

10

Тема 4.

Тригонометричні функції

Урок 6. Урок–практикум. Розв’язування задач. Обчислення періодів функцій

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Обчислення значень тригонометричних виразів з урахуванням періодів функцій.
2. Розв’язування задач на доведення того факту, що певні числа є періодами функцій.
3. Знаходження головних періодів тригонометричних функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

пропонує альтернативні шляхи досягнення результатів розв’язання специфічної проблемної ситуації, оцінює можливі ризики [12 МАО 1.3.2–1 П];

заохочує і підтримує членів групи під час представлення та обговорення результатів, конструктивно реагує на критику [12 МАО 2.4.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям завдання на повторення. Оберіть ті завдання, які найдоцільніші, на ваш погляд.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв’язання). Розв’язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 6) Доведення деяких властивостей і теорем наведені в ілюстративних прикладах. Зверніть увагу, що деякі із доведень спираються на доведення інших властивостей.

- 7) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 8) Обов'язково заплануйте виконання останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичної задачі та тренувальних вправ як важливі компоненти формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи допомагає періодичність функцій знаходити значення цих функцій при великих значеннях аргументу?
- 2) Чи є практична потреба знаходити спільний період двох коливань?
- 3) Чи можна застосувати знання періода функції при побудові її графіка?
- 4) Чи могли б ви пояснити явище періодичності людині, яка зовсім не знає математику?
- 5) Що спільного між періодом функції та періодичністю у музиці, в танцях, у живописі?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть кут α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, такий, щоб поворот початкового радіуса на цей кут збігався з поворотом на кут -460° .
Відповідь. 260° .
2. Укажіть найбільше значення виразу $2 + \cos \alpha$.
Відповідь. 3.
3. Чому дорівнює радіанна міра кутів рівнобедреного прямокутного трикутника?
Відповідь. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$.
4. Визначте знак виразу $\operatorname{tg} 150^\circ \cdot \cos 500^\circ$.
Відповідь. $\operatorname{tg} 150^\circ \cdot \cos 500^\circ > 0$.
5. Знайдіть головний період функції $y = 0,3 \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{8}x - 2 \right)$.
Відповідь. 8π .

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. У концертній залі звучать два музичних інструменти, які створюють звукові коливання на різних частотах. У деякій точці залу рівняння звукових коливань можна описати функціями $f(t) = 2\sin(440\pi t)$ та $g(x) = \sin(660\pi t)$. Знайдіть період суми цих коливань.

Задача 2. Олімпіадна задача. У ряду чисел записано 1999 чисел. Перше число дорівнює 1. Відомо, що кожне число, окрім першого та останнього, дорівнює сумі двох сусідніх. Знайдіть останнє число.

III. Обчислення значень тригонометричних виразів з урахуванням періодів функцій

Тригонометричні функції є періодичними, а це означає, що їхні значення повторюються через певні проміжки. Саме ця властивість дозволяє значно спростити обчислення виразів.

Ілюстративні приклади (5–6 хв)

6. Обчисліть значення виразу $\cos 930^\circ$.

Розв'язання. $\cos 930^\circ = \cos(930^\circ - 3 \cdot 360^\circ) = \cos(930^\circ - 1080^\circ) = \cos(-150^\circ) =$
 $= \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Відповідь. $-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

7. Обчисліть значення виразу $\sin 29,5\pi$.

Розв'язання. $\sin 29,5\pi = \sin\left(30\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$

Відповідь. $-1.$

8. Обчисліть: $\operatorname{ctg}(-405^\circ) + \operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right).$

Розв'язання. $\operatorname{ctg}(-405^\circ) + \operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg}(-360^\circ - 45^\circ) + \operatorname{tg}\left(-6\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$
 $= \operatorname{ctg}(-45^\circ) + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -1 + \sqrt{3}.$

Відповідь. $-1 + \sqrt{3}.$

IV. Розв'язування задач на доведення того факту, що певні числа є періодами функцій

Крім тригонометричних функцій існують інші періодичні функції. Наведемо декілька означень.

Означення 1. Цілою частиною числа x (позначають $[x]$) називають найбільше ціле число, яке не перевищує x .

Наприклад: $[3,4] = 3$; $[-3,4] = -4$.

Означення 2. Дробовою частиною числа x (позначають $\{x\}$) називають число $x - [x]$.

Наприклад: $\{3,4\} = 3,4 - 3 = 0,4$; $\{-3,4\} = -3,4 - (-4) = 0,6$.

Теорема. Будь-яке ціле число, крім нуля, є періодом функції $y = \{x\}$.

Доведення. Областю визначення функції $y = \{x\}$ є множина всіх дійсних чисел.

Доведемо, що $\{x + c\} = \{x\}$, де $c \in \mathbb{Z}$.

Скористаємось очевидною тотожністю $[x + c] = [x] + c$, де $c \in \mathbb{Z}$.

$\{x + c\} = x + c - [x + c] = x + c - [x] - c = x - [x] = \{x\}$.

Головним періодом функції $y = \{x\}$ є число 1.

Також періодичною функцією є функція $y = a$, де a — довільне дійсне число. Періодом цієї функції є будь-яке дійсне число, крім нуля. Це означає, що функція $y = a$ не має головного періоду.

При розв'язуванні задач необхідно доводити, що певні числа є періодами функцій, а також доводити, що функція неперіодична.

Наведемо декілька прикладів.

Ілюстративні приклади (8–10 хв)

9. Доведіть, що число $T = \frac{1}{4}$ є періодом функції $f(x) = \frac{1}{\{4x\}}$.

Розв'язання. Оскільки $\{x\} = 0$, якщо $x \in \mathbb{Z}$, то областю визначення функції $f(x)$ є всі числа, крім чисел виду $\frac{n}{4}$, де $n \in \mathbb{Z}$. Отже, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{n}{4}, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Якщо $x \in D(f)$, то числа $x \pm \frac{1}{4}$ не можна подати у вигляді $\frac{n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тобто $\left(x \pm \frac{1}{4}\right) \in D(f)$.

Залишилося показати, що $f\left(x + \frac{1}{4}\right) = f(x)$.

$$f\left(x + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\left\{4\left(x + \frac{1}{4}\right)\right\}} = \frac{1}{\{4x + 1\}} = \frac{1}{4x + 1 - [4x + 1]} = \frac{1}{4x - [4x]} = \frac{1}{\{4x\}}.$$

10. Доведіть, що число 3,1415 не є періодом функції $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

Розв'язання. Якщо $T = 3,1415$ — період функції тангенс, то для будь-якого x із області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$, необхідне виконання рівності

$$\operatorname{ctg}(x + 3,1415) = \operatorname{ctg} x.$$

Оскільки $\frac{\pi}{2} \in D(f)$, то мала би виконуватися рівність $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 3,1415\right) = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$, тобто $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + 3,1415\right) = 0$, що є неправильним.

- 11.** Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x-1}$ є неперіодичною.

Розв'язання. Зауважимо, що $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Нехай функція $f(x)$ є періодичною з періодом $T \neq 0$.

Очевидно, що $x_0 = (1 - T) \in D(f)$. Тоді $x_0 + T = 1 - T + T \in D(f)$, тобто $1 \in D(f)$, що неможливо. Отже, задана функція — неперіодична.

- 12.** Доведіть, що число -7π є періодом функції $y = \sin 4x$.

Доведення. Оскільки $D(f) = \mathbb{R}$, то достатньо показати, що $f(x + T) = f(x - 7\pi) = f(x)$.

Маємо: $\sin 4(x - 7\pi) = \sin(4x - 28\pi) = \sin 4x$.

Отже, число -7π є періодом функції $y = \sin 4x$.

V. Знаходження головних періодів тригонометричних функцій (5 хв)

Нагадаємо властивості періодичних функцій.

1. Періодична функція $y = a$, де a — довільне дійсне число, не має головного періоду.
2. Якщо функція $y = f(x)$ періодична з головним періодом T , то функція $y = a \cdot f(x) + b$, де a і b — деякі числа, також періодична, з головним періодом T .
3. Якщо T — головний період функції $f(x)$, то $\frac{T}{|k|}$ — головний період функції $f(kx + b)$.
4. Якщо T_1 — період функції $f(x)$, а T_2 — період функції $g(x)$, причому числа T_1 і T_2 є сумірними, тобто $\frac{T_1}{T_2} = \frac{a}{b}$, де $\frac{a}{b}$ — нескоротний дріб, у якого $a \in \mathbb{N}$ і $b \in \mathbb{N}$, то функції $y = f(x) + g(x)$ і $y = f(x) - g(x)$ — періодичні, з періодом $T = b \cdot T_1 = a \cdot T_2$, за умови, що $D(f) \cap D(g) \neq \emptyset$.

Зауваження. Якщо числа T_1 і T_2 несумірні, то це не означає, що функції $y = f(x) + g(x)$ та $y = f(x) - g(x)$ — неперіодичні.

Ілюстративні приклади

- 13.** Знайдіть головний період функції $y = \operatorname{tg}\left(4 - \frac{4\pi x}{5}\right)$.

Розв'язання. Якщо число T є головним періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{|k|}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$. Головним періодом функції $y = \operatorname{tg} x$ є число π , тому головним періодом функції $y = \operatorname{tg}\left(4 - \frac{4\pi x}{5}\right)$ є число $\pi : \left|-\frac{4\pi}{5}\right| = \frac{5}{4}$.

Відповідь. $\frac{5}{4}$.

- 14.** Знайдіть період функції $y = \cos \pi x + \left\{3x - \frac{1}{2}\right\} - \operatorname{ctg}(4\pi x - 1)$.

Розв'язання. 1) Функцію можна подати, як суму трьох періодичних функцій:

- $f(x) = \cos \pi x$, головний період якої $T_1 = 2\pi : \pi = 2$;
- $g(x) = \left\{3x - \frac{1}{2}\right\}$, головний період якої $T_2 = 1 : 3 = \frac{1}{3}$;
- $h(x) = \operatorname{ctg}(4\pi x - 1)$, головний період якої $T_3 = \pi : 4\pi = \frac{1}{4}$.

$$2) \frac{T_1}{T_2} = 2 : \frac{1}{3} = 6, \quad T' = T_1 = 6T_2 = 2, \quad \frac{T'}{T_3} = 2 : \frac{1}{4} = 8.$$

Тоді, періодом заданої функції є $T = T' = 8T_3 = 2$.

Відповідь. 2.

- 15.** Нехай $f_1, f_2, \dots, f_k$ — періодичні функції з періодами $T_1, T_2, \dots, T_k$ відповідно. Якщо кожний період T_i ($i = 1, 2, \dots, k$) можна подати у вигляді

$$T_1 = \frac{n_1}{m_1}t, \quad T_2 = \frac{n_2}{m_2}t, \quad \dots, \quad T_k = \frac{n_k}{m_k}t,$$

де $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $m_i \in \mathbb{N}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то число $T = \frac{\text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_k)}{\text{НСД}(m_1, m_2, \dots, m_k)}t$

є спільним періодом усіх даних функцій. Доведіть це твердження.

Доведення. Оскільки $\text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_k) : n_i$, а $m_i : \text{НСК}(m_1, m_2, \dots, m_k)$, де $i = 1, 2, \dots, k$, то $T : T_i = l_i$, $l_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, тобто $T = T_1 l_1, T = T_2 l_2, \dots, T = T_k l_k$.

Отже, T — спільний період даних функцій. Що й треба було довести.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

- Задача 1.** У концертній залі звучать два музичних інструменти, які створюють звукові коливання на різних частотах. У деякій точці залу рівняння звукових коливань можна описати функціями $f(t) = 2\sin(440\pi t)$ та $g(x) = \sin(660\pi t)$. Знайдіть період суми цих коливань.

Розв'язання. 1) Період функції $f(t) = 2\sin(440\pi t)$: $T_1 = \frac{2\pi}{440\pi} = \frac{1}{220}$.

2) Період функції $g(x) = \sin(660\pi t)$: $T_2 = \frac{2\pi}{660\pi} = \frac{1}{330}$.

$$2) \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{220} : \frac{1}{330} = \frac{3}{2}.$$

Період суми коливань: $T = 2T_1 = 3T_2 = \frac{1}{110}$.

Відповідь. $\frac{1}{110}$.

Задача 2. Олімпіадна задача. У ряду чисел записано 1999 чисел. Перше число дорівнює 1. Відомо, що кожне число, окрім першого та останнього, дорівнює сумі двох сусідніх. Знайдіть останнє число.

Розв'язання. 1) Нехай $a_1, a_2, \dots, a_{1999}$ дані числа.

За умовою, $a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$ і $a_{n+2} = a_{n+3} + a_{n+1}$ (1).

2) Додамо рівності (1): $a_{n+1} + a_{n+2} = a_{n+2} + a_n + a_{n+3} + a_{n+1}$, звідси $a_n + a_{n+3} = 0$, тобто $a_{n+3} = -a_n$.

3) $a_{n+6} = -a_{n+3} = -(-a_n) = a_n$. Отже, послідовність періодична з періодом 6.

4) $a_{1999} = a_{6 \cdot 333 + 1} = a_1 = 1$.

Відповідь. 1.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть:

$$1) \sin 1110^\circ; \quad 2) \operatorname{ctg}(-1200^\circ); \quad 3) \cos \frac{47\pi}{6}; \quad 4) \sin \frac{57\pi}{4}.$$

2. Обчисліть:

$$1) 4\sin 810^\circ + 3\cos 720^\circ - 3\sin 630^\circ + 5\cos 900^\circ;$$
$$2) 5\operatorname{tg} 540^\circ + 2\cos 1170^\circ + 4\sin 990^\circ - 3\cos 540^\circ.$$

3. Доведіть, що число π є періодом функції:

$$1) y = 1 - \cos 2x; \quad 2) y = 5 - 3\sin 2x; \quad 3) y = \frac{\operatorname{tg} x}{2}; \quad 4) y = \operatorname{Atg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

4. Покажіть, що число T не є періодом функції $f(x)$:

$$1) f(x) = \sin x, \quad T = \pi; \quad 2) f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad T = \frac{\pi}{2};$$

$$3) f(x) = \operatorname{tg} x, \quad T = \frac{\pi}{2}; \quad 4) f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad T = 1.$$

5. Доведіть, що число T є періодом функції $f(x)$:

$$1) f(x) = \cos 2x, \quad T = \pi; \quad 2) f(x) = \operatorname{ctg} \pi x, \quad T = 2;$$

$$3) f(x) = \sin(5x - 1), \quad T = \frac{4\pi}{5}; \quad 4) f(x) = \cos(3x + 2), \quad T = -\frac{4\pi}{3}.$$

6. Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = \sin\left(-\frac{1}{3}x + 1\right);$

2) $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}x + 1\right);$

3) $f(x) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{1}{5}x + 2\right);$

4) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{5}\pi x\right).$

Рівень В

1. Обчисліть значення виразу:

1) $\operatorname{tg} \frac{41\pi}{4} - \operatorname{ctg}\left(-\frac{29\pi}{7}\right);$

2) $\operatorname{tg} \frac{23\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{9\pi}{4};$

3) $\cos^2 \frac{29\pi}{6} - \operatorname{ctg}^2 \frac{29\pi}{6};$

4) $\sin^2 \frac{21\pi}{4} - \sin\left(-\frac{19\pi}{2}\right).$

2. Доведіть, що:

1) число π є періодом функції $f(x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x$;

2) число 2π є періодом функції $f(x) = \cos 4x - \sin x$.

Укажіть декілька інших періодів заданих функцій.

3. Доведіть, що число T є періодом функції $f(x)$:

1) $f(x) = \cos 2x, T = \pi;$

2) $f(x) = \left|\operatorname{tg} \frac{x}{4}\right|, T = 4\pi;$

3) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}, T = 4;$

4) $f(x) = \sin^6 4x, T = \frac{\pi}{4}.$

4. Доведіть, що число T є періодом функції $f(x)$:

1) $f(x) = \{-4x + 3\}, T = \frac{1}{4};$

2) $f(x) = \left\{\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right\}, T = 3.$

5. Доведіть, що число $T = 5,2$ є періодом функції $f(x) = -10$.

6. Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = \sin 2\pi x;$

2) $f(x) = \{-\sqrt{2}x\};$

3) $f(x) = \left\{\pi x + \frac{1}{\pi}\right\};$

4) $f(x) = \cos \sqrt{3}x.$

7. Заповніть таблицю:

α	$\frac{13\pi}{4}$	-420°	-810°	$-\frac{55\pi}{6}$	$-\frac{21\pi}{2}$	$-11\frac{1}{3}\pi$	$-7\frac{5}{6}\pi$	$\frac{55\pi}{6}$
$\sin \alpha$								
$\cos \alpha$								
$\operatorname{tg} \alpha$								
$\operatorname{ctg} \alpha$								

8. Знайдіть головний період функції:

1) $f(x) = \sin\left(3 - \frac{5\pi}{6}x\right);$

2) $f(x) = \frac{8}{7} \operatorname{tg}\left(\frac{4\pi x}{9} - 1\right);$

3) $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}(3x - 2);$

4) $f(x) = \frac{3}{4} \cos\left(\frac{3}{4} - 6x\right).$

9. Знайдіть період функції:

1) $f(x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 3x;$

2) $f(x) = \sin 3x + \cos \frac{4}{7}x;$

3) $f(x) = \{2x\} + \cos 4\pi x;$

4) $f(x) = \{3x\} + \operatorname{ctg} 4\pi x.$

10. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{3}{5-x}$ — неперіодична.

11. Покажіть, що число T є періодом функції $f(x)$:

1) $f(x) = \sin(\cos x), T = 2\pi;$

2) $f(x) = \sin(\operatorname{tg} x), T = \pi;$

3) $f(x) = \frac{1}{\cos x}, T = 2\pi;$

4) $f(x) = \sqrt{|\sin |x||}, T = \pi.$

12. Доведіть, що функція $f(x)$ — неперіодична:

1) $f(x) = \sin \frac{x+2}{x+2};$

2) $f(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\}.$

Рівень С

1. Покажіть, що число π є періодом функції $f(x)$:

1) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + 1};$

2) $f(x) = \sqrt{-\cos^2 x};$

3) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\cos^2 x}};$

4) $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\sin^2 x}}.$

2. Доведіть, що функція $f(x)$ — неперіодична:

1) $f(x) = x^2 + \sin x;$

2) $f(x) = x - \cos 2\pi x;$

3) $f(x) = 2x - \cos \sqrt{3}x + 1;$

4) $f(x) = \cos x + \cos \sqrt{2}x.$

3. Знайдіть період функції:

1) $f(x) = \sin \frac{3\pi x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{7\pi x}{8} + \left\{ \frac{\pi x}{3} \right\};$

2) $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \sin \frac{4x}{5} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{9x}{7};$

3) $f(x) = 2\sin 5\pi x + \frac{1}{3}\{2x\} - \operatorname{ctg} \frac{13\pi x}{7};$

4) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{3\pi x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{10\pi x}{3} + \left\{ \frac{x}{5} \right\}.$

4. При яких значеннях параметра a , функція $f(x) = a \cos x + (a^2 - a)x$ має головний період?

5. При яких значеннях параметра a , функція

$$f(x) = \frac{a^2 - 1}{(a + 3)^2} \cos \frac{3x}{2} + (a^3 + a^2 - 4a - 4) \cdot \frac{x^2 + a - 5}{x^2 - 2a + 1}$$

є періодичною і має найменший додатний період $\frac{4\pi}{3}$?

6. При яких значеннях параметра a , число $\frac{\pi}{2}$ є періодом функції $f(x) = \frac{\cos 2x}{3a + \sin 2x}.$

- 7. Творче завдання.** Напишіть програму, яка допомагає з'ясувати, чи є певне число періодом заданої функції.

VIII. Рефлексія (2 хв)

- | | | | | |
|-----------|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я умію обчислювати значення тригонометричних виразів з урахуванням періодів функцій. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю, як доводити, що певні числа є періодами функцій. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я умію доводити неперіодичність функцій. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, як знаходити головні періоди тригонометричних функцій. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Періодичність складених функцій.
2. Періодичність функцій у гармонічних коливаннях.
3. Дослідження періодичних функцій при обробці сигналів та кодуванні інформації.
4. Побудова графіків періодичних функцій.
5. Періодичність у циклічних алгоритмах.
6. Функції «Ціла та дробова частини числа» у програмуванні.