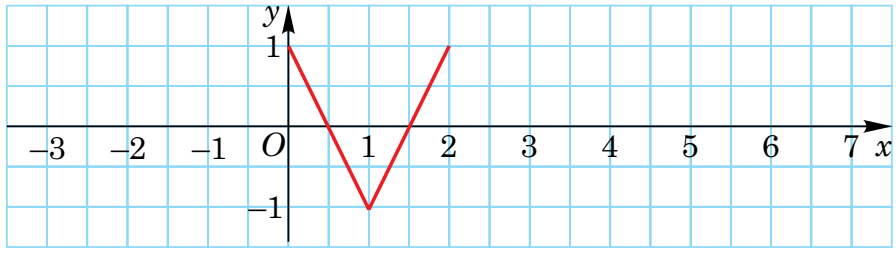
Задача 1. При гармонічних електромагнітних коливаннях у коливальному контурі сила струму на конденсаторі змінюється за законом $I = 10 \cdot \cos(100\pi t)$. Знайдіть період і частоту коливань та найменший час, через який сила струму дорівнюватиме нулю.

Задача 2. ***Олімпіадна задача.*** Чи існує неперіодична функція $f(x)$, яка визначена для всіх дійсних чисел така, що для будь-яких x виконується рівність $f(x + 1) = f(x + 1)f(x) + 1$?

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C

Рівень A

1. На рисунку побудовано частину графіка періодичної функції з періодом $T = 2$. Побудуйте графік цієї функції на відрізку $[-3; 7]$.



2. Доведіть, що число 2π є періодом функції:

1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = 3\sin x$; 3) $y = \dfrac{\cos x}{2}$; 4) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. Обчисліть:

1) $\sin 470°$; 2) $\cos(-750°)$; 3) $\cos 420°$; 4) $\sin(-390°)$.

4. Знайдіть значення виразу:

1) $\operatorname{ctg}\dfrac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\left(-\dfrac{9\pi}{4}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{10\pi}{3}\right)$; 4) $\cos\dfrac{7\pi}{3}$.

5. Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = \cos(4x + 1)$; 2) $f(x) = \operatorname{tg}(4x + 1)$;

3) $f(x) = \operatorname{ctg}(-5x + 2)$; 4) $f(x) = \sin 5\pi x$.

6. Опишіть, чим схожий орнамент на картині голландського художника М. Ешера із графіками періодичних функцій. Спробуйте побудувати подібні орнаменти самостійно.

Рівень B

1. Обчисліть значення виразу:

1) $\sin\dfrac{31\pi}{3} + \cos\left(-\dfrac{25\pi}{6}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\dfrac{19\pi}{4} - \cos 9\pi$;

3) $\sin^2\dfrac{29\pi}{6} + \operatorname{tg}^2\dfrac{29\pi}{6}$; 4) $\cos^2\dfrac{17\pi}{4} + \sin\left(-\dfrac{17\pi}{2}\right)$.

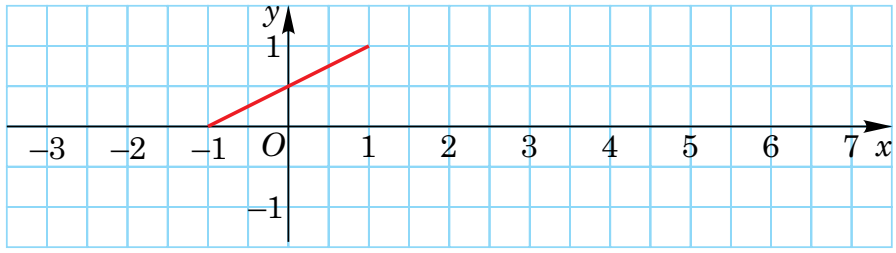
2. Доведіть, що:

1) число 2π є періодом функції $f(x) = \sin x + \cos 7x$;

2) число π є періодом функції $f(x) = \cos 4x + \sin 2x$.

Укажіть декілька інших періодів цих функцій.

3. На рисунку побудовано частину графіка періодичної функції з періодом $T = 2$. Побудуйте графік цієї функції на відрізку $[-3; 7]$.



4. Доведіть, що число π є періодом функції:

1) $y = \cos 2x - 1$; 2) $y = 3\sin 2x$; 3) $y = \dfrac{\cos 2x}{2}$; 4) $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)$;

5. Доведіть, що число $T = 1$ є періодом функції $f(x) = 4$.

6. Обчисліть:

1) $\cos 1190°$; 2) $\operatorname{tg}(-1470°)$; 3) $\sin(-1440°)$; 4) $\operatorname{ctg}(1110°)$.

7. Знайдіть значення виразу:

1) $\cos\dfrac{21\pi}{4}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{37\pi}{6}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{16\pi}{3}\right)$; 4) $\sin\dfrac{25\pi}{3}$.

8. Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = \cos\left(\dfrac{4}{5}x + 1\right)$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{4\pi x}{7} + 1\right)$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{5}{3}x + 2\right)$; 4) $f(x) = \sin\left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{2}{7}x\right)$.

9. Знайдіть період функції:

1) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg}\dfrac{4}{7}x$.

3) $f(x) = \sin 2x + \cos 4x$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 4x$.

10. Доведіть, що функція $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ є неперіодичною.

11. Покажіть, що число T не є періодом функції $f(x)$:

1) $f(x) = \sin x$, $T = -\pi$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $T = 2$.

12. Доведіть, що функція $f(x)$ не є періодичною:

1) $f(x) = \dfrac{x}{x}$; 2) $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$.

Рівень С

1. Покажіть, що число T є періодом функції $f(x)$:

1) $f(x) = \sin^2 x, T = \pi$; 2) $f(x) = \cos^3 x, T = -2\pi$;

3) $f(x) = |\cos x|, T = \pi$; 4) $f(x) = \left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|, T = \pi$.

2. Для довільної функції $f(x)$ доведіть періодичність функції:

1) $y = f(\operatorname{tg} x)$; 2) $y = f(\operatorname{ctg} x)$.

3. Знайдіть період функції:

1) $f(x)=\sin\frac{3x}{2}+\operatorname{tg}7x+\cos\frac{\pi x}{3}$; 2) $f(x)=\sin 3x+\cos\frac{3x}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{9x}{5}$.

4. При яких значеннях параметра a число π є періодом функції $f(x)=\frac{\sin x}{a-\cos x}$?

5. Перевірте правильність рівності $\sin\pi=\sin(\pi+\pi n)$, $n\in Z$. Чи можна з цього зробити висновок, що π є періодом функції $f(x)=\sin x$? Відповідь обґрунтуйте.

6. Покажіть, що коли функція f є періодичною з періодом T, то складена функція $y=g(f(x))$ також є періодичною з періодом T за умови, що $D(y)\neq\varnothing$.

7. ***Творче завдання.*** Напишіть програму, за допомогою якої можна знайти період суми двох періодичних функцій.

Рефлексія

1. Я розумію, що таке періодична функція.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

2. Я знаю основні властивості періодичних функцій.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

3. Я розумію, що таке сумірні та несумірні числа.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

4. Я розумію, що таке головний період періодичної функції.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

5. Я знаю головні періоди основних тригонометричних функцій.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

6. Я умію знаходити періоди функцій, користуючись властивостям періодичності тригонометричних функцій.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

7. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

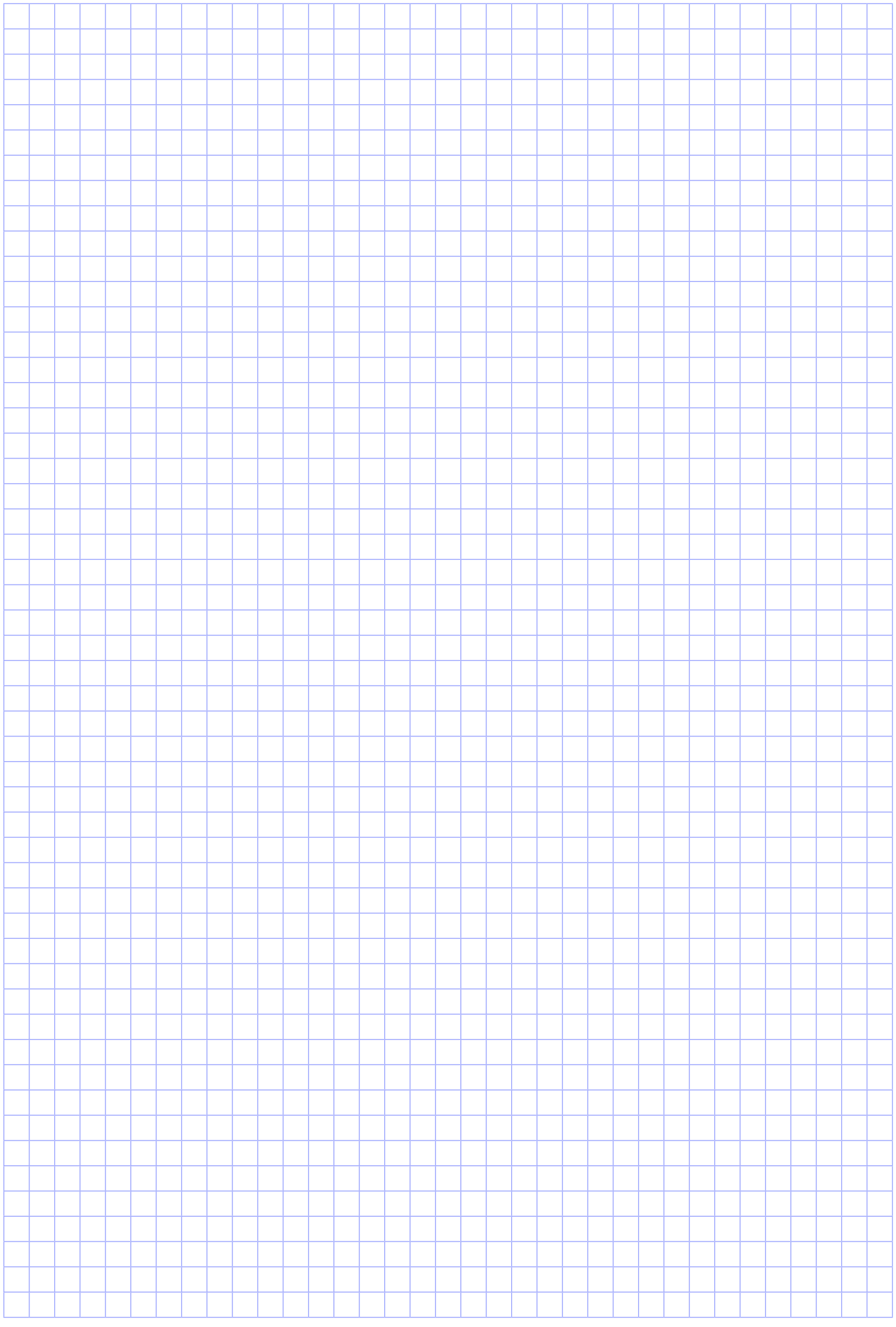
Можливі теми проєктів

1. Періодичні процеси в природі.

2. Доведення властивостей періодичних функцій.

3. Вивчення кардіограм та періодичні функції в медицині.

4. Циклічність економічних процесів.

5. Побудова орнаментів із використанням графіків періодичних функцій.

6. Коливання маятника та періодичні функції.
7. Періодична зміна фаз Місяця.
8. Функції «Ціла та дробова частини числа» та їхні графіки.