

10

Тема 4.

Тригонометричні функції

Урок 6. Урок–практикум. Розв’язування задач. Обчислення періодів функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви навчитеся:

- 1) обчислювати значення тригонометричних виразів з урахуванням періодів функцій;
- 2) доводити, що певні числа є періодами функцій;
- 3) доводити неперіодичність функцій;
- 4) знаходити головні періоди тригонометричних функцій;
- 5) використовувати набуті знання для розв’язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть кут α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, такий, щоб поворот початкового радіуса на цей кут збігався з поворотом на кут -460° .
2. Укажіть найбільше значення виразу $2 + \cos \alpha$.
3. Чому дорівнює радіанна міра кутів рівнобедреного прямокутного трикутника?
4. Визначте знак виразу $\operatorname{tg} 150^\circ \cdot \cos 500^\circ$.
5. Знайдіть головний період функції $y = 0,3 \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{8}x - 2 \right)$.

III. Обчислення значень тригонометричних виразів з урахуванням періодів функцій

Тригонометричні функції є періодичними, а це означає, що їхні значення повторюються через певні проміжки. Саме ця властивість дозволяє значно спростити обчислення виразів.

Приклад 1. Обчисліть значення виразу $\cos 930^\circ$.

[illegible]

Приклад 2. Обчисліть значення виразу $\sin 29,5\pi$.

[illegible]

Приклад 3. Обчисліть: $\operatorname{ctg}(-405^\circ) + \operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

[illegible]

IV. Розв'язування задач на доведення того факту, що певні числа є періодами функцій

Крім тригонометричних функцій існують інші періодичні функції. Наведемо декілька означень.

Означення 1. Цілою частиною числа x (позначають $[x]$) називають найбільше ціле число, яке не перевищує x .

Наприклад: $[3,4] = 3$; $[-3,4] = -4$.

Означення 2. Дробовою частиною числа x (позначають $\{x\}$) називають число $x - [x]$.

Наприклад: $\{3,4\} = 3,4 - 3 = 0,4$; $\{-3,4\} = -3,4 - (-4) = 0,6$.

Теорема. Будь-яке ціле число, крім нуля, є періодом функції $y = \{x\}$.

Доведення. Областю визначення функції $y = \{x\}$ є множина всіх дійсних чисел.

Доведемо, що $\{x + c\} = \{x\}$, де $c \in \mathbb{Z}$.

Скористаємось очевидною тотожністю $[x + c] = [x] + c$, де $c \in \mathbb{Z}$.

$$\{x + c\} = x + c - [x + c] = x + c - [x] - c = x - [x] = \{x\}.$$

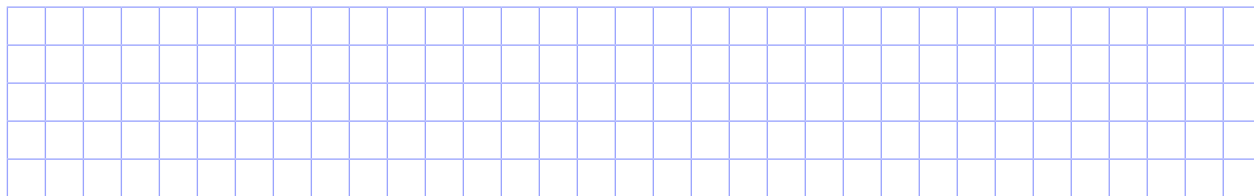
Головним періодом функції $y = \{x\}$ є число 1.

Також періодичною функцією є функція $y = a$, де a — довільне дійсне число. Періодом цієї функції є будь-яке дійсне число, крім нуля. Це означає, що функція $y = a$ не має головного періоду.

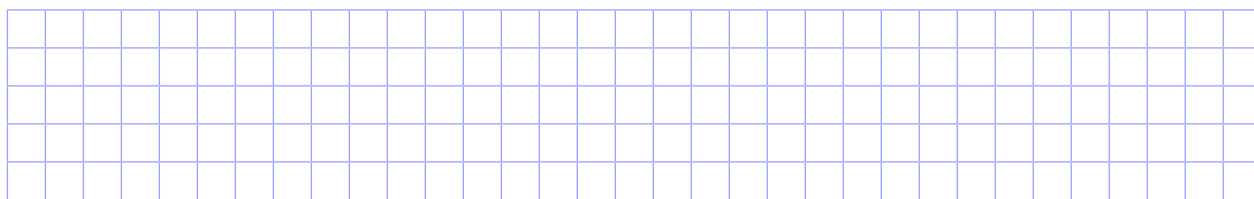
При розв'язуванні задач необхідно доводити, що певні числа є періодами функцій, а також доводити, що функція неперіодична.

Наведемо декілька прикладів.

Приклад 4. Доведіть, що число $T = \frac{1}{4}$ є періодом функції $f(x) = \frac{1}{\{4x\}}$.



Приклад 5. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x-1}$ є неперіодичною.



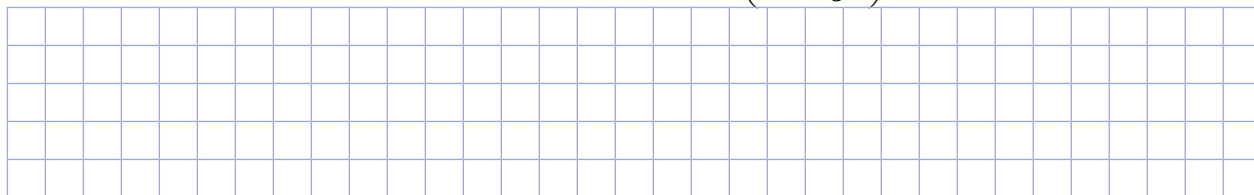
V. Знаходження головних періодів тригонометричних функцій

Нагадаємо властивості періодичних функцій.

1. Періодична функція $y = a$, де a — довільне дійсне число, не має головного періоду.
2. Якщо функція $y = f(x)$ періодична з головним періодом T , то функція $y = a \cdot f(x) + b$, де a і b — деякі числа, також періодична, з головним періодом T .
3. Якщо T — головний період функції $f(x)$, то $\frac{T}{|k|}$ — головний період функції $f(kx + b)$.
4. Якщо T_1 — період функції $f(x)$, а T_2 — період функції $g(x)$, причому числа T_1 і T_2 є сумірними, тобто $\frac{T_1}{T_2} = \frac{a}{b}$, де $\frac{a}{b}$ — нескоротний дріб, у якого $a \in \mathbb{N}$ і $b \in \mathbb{N}$, то функції $y = f(x) + g(x)$ і $y = f(x) - g(x)$ — періодичні, з періодом $T = b \cdot T_1 = a \cdot T_2$, за умови, що $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$.

Зауваження. Якщо числа T_1 і T_2 несумірні, то це не означає, що функції $y = f(x) + g(x)$ та $y = f(x) - g(x)$ — неперіодичні.

Приклад 6. Знайдіть головний період функції $y = \operatorname{tg}\left(4 - \frac{4\pi x}{5}\right)$.



Приклад 7. Нехай $f_1, f_2, \dots, f_k$ — періодичні функції з періодами $T_1, T_2, \dots, T_k$ відповідно. Якщо кожний період T_i ($i = 1, 2, \dots, k$) можна подати у вигляді

$$T_1 = \frac{n_1}{m_1}t, \quad T_2 = \frac{n_2}{m_2}t, \quad \dots, \quad T_k = \frac{n_k}{m_k}t,$$

де $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $m_i \in \mathbb{N}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то число $T = \frac{\text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_k)}{\text{НСД}(m_1, m_2, \dots, m_k)}t$

є спільним періодом усіх даних функцій. Доведіть це твердження.

Доведення. Оскільки $\text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_k) : n_i$, а $m_i : \text{НСК}(m_1, m_2, \dots, m_k)$, де $i = 1, 2, \dots, k$, то $T : T_i = l_i$, $l_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, тобто $T = T_1 l_1, T = T_2 l_2, \dots, T = T_k l_k$.

Отже, T — спільний період даних функцій. Що й треба було довести.

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. У концертній залі звучать два музичних інструменти, які створюють звукові коливання на різних частотах. У деякій точці залу рівняння звукових коливань можна описати функціями $f(t) = 2\sin(440\pi t)$ та $g(x) = \sin(660\pi t)$. Знайдіть період суми цих коливань.

Задача 2. Олімпіадна задача. У ряду чисел записано 1999 чисел. Перше число дорівнює 1. Відомо, що кожне число, окрім першого та останнього, дорівнює сумі двох сусідніх. Знайдіть останнє число.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть:

1) $\sin 1110^\circ$; 2) $\text{ctg}(-1200^\circ)$; 3) $\cos \frac{47\pi}{6}$; 4) $\sin \frac{57\pi}{4}$.

2. Обчисліть:

1) $4\sin 810^\circ + 3\cos 720^\circ - 3\sin 630^\circ + 5\cos 900^\circ$;
2) $5\text{tg} 540^\circ + 2\cos 1170^\circ + 4\sin 990^\circ - 3\cos 540^\circ$.

3. Доведіть, що число π є періодом функції:

1) $y = 1 - \cos 2x$; 2) $y = 5 - 3\sin 2x$; 3) $y = \frac{\text{tg} x}{2}$; 4) $y = A\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

4. Покажіть, що число T не є періодом функції $f(x)$:

1) $f(x) = \sin x$, $T = \pi$; 2) $f(x) = \text{ctg} x$, $T = \frac{\pi}{2}$;
3) $f(x) = \text{tg} x$, $T = \frac{\pi}{2}$; 4) $f(x) = \text{ctg} x$, $T = 1$.

5. Доведіть, що число T є періодом функції $f(x)$:

1) $f(x) = \cos 2x$, $T = \pi$;

2) $f(x) = \operatorname{ctg} \pi x$, $T = 2$;

3) $f(x) = \sin(5x - 1)$, $T = \frac{4\pi}{5}$;

4) $f(x) = \cos(3x + 2)$, $T = -\frac{4\pi}{3}$.

6. Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = \sin\left(-\frac{1}{3}x + 1\right)$;

2) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}x + 1\right)$;

3) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{5}x + 2\right)$;

4) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{5}\pi x\right)$.

Рівень В

1. Обчисліть значення виразу:

1) $\operatorname{tg} \frac{41\pi}{4} - \operatorname{ctg}\left(-\frac{29\pi}{7}\right)$;

2) $\operatorname{tg} \frac{23\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{9\pi}{4}$;

3) $\cos^2 \frac{29\pi}{6} - \operatorname{ctg}^2 \frac{29\pi}{6}$;

4) $\sin^2 \frac{21\pi}{4} - \sin\left(-\frac{19\pi}{2}\right)$.

2. Доведіть, що:

1) число π є періодом функції $f(x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x$;

2) число 2π є періодом функції $f(x) = \cos 4x - \sin x$.

Укажіть декілька інших періодів заданих функцій.

3. Доведіть, що число T є періодом функції $f(x)$:

1) $f(x) = \cos 2x$, $T = \pi$;

2) $f(x) = \left|\operatorname{tg} \frac{x}{4}\right|$, $T = 4\pi$;

3) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$, $T = 4$;

4) $f(x) = \sin^6 4x$, $T = \frac{\pi}{4}$.

4. Доведіть, що число T є періодом функції $f(x)$:

1) $f(x) = \{-4x + 3\}$, $T = \frac{1}{4}$;

2) $f(x) = \left\{\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right\}$, $T = 3$.

5. Доведіть, що число $T = 5,2$ є періодом функції $f(x) = -10$.

6. Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = \sin 2\pi x$;

2) $f(x) = \{-\sqrt{2}x\}$;

3) $f(x) = \left\{\pi x + \frac{1}{\pi}\right\}$;

4) $f(x) = \cos \sqrt{3}x$.

7. Заповніть таблицю:

α	$\frac{13\pi}{4}$	-420°	-810°	$-\frac{55\pi}{6}$	$-\frac{21\pi}{2}$	$-11\frac{1}{3}\pi$	$-7\frac{5}{6}\pi$	$\frac{55\pi}{6}$
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								

α	$\frac{13\pi}{4}$	-420°	-810°	$-\frac{55\pi}{6}$	$-\frac{21\pi}{2}$	$-11\frac{1}{3}\pi$	$-7\frac{5}{6}\pi$	$\frac{55\pi}{6}$
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

8. Знайдіть головний період функції:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \sin\left(3 - \frac{5\pi}{6}x\right); & 2) f(x) = \frac{8}{7}\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi x}{9} - 1\right); \\ 3) f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(3x - 2); & 4) f(x) = \frac{3}{4}\cos\left(\frac{3}{4} - 6x\right). \end{array}$$

9. Знайдіть період функції:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 3x; & 2) f(x) = \sin 3x + \cos \frac{4}{7}x; \\ 3) f(x) = \{2x\} + \cos 4\pi x; & 4) f(x) = \{3x\} + \operatorname{ctg} 4\pi x. \end{array}$$

10. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{3}{5-x}$ — неперіодична.

11. Покажіть, що число T є періодом функції $f(x)$:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \sin(\cos x), T = 2\pi; & 2) f(x) = \sin(\operatorname{tg} x), T = \pi; \\ 3) f(x) = \frac{1}{\cos x}, T = 2\pi; & 4) f(x) = \sqrt{|\sin |x||}, T = \pi. \end{array}$$

12. Доведіть, що функція $f(x)$ — неперіодична:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \sin \frac{x+2}{x+2}; & 2) f(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\}. \end{array}$$

Рівень С

1. Покажіть, що число π є періодом функції $f(x)$:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 1}; & 2) f(x) = \sqrt{-\cos^2 x}; \\ 3) f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}; & 4) f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2 x}}. \end{array}$$

2. Доведіть, що функція $f(x)$ — неперіодична:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = x^2 + \sin x; & 2) f(x) = x - \cos 2\pi x; \\ 3) f(x) = 2x - \cos \sqrt{3}x + 1; & 4) f(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}x. \end{array}$$

3. Знайдіть період функції:

$$\begin{array}{ll} 1) f(x) = \sin \frac{3\pi x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{7\pi x}{8} + \left\{ \frac{\pi x}{3} \right\}; & 2) f(x) = \operatorname{tg} 3x + \sin \frac{4x}{5} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg} \frac{9x}{7}; \\ 3) f(x) = 2\sin 5\pi x + \frac{1}{3}\{2x\} - \operatorname{ctg} \frac{13\pi x}{7}; & 4) f(x) = \operatorname{tg} \frac{3\pi x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{10\pi x}{3} + \left\{ \frac{x}{5} \right\}. \end{array}$$

4. При яких значеннях параметра a , функція $f(x) = a \cos x + (a^2 - a)x$ має головний період?

5. При яких значеннях параметра a , функція

$$f(x) = \frac{a^2 - 1}{(a + 3)^2} \cos \frac{3x}{2} + (a^3 + a^2 - 4a - 4) \cdot \frac{x^2 + a - 5}{x^2 - 2a + 1}$$

є періодичною і має найменший додатний період $\frac{4\pi}{3}$?

6. При яких значеннях параметра a , число $\frac{\pi}{2}$ є періодом функції $f(x) = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}$.
7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка допомагає з'ясувати, чи є певне число періодом заданої функції.

VIII. Рефлексія (2 хв)

- | | | | | |
|----|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я умію обчислювати значення тригонометричних виразів з урахуванням періодів функцій. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю, як доводити, що певні числа є періодами функцій. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я умію доводити неперіодичність функцій. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, як знаходити головні періоди тригонометричних функцій. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Періодичність складених функцій.
2. Періодичність функцій у гармонічних коливаннях.
3. Дослідження періодичних функцій при обробці сигналів та кодуванні інформації.
4. Побудова графіків періодичних функцій.
5. Періодичність у циклічних алгоритмах.
6. Функції «Ціла та дробова частини числа» у програмуванні.







