

Урок 5. **Періодичність тригонометричних функцій****Тип уроку:** урок засвоєння нових знань.**План уроку**

1. Сумірні та несумірні числа. Періодичність функцій.
2. Періодичність тригонометричних функцій.
3. Знаходження періодів тригонометричних функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень**Учень/учениця:**

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П];

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 3) Теорію подавайте стисло, з використанням таблиць, опорних конспектів.
- 4) Доведення усіх властивостей періодичних функцій і теорем наведені в ілюстративних прикладах. Можете обрати, які з властивостей потрібно доводити, залежно від можливостей класу. Проте, зверніть увагу, що деякі із доведень спираються на доведення інших властивостей.
- 5) Історичні відомості запропонуйте учням/ученицям на домашнє опрацювання.
- 6) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.

7) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

8) Сплануйте проведення останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичних задач і тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи помічали ви, що багато життєвих ситуацій повторюються з часом?

2) Назвіть які-небудь явища природи або повсякденного життя, що повторюються періодично.

3) Що спільного між музикою, серцебиттям та морськими хвилями?

4) Чи можна математично описати рух маятника або зміни пір року?

5) Як виглядало би наше життя, якби не було періодичних процесів?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть значення виразу $\cos \frac{7\pi}{6}$.

Відповідь. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Укажіть правильні рівності:

1) $|\cos 3| = \cos 3$; 2) $|\cos 3| = -\cos 3$; 3) $|\cos 3| = \sin 3$; 4) $|\cos 3| = -\sin 3$.

Відповідь. Рівність 2).

3. Обчисліть значення виразу $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.

Відповідь. 0,5.

4. Знайдіть значення виразу $2\sin\frac{\pi}{6} - 3\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Відповідь. -0,5.

5. Чому дорівнює значення виразу $\sqrt[3]{\sqrt{52}-5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{52}+5}$?

Відповідь. 3.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. При гармонічних електромагнітних коливаннях у коливальному контурі, сила струму на конденсаторі змінюється за законом $I = 10 \cdot \cos(100\pi t)$. Знайдіть період і частоту коливань та найменший час, через який сила струму дорівнюватиме нулю.

Задача 2. Олімпіадна задача. Чи існує неперіодична функція $f(x)$, яка визначена для всіх дійсних чисел така, що для будь-яких x виконується рівність $f(x + 1) = f(x + 1)f(x) + 1$?

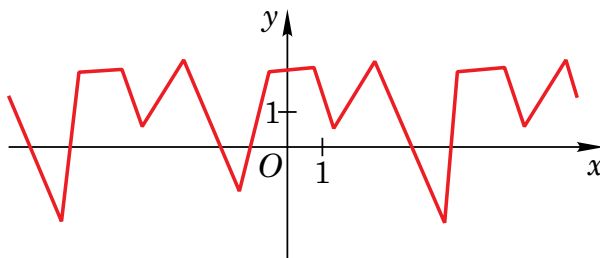
III. Періодичність функцій. Сумірні та несумірні числа (10–15 хв)

У нашому світі багато явищ повторюються: день і ніч, пори року, ритм серця, хвилі на воді. Все це — приклади періодичних явищ. Математика допомагає описувати такі явища за допомогою періодичних функцій. Періодичні функції — це математичні моделі повторюваних процесів, які зустрічаються всюди: у природі, у техніці, в музиці, в медицині. Періодичні функції допомагають передбачати й аналізувати явища, які мають циклічний характер.

Як передбачити чергову хвилю на морі або коли знову буде повний Місяць? Це можливо завдяки періодичним функціям — темі, яку ми сьогодні вивчаємо.

Означення. Функцію $f(x)$ називають **періодичною**, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x з області визначення функції $f(x)$ виконуються рівності $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$. Число T називають **періодом** функції $f(x)$.

На рисунку побудовано графік періодичної функції.



Основні властивості періодичних функцій

1. Якщо число T є періодом функції $f(x)$, то і число $(-T)$ також є періодом функції $f(x)$.
2. Якщо числа T_1 і T_2 є періодами функції $f(x)$, причому $T_1 + T_2 \neq 0$, то число $T_1 + T_2$ також є періодом функції $f(x)$.
3. Якщо число T є періодом функції $f(x)$, то будь-яке число виду nT , де $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, також є її періодом.
4. Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{k}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$ (b — деяке число).

Сформулюємо ще декілька означень.

Означення 1. Якщо серед усіх періодів функції $f(x)$ існує найменший додатний період, то його називають **головним періодом** функції $f(x)$.

Означення 2. Якщо число T є головним періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{|k|}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

Означення 3. Число T , яке є як періодом функції $f(x)$, так і періодом функції $g(x)$, називають **спільним періодом** функцій $f(x)$ і $g(x)$.

Означення 4. Додатні числа a і b називають **сумірними**, якщо $\frac{a}{b}$ — раціональне число. Якщо $\frac{a}{b}$ — ірраціональне число, то числа a і b є **несумірними**.

Теорема. Якщо існує період T_1 функції $f(x)$ і період T_2 функції $g(x)$, такі, що числа T_1 і T_2 є сумірними, то функції $f(x)$ і $g(x)$ мають спільний період.

Ілюстративні приклади (8–10 хв)

- 6.** Доведіть, що коли число T є періодом функції $f(x)$, то і число $(-T)$ також є періодом функції $f(x)$.

Доведення. Оскільки T є періодом функції $f(x)$, то для будь-якого x з області визначення функції $f(x)$ виконується рівність $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$, але тоді рівність $f(x - (-T)) = f(x) = f(x + (-T))$ також правильна.

Отже, $-T$ також є періодом функції $f(x)$.

Що й треба було довести.

- 7.** Доведіть, що коли числа T_1 і T_2 є періодами функції $f(x)$, причому $T_1 + T_2 \neq 0$, то число $T_1 + T_2$ також є періодом функції $f(x)$.

Доведення. Для будь-якого x з області визначення функції $f(x)$ будуть виконуватися рівності:

$$1) f(x) = f(x + T_1) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + (T_1 + T_2));$$

$$2) f(x) = f(x - T_1) = f((x - T_1) - T_2) = f(x - (T_1 + T_2)).$$

Це означає, що для будь-якого x з області визначення функції $f(x)$ виконуються рівності $f(x - (T_1 + T_2)) = f(x) = f(x + (T_1 + T_2))$.

Отже, $T_1 + T_2$ також є періодом функції $f(x)$. Що й треба було довести.

- 8.** Доведіть, що коли число T є періодом функції $f(x)$, то будь-яке число виду nT , де $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, також є її періодом.

Доведення. Якщо число T є періодом функції $f(x)$, то число $T + T = 2T$ також є періодом цієї функції (див. попередній ілюстративний приклад). Міркуючи анало-

гічно, приходимо до висновку, що будь-яке число виду nT , де $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, — період функції $f(x)$. Що й треба було довести.

9. Доведіть, що коли число T є періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{k}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

Доведення. Для будь-якого x з області визначення функції $y = f(kx + b)$ можна записати:

$$1) f(kx + b) = f((kx + b) + T) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + b\right);$$

$$2) f(kx + b) = f((kx + b) - T) = f\left(k\left(x - \frac{T}{k}\right) + b\right).$$

Це означає, що для будь-якого x з області визначення функції $f(x)$ буде виконуватися рівність $f\left(k\left(x - \frac{T}{k}\right) + b\right) = f(kx + b) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + b\right)$.

Отже, $\frac{T}{k}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

Що й треба було довести.

10. Доведіть, що коли існують періоди T_1 функції $f(x)$ і T_2 функції $g(x)$ такі, що числа T_1 і T_2 є сумірними, то функції $f(x)$ і $g(x)$ мають спільний період.

Доведення. Оскільки періоди T_1 і T_2 є сумірними, то $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Звід-

си $T_1 \cdot n = T_2 \cdot m$. Тоді за властивістю, яка була доведена в ілюстративному прикладі 8, число $T = T_1 \cdot n = T_2 \cdot m$ є періодом як функції $f(x)$, так і функції $g(x)$.

Що й треба було довести.

IV. Періодичність тригонометричних функцій (7–8 хв)

Функція	Головний період	Доведення
$y = \sin x$	$T = 2\pi$	Оскільки $\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$, то число 2π є періодом функції $y = \sin x$. Покажемо, що не може бути меншого від 2π додатного періоду. Якщо число T є періодом функції $y = \sin x$, то рівність $\sin(x + T) = \sin x$ виконується при будь-якому дійсному значенні x , зокрема при $x = 0$. Тоді маємо: $\sin T = 0$. Звідси $T = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. З останньої рівності випливає, що будь-який період функції $y = \sin x$ може мати вигляд πk , $k \in \mathbb{Z}$. Число π не буде періодом функції $y = \sin x$, бо $\sin(x + \pi) = -\sin x$, тому найменшим додатним періодом функції $y = \sin x$ є число 2π . Отже, число 2π — головний період функції $y = \sin x$.

Функція	Головний період	Доведення
$y = \cos x$	$T = 2\pi$	Оскільки $\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi)$, то число 2π є періодом функції $y = \cos x$. Покажемо, що не може бути меншого від 2π додатного періоду. Якщо число T є періодом функції $y = \cos x$, то рівність $\cos(x + T) = \cos x$ виконується при будь-якому дійсному значенні x, зокрема при $x = 0$. Тоді маємо: $\cos T = 1$. Звідси $T = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. З останньої рівності випливає, що будь-який період функції $y = \cos x$ може мати вигляд $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Найменшим додатним числом виду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є число 2π, яке є періодом функції $y = \cos x$. Отже, число 2π — головний період функції $y = \cos x$.
$y = \operatorname{tg} x$	$T = \pi$	Оскільки $\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi)$, то число π є періодом функції $y = \operatorname{tg} x$. Покажемо, що не може бути меншого від π додатного періоду. Якщо число T є періодом функції $y = \operatorname{tg} x$, то рівність $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$ виконується при будь-якому дійсному значенні x, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, зокрема при $x = 0$. Тоді маємо: $\operatorname{tg} T = 0$. Звідси $T = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. З останньої рівності випливає, що будь-який період функції $y = \operatorname{tg} x$ може мати вигляд πk, $k \in \mathbb{Z}$. Найменшим додатним числом виду πk, $k \in \mathbb{Z}$, є число π, яке є періодом функції $y = \operatorname{tg} x$. Отже, число π — головний період функції $y = \operatorname{tg} x$.
$y = \operatorname{ctg} x$	$T = \pi$	Оскільки $\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi)$, то число π є періодом функції $y = \operatorname{ctg} x$. Покажемо, що не може бути меншого від π додатного періоду. Якщо число T є періодом функції $y = \operatorname{ctg} x$, то рівність $\operatorname{ctg}(x + T) = \operatorname{ctg} x$ виконується при будь-якому дійсному значенні x, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ зокрема при $x = -\frac{T}{2}$. Тоді маємо: $\operatorname{ctg}\left(T - \frac{T}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{T}{2}\right)$; $\operatorname{ctg} \frac{T}{2} = -\operatorname{ctg} \frac{T}{2}$; $\operatorname{ctg} \frac{T}{2} = 0$. Звідси $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $T = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. З останньої рівності випливає, що будь-який період функції $y = \operatorname{ctg} x$ може мати вигляд $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Найменшим додатним числом виду $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є число π — період функції $y = \operatorname{ctg} x$. Отже, число π — головний період функції $y = \operatorname{ctg} x$.

Ілюстративні приклади

- 11.** Обчисліть значення виразу $\sin 1020^\circ$.

Розв'язання. $\sin 1020^\circ = \sin(3 \cdot 360^\circ - 60^\circ) = \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. Обчисліть $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(-4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

13. Знайдіть значення виразу $\operatorname{ctg} \frac{21\pi}{4}$.

Розв'язання. $\operatorname{ctg} \frac{21\pi}{4} = \operatorname{ctg}\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$.

Відповідь. 1.

14. Доведіть, що число 8π є періодом функції $y = \operatorname{tg} \frac{x}{8}$.

Доведення. Для будь-якого x з області визначення функції $y = \operatorname{tg} \frac{x}{8}$ є правильни-

ми рівності: $\operatorname{tg}\left(\frac{x+8\pi}{8}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{8} + \pi\right) = \operatorname{tg} \frac{x}{8}$.

Отже, $\operatorname{tg}\left(\frac{x-8\pi}{8}\right) = \operatorname{tg} \frac{x}{8} = \operatorname{tg}\left(\frac{x+8\pi}{8}\right)$.

Тому число 8π є періодом функції $y = \operatorname{tg} \frac{x}{8}$, за означенням періодичної функції.

V. Знаходження періодів тригонометричних функцій

Узагальнимо вивчені означення і властивості функцій у вигляді алгоритму пошуку головного періоду деяких періодичних функцій.

1) Періодична функція $y = a$ (будь-яке дійсне ненульове число є періодом цієї функції), де a — довільне дійсне число, не має головного періоду.

2) Якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом T , то функція $y = a \cdot f(x) + b$, де a і b — деякі числа, теж буде періодичною з періодом T .

3) Якщо T — головний період функції $f(x)$, то $\frac{T}{|k|}$ — головний період функції $f(kx + b)$.

4) Якщо T_1 — період функції $f(x)$, а T_2 — період функції $g(x)$, причому числа T_1 і T_2 є сумірними, тобто $\frac{T_1}{T_2} = \frac{a}{b}$, де $\frac{a}{b}$ — нескоротний дріб, у якого $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, то функції $y = f(x) + g(x)$ та $y = f(x) - g(x)$ — періодичні, з періодом $T = b \cdot T_1 = a \cdot T_2$, за умови, що $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$.

Зауваження. Якщо числа T_1 і T_2 несумірні, то це не означає, що функції $y = f(x) + g(x)$ та $y = f(x) - g(x)$ — неперіодичні.

Ілюстративні приклади

- 15.** Знайдіть період функції $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$.

Розв'язання. За властивістю, якщо число T є головним періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{|k|}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

Головним періодом функції $y = \operatorname{tg} x$ є число π , тому головним періодом функції $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$ буде число $\pi : \frac{1}{3} = 3\pi$.

Відповідь. 3π .

- 16.** Знайдіть період функції $y = \cos\left(4 - \frac{3\pi x}{4}\right)$.

Розв'язання. За властивістю, якщо число T є головним періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{|k|}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.

Головним періодом функції $y = \cos x$ є число 2π , тому головним періодом функції $y = \cos\left(4 - \frac{3\pi x}{4}\right)$ буде число $2\pi : \left|-\frac{3\pi}{4}\right| = \frac{8}{3}$.

Відповідь. $\frac{8}{3}$.

- 17.** Знайдіть період функції $y = \sin\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + 2\operatorname{ctg}(3 - 2x)$.

Розв'язання.

1) Дану функцію можна подати у вигляді суми двох періодичних функцій:

$f(x) = \sin\left(\frac{3x}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$, головний період якої $T_1 = 2\pi : \frac{3}{4} = \frac{8\pi}{3}$, та $g(x) = \operatorname{ctg}(3 - 2x)$, го-

ловний період якої $T_2 = \pi : |-2| = \frac{\pi}{2}$.

2) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{8\pi}{3} : \frac{\pi}{2} = \frac{16}{3}$ — є сумірним числом, тому період даної функції:

$$T = 3T_1 = 16T_2 = 8\pi.$$

Відповідь. 8π .

Історична довідка

На початку XVII ст. у розвитку тригонометрії з'явився новий напрямок — аналітичний. Якщо до цього головним завданням тригонометрії вважалося обчислення елементів геометричних фігур, тобто тригонометрія будувалася на геометричній основі, то у XVII – XIX ст. тригонометрія знаходить своє застосування в механіці, у фізиці, в техніці — там, де потрібно вивчати коливальний рух та інші періодичні процеси. Про періодичність тригонометричних функцій знав ще Франсуа Вієт, перші математичні дослідження якого стосувалися тригонометрії. Швейцарський математик Йоганн Бернуллі (1642 – 1727) також використовував символи тригонометричних функцій. І якщо розвиток алгебричної символіки, введення від'ємних чисел сприяли розширенню поняття кута та дуги, то розвиток учення про коливальний рух, про звукові, світло-

ві та електромагнітні хвилі призвело до того, що основним напрямком тригонометрії стало вивчення коливальних та інших періодичних процесів (Г.І. Глейзер «Історія математики в школі»).

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. При гармонічних електромагнітних коливаннях у коливальному контурі сила струму на конденсаторі змінюється за законом $I = 10 \cdot \cos(100\pi t)$. Знайдіть період і частоту коливань та найменший час, через який сила струму дорівнюватиме нулю.

Розв'язання. 1) Період функції $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50} = 0,02$ (с).

2) Частота коливань $\omega = \frac{1}{T} = 50$ (Гц).

3) $10 \cdot \cos(100\pi t) = 0$, $\cos(100\pi t) = 0$,

$$100\pi t = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, t = \frac{1}{200} + \frac{n}{100}, n \in \mathbb{Z}.$$

Отже, найменший час, коли сила струму дорівнюватиме нулю, становить $\frac{1}{200}$ (с) = 0,005 (с).

Відповідь. 0,02 с; 50 Гц; 0,005 с.

Задача 2. Олімпіадна задача. Чи існує неперіодична функція $f(x)$, яка визначена для всіх дійсних чисел така, що для будь-яких x виконується рівність $f(x+1) = f(x+1)f(x) + 1$?

Розв'язання. 1) Якщо $f(x) = 1$, то $f(x+1) = f(x+1) + 1$, що неможливо.

2) Розглянемо рівність: $f(x+1) = f(x+1)f(x) + 1$, $f(x+1) - f(x+1)f(x) = 1$,

$$f(x+1)(1 - f(x)) = 1, f(x+1) = \frac{1}{1 - f(x)}.$$

$$3) f(x+3) = \frac{1}{1 - f(x+2)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - f(x+1)}} = \frac{f(x+1) - 1}{f(x+1)} = 1 - \frac{1}{f(x+1)} = f(x).$$

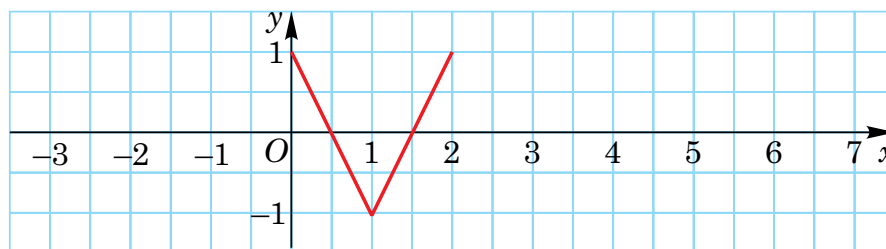
Отже, для будь-якої функції $f(x)$, яка задовольняє задану умову, число 3 є періодом.

Відповідь. Не існує.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. На рисунку побудовано частину графіка періодичної функції з періодом $T = 2$. Побудуйте графік цієї функції на відрізку $[-3; 7]$.



2. Доведіть, що число 2π є періодом функції:

1) $y = \cos x - 1$; 2) $y = 3 \sin x$; 3) $y = \frac{\cos x}{2}$; 4) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

3. Обчисліть:

1) $\sin 470^\circ$; 2) $\cos(-750^\circ)$; 3) $\cos 420^\circ$; 4) $\sin(-390^\circ)$.

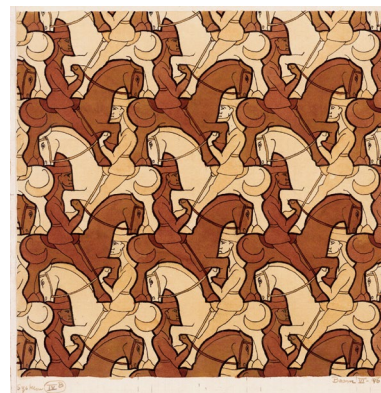
4. Знайдіть значення виразу:

1) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$; 2) $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$; 3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$; 4) $\cos \frac{7\pi}{3}$.

5. Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = \cos(4x + 1)$; 2) $f(x) = \operatorname{tg}(4x + 1)$;
3) $f(x) = \operatorname{ctg}(-5x + 2)$; 4) $f(x) = \sin 5\pi x$.

6. Опишіть, чим схожий орнамент на картині голландського художника М. Ешера із графіками періодичних функцій. Спробуйте побудувати подібні орнаменти самостійно.



Рівень В

1. Обчисліть значення виразу:

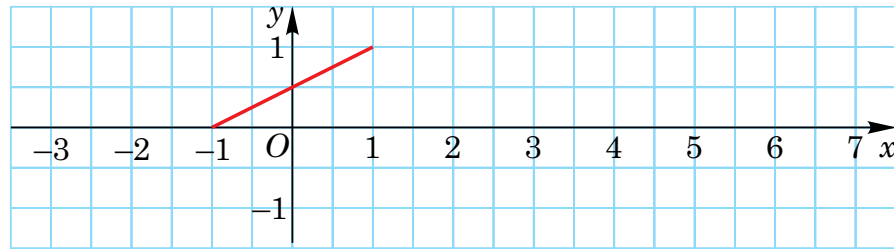
1) $\sin \frac{31\pi}{3} + \cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$; 2) $\operatorname{ctg} \frac{19\pi}{4} - \cos 9\pi$;
3) $\sin^2 \frac{29\pi}{6} + \operatorname{tg}^2 \frac{29\pi}{6}$; 4) $\cos^2 \frac{17\pi}{4} + \sin\left(-\frac{17\pi}{2}\right)$.

2. Доведіть, що:

1) число 2π є періодом функції $f(x) = \sin x + \cos 7x$;
2) число π є періодом функції $f(x) = \cos 4x + \sin 2x$.

Укажіть декілька інших періодів цих функцій.

- 3.** На рисунку побудовано частину графіка періодичної функції з періодом $T = 2$. Побудуйте графік цієї функції на відрізку $[-3; 7]$.



- 4.** Доведіть, що число π є періодом функції:

1) $y = \cos 2x - 1$; 2) $y = 3 \sin 2x$; 3) $y = \frac{\cos 2x}{2}$; 4) $y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$;

- 5.** Доведіть, що число $T = 1$ є періодом функції $f(x) = 4$.

- 6.** Обчисліть:

1) $\cos 1190^\circ$; 2) $\operatorname{tg}(-1470^\circ)$;
3) $\sin(-1440^\circ)$; 4) $\operatorname{ctg}(1110^\circ)$.

- 7.** Знайдіть значення виразу:

1) $\cos \frac{21\pi}{4}$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{37\pi}{6}\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$; 4) $\sin \frac{25\pi}{3}$.

- 8.** Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = \cos\left(\frac{4}{5}x + 1\right)$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi x}{7} + 1\right)$;
3) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{5}{3}x + 2\right)$; 4) $f(x) = \sin\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{7}x\right)$.

- 9.** Знайдіть період функції:

1) $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} \frac{4}{7}x$.
3) $f(x) = \sin 2x + \cos 4x$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 4x$.

- 10.** Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x-2}$ є неперіодичною.

- 11.** Покажіть, що число T не є періодом функції $f(x)$:

1) $f(x) = \sin x$, $T = -\pi$; 2) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $T = 2$.

- 12.** Доведіть, що функція $f(x)$ не є періодичною:

1) $f(x) = \frac{x}{x}$; 2) $f(x) = \cos \frac{1}{x}$.

Рівень С

- 1.** Покажіть, що число T є періодом функції $f(x)$:

1) $f(x) = \sin^2 x$, $T = \pi$; 2) $f(x) = \cos^3 x$, $T = -2\pi$;
3) $f(x) = |\cos x|$, $T = \pi$; 4) $f(x) = \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|$, $T = \pi$.

- 2.** Для довільної функції $f(x)$ доведіть періодичність функції:

1) $y = f(\operatorname{tg} x)$; 2) $y = f(\operatorname{ctg} x)$.

3. Знайдіть період функції:

1) $f(x) = \sin \frac{3x}{2} + \operatorname{tg} 7x + \cos \frac{\pi x}{3}$;

2) $f(x) = \sin 3x + \cos \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{9x}{5}$.

4. При яких значеннях параметра a число π є періодом функції $f(x) = \frac{\sin x}{a - \cos x}$?

5. Перевірте правильність рівності $\sin \pi = \sin(\pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Чи можна з цього зробити висновок, що π є періодом функції $f(x) = \sin x$? Відповідь обґрунтуйте.

6. Покажіть, що коли функція f є періодичною з періодом T , то складена функція $y = g(f(x))$ також є періодичною з періодом T за умови, що $D(y) \neq \emptyset$.

7. **Творче завдання.** Напишіть програму, за допомогою якої можна знайти період суми двох періодичних функцій.

VIII. Рефлексія (2 хв)

1. Я розумію, що таке періодична функція.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я знаю основні властивості періодичних функцій.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я розумію, що таке сумірні та несумірні числа.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я розумію, що таке головний період періодичної функції.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

5. Я знаю головні періоди основних тригонометричних функцій.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

6. Я умію знаходити періоди функцій, користуючись властивостям періодичності тригонометричних функцій.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

7. Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

1. Періодичні процеси в природі.

2. Доведення властивостей періодичних функцій.

3. Вивчення кардіограм та періодичні функції в медицині.

4. Циклічність економічних процесів.

5. Побудова орнаментів із використанням графіків періодичних функцій.

6. Коливання маятника та періодичні функції.
7. Періодична зміна фаз Місяця.
8. Функції «Ціла та дробова частини числа» та їхні графіки.