

**Урок 9. Урок —практикум. Розв'язування задач.  
Дослідження властивостей тригонометричних  
функцій****РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

**I. Очікувані результати навчальних досягнень**

На уроці ви:

- 1) навчитеся знаходити області визначення та множини значень тригонометричних функцій;
- 2) здобудете навички шукати нулі тригонометричних функцій;
- 3) навчитеся досліджувати функції, які містять тригонометричні вирази на парність;
- 4) навчитеся знаходити проміжки знакосталості тригонометричних функцій;
- 5) навчитеся досліджувати тригонометричні функції на монотонність;
- 6) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

**II. Повторення****1.** Укажіть серед функцій 1) – 4) непарну:

$$1) y = \sqrt{x}; \quad 2) y = \sqrt[3]{x}; \quad 3) y = \sqrt[3]{x^2}; \quad 4) y = \sqrt{-x}.$$

**2.** Яка з функцій 1) – 4) є парною:

$$1) y = 4x; \quad 2) y = 4x + 3; \quad 3) y = 4x^2 - 3; \quad 4) y = \frac{4}{x}$$

**3.** Обчисліть значення виразу  $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2}\right)$ .**4.** Розв'яжіть нерівність  $x^2 \geq x$ .**5.** Областю визначення періодичної функції  $y = f(x)$  з періодом  $T = 4$  є множина дійсних чисел. Чому дорівнює значення виразу  $3f(6) - 2f(-2)$ , якщо  $f(2) = 1$ ?

### III. Знаходження області визначення та множини значень тригонометричних функцій

| Функція                   | $y = \sin x$                                               | $y = \cos x$                                               | $y = \operatorname{tg} x$                                                                      | $y = \operatorname{ctg} x$                                                     |
|---------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Область визначення        | Множина всіх дійсних чисел:<br>$D(y) = (-\infty; +\infty)$ | Множина всіх дійсних чисел:<br>$D(y) = (-\infty; +\infty)$ | Множина всіх дійсних чисел, окрім чисел виду:<br>$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ | Множина всіх дійсних чисел, окрім чисел виду:<br>$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ |
| Функція                   | $y = \sin x$                                               | $y = \cos x$                                               | $y = \operatorname{tg} x$                                                                      | $y = \operatorname{ctg} x$                                                     |
| Область (множина) значень | $E(y) = [-1; 1]$                                           | $E(y) = [-1; 1]$                                           | $E(y) = (-\infty; +\infty)$                                                                    | $E(y) = (-\infty; +\infty)$                                                    |

#### Поради учням/ученицям для знаходження області визначення функції

- 1) Звертайте увагу на знаменники дробів, які не дорівнюють нулю.
- 2) Пам'ятайте, що тангенс і котангенс — також дробові вирази.
- 3) Підкореневі вирази коренів парного степеня — невід'ємні.
- 4) Основа степеня з дробовим додатним показником — невід'ємна.
- 5) Основа степеня з дробовим від'ємним показником — додатна.

#### Поради учням/ученицям для знаходження множини значень функції

- 1) Якщо можливо, то побудуйте графік функції і знайдіть множину значень функції за графіком, тобто спроектуйте графік на вісь  $Oy$ .
- 2) З'ясуйте, яких значень набуває функція, використовуючи властивості нерівностей.
- 3) Областю визначення функції є множина, яка часто допомагає в знаходженні й множини значень функції.
- 4) У складних випадках для знаходження множини значень функції  $y = f(x)$  знаходять множину всіх значень параметра  $a$ , при яких рівняння  $f(x) = a$  має корені.

**Примітка.** Зверніть увагу, що не для кожної функції можна знайти область визначення та множину значень користуючись цими порадами.

**Приклад 1.** Які з чисел  $\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\pi, 2\pi, -\frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$  не належать області визначення функції  $y = \operatorname{ctg} x$ ?

[illegible]

**Приклад 2.** Серед чисел  $-\frac{5\pi}{2}, -8\pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, 10\pi$  укажіть числа, при яких функція  $y = \cos x$  набуває найбільшого значення.

[illegible]

**Приклад 3.** Знайдіть область визначення та множину значень функції  $y = \sqrt{-\sin^2 x}$ .

[illegible]

**Приклад 4.** Знайдіть множину значень функції  $y = -3\sin x + 2$ .

[illegible]

#### IV. Дослідження тригонометричних функцій на парність та непарність

**Означення 1.** Функцію  $f(x)$  називають **парною**, якщо для будь-якого  $x \in D(f(x))$  є правильною рівність  $f(-x) = f(x)$ .

**Означення 2.** Функцію  $f(x)$  називають **непарною**, якщо для будь-якого  $x \in D(f(x))$  є правильною рівність  $f(-x) = -f(x)$ .

Серед основних тригонометричних функцій функція  $y = \cos x$  — парна, а функції  $y = \sin x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$  та  $y = \operatorname{ctg} x$  — непарні, тобто:

$$\cos(-x) = \cos x,$$

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

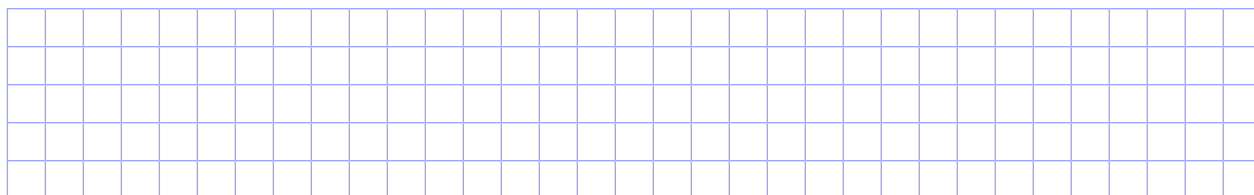
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

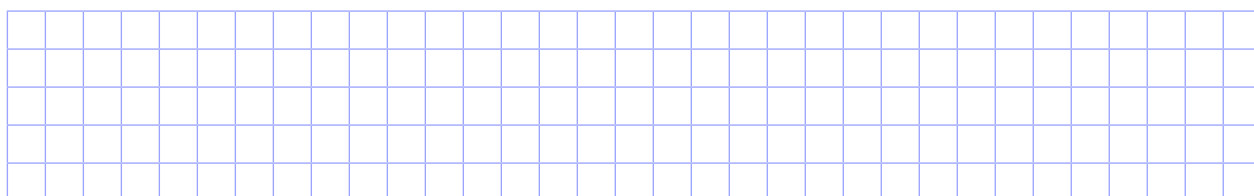
### Практичні висновки.

- 1) Вісь  $Oy$  є віссю симетрії графіків парних функцій.
- 2) Початок координат є центром симетрії графіків непарних функцій.
- 3) Якщо область визначення функції не симетрична відносно початку координат, то функція не може бути ні парною, ні непарною.

**Приклад 5.** Обчисліть значення виразу  $4 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos(-30^\circ) \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 3 \operatorname{ctg}(-45^\circ)$ .



**Приклад 6.** Дослідіть на парність функцію  $f(x) = 2 \sin^2 x - 3 \cos x + 1$ .



## V. Знаходження нулів тригонометричних функцій

**Означення.** Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають **нулем функції**.

| Функція      | Нулі функції                                  | Пояснення |
|--------------|-----------------------------------------------|-----------|
| $y = \sin x$ | $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$                 |           |
| $y = \cos x$ | $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ |           |



## VI. Дослідження тригонометричних функцій на монотонність та знакосталість

### Проміжки монотонності тригонометричних функцій

|                            |                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y = \sin x$               | Зростає на кожному з проміжків вигляду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ , де $n \in \mathbb{Z}$ .<br>Спадає на кожному з проміжків вигляду $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$ , де $n \in \mathbb{Z}$ . |
| $y = \cos x$               | Зростає на кожному з проміжків вигляду $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$ , де $n \in \mathbb{Z}$ .<br>Спадає на кожному з проміжків вигляду $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ , де $n \in \mathbb{Z}$ .                                                                      |
| $y = \operatorname{tg} x$  | Зростає на кожному з проміжків вигляду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ , де $n \in \mathbb{Z}$ .                                                                                                                                     |
| $y = \operatorname{ctg} x$ | Спадає на кожному з проміжків вигляду $(\pi n; \pi + \pi n)$ , де $n \in \mathbb{Z}$ .                                                                                                                                                                            |

1) Якщо кути  $\alpha$  і  $\beta$  належать одному проміжку  $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  і  $\alpha > \beta$ , то  $\sin \alpha > \sin \beta$ . Якщо кути  $\alpha$  і  $\beta$  належать одному проміжку  $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  і  $\alpha > \beta$ , то  $\sin \alpha < \sin \beta$ .

2) Якщо кути  $\alpha$  і  $\beta$  належать одному проміжку  $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  і  $\alpha > \beta$ , то  $\cos \alpha > \cos \beta$ . Якщо кути  $\alpha$  і  $\beta$  належать одному проміжку  $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  і  $\alpha > \beta$ , то  $\cos \alpha < \cos \beta$ .

3) Якщо кути  $\alpha$  і  $\beta$  належать одному проміжку  $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  і  $\alpha > \beta$ , то  $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$ .

4) Якщо кути  $\alpha$  і  $\beta$  належать одному проміжку  $(\pi n; \pi + \pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  і  $\alpha > \beta$ , то  $\operatorname{ctg} \alpha < \operatorname{ctg} \beta$ .

**Примітка.** Якщо два числа не належать одному проміжку монотонності, то можна порівнювати відповідні значення тригонометричних функцій із застосуванням періодичності.

### Проміжки знакосталості тригонометричних функцій

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $y = \sin x$ | $\sin x > 0$ на кожному з проміжків вигляду $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$ , $n \in \mathbb{Z}$<br>$\sin x < 0$ на кожному з проміжків вигляду $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$ , $n \in \mathbb{Z}$                                                                      |
| $y = \cos x$ | $\cos x > 0$ на кожному з проміжків вигляду $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ , $n \in \mathbb{Z}$<br>$\cos x < 0$ на кожному з проміжків вигляду $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$ , $n \in \mathbb{Z}$ |



## VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

### Рівень А

1. Знайдіть значення виразу:

1)  $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right);$

2)  $8 \cos(-180^\circ) \cdot \sin^2(-30^\circ) \cdot \operatorname{tg}^3(-45^\circ) + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right).$

2. Серед чисел  $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, 8\pi$  укажіть значення аргументу, при яких функція  $y = \cos x$  набуває найменшого значення.

3. Знайдіть область визначення та множину значень функції:

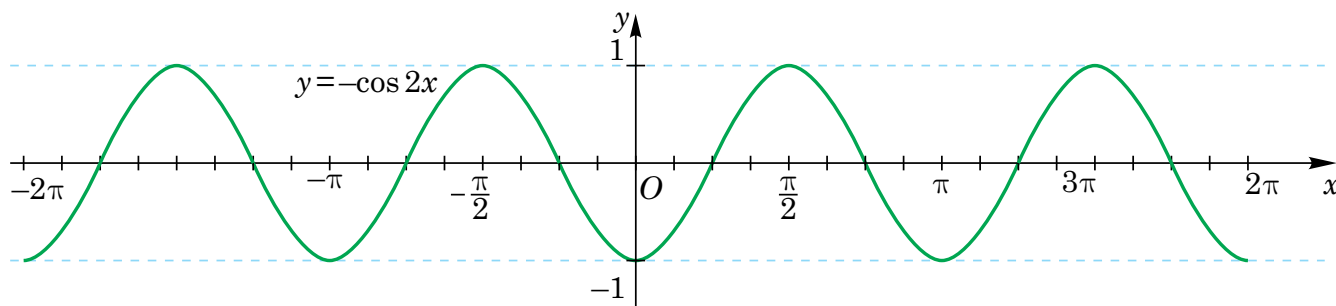
1)  $f(x) = 3 \operatorname{tg} x;$

2)  $f(x) = -2 \sin x + 5.$

4. В одній системі координат побудуйте графіки функцій  $y = \sin x$  та  $y = \cos x$ . Знайдіть графічно кілька значень  $x$ , для яких  $\sin x = \cos x$ . Скільки таких значень можна вказати?

5. Користуючись графіком функції  $y = \operatorname{ctg} x$ , знайдіть і запишіть по три проміжки, на яких ця функція: 1) набуває додатних значень; 2) набуває від'ємних значень.

6. На рисунку зображено графік функції  $y = -\cos 2x$  на проміжку  $[-2\pi; 2\pi]$ . Укажіть нулі функції, проміжки монотонності та проміжки знакосталості.



### Рівень В

1. Знайдіть значення виразу:

1)  $\sin(-750^\circ) + 6\sqrt{3} \operatorname{tg}(-2340^\circ) + 4\sqrt{2} \cos(-675^\circ);$

2)  $2 \cos(-420^\circ) + 2 \operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{4}\right) - \sin \frac{17\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}(-780^\circ).$

2. В якій чверті знаходиться кут  $\alpha$ , якщо відомо, що:

1)  $\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha > 0$  і  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0;$

2)  $\cos 132^\circ \cdot \cos \alpha > 0$  і  $\sin 132^\circ \cdot \operatorname{ctg} \alpha > 0;$

3)  $(\sin \alpha)^{0.5} - (\cos \alpha)^{0.5} = 0,1;$

4)  $\sqrt{\cos^2 \alpha} = -\cos \alpha$  і  $\operatorname{tg} \alpha = -2?$

3. Знайдіть області визначення функцій  $y = \sqrt{\sin^2 x}$  і  $y = (\sqrt{\sin x})^2$  та опишіть, чим відрізняються їхні графіки.



**4.** Знайдіть область визначення та множину значень функції:

1)  $y = 2 \sin x$ ;      2)  $y = 1 - \frac{1}{2} \sin x$ ;      3)  $y = -\sqrt{3} \cos x$ ;      4)  $y = -17 \operatorname{tg} x$ .

**5.** Порівняйте числа:

1)  $\sin \frac{1}{2}$  і  $\sin \frac{1}{3}$ ;      2)  $\cos \frac{1}{2}$  і  $\cos \frac{1}{3}$ ;      3)  $\sin 3$  і  $\sin 4$ ;      4)  $\cos \frac{2\pi}{3}$  і  $\cos \pi$ ;  
5)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}$  і  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ ;      6)  $\operatorname{tg} 0$  і  $\operatorname{tg} 1$ ;      7)  $\operatorname{tg}(-3)$  і  $\operatorname{tg}(-2,1)$ ;      8)  $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{10}$  і  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}$ .

**6.** За графіком функції  $y = \cos x$  знайдіть три наближених значення  $x$ , за яких  $\cos x = 0,5$ . Скільки існує таких значень  $x$ , що задовольняють дане рівняння?

**7.** Дослідіть на парність функцію:

1)  $y = \frac{x - \sin \frac{x}{2}}{x^3 \operatorname{tg}^2 x}$ ;      2)  $f(x) = \frac{6 - x^2}{\cos 3x}$ .

**8.** Розташуйте числа за спаданням:  $\operatorname{ctg} 3$ ,  $\operatorname{ctg}(-120^\circ)$ ,  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$ .

**9.** Побудуйте графік функції  $y = \sin x - |\sin x|$ .

**10.** Укажіть нулі, проміжки знакосталості та монотонності функції:

1)  $y = 2 \operatorname{ctg} x$ ;      2)  $y = -3 \operatorname{tg} x$ .

**11.** Знайдіть область визначення функції:

1)  $y = \frac{\cos x^2}{1 - \operatorname{tg} x}$ ;      2)  $y = \sqrt{\sin x}$ ;  
3)  $y = (\sin x)^{0,3} + \operatorname{tg} x$ ;      4)  $y = \sqrt{25 - x^2} + \frac{\cos x}{\sin x + 1}$ .

**12.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1)  $y = 4 - 3 \sin 2x$ ;      2)  $y = \left| \cos \frac{x}{3} \right|$ ;  
3)  $y = 4 \cos^4 x + 2$ ;      4)  $y = 0,3 \operatorname{ctg}^2 x - 1$ .

## Рівень С

**1.** Знайдіть значення виразу:

1)  $\sqrt{4 \cos(-1020^\circ) - 2 \sin 870^\circ} + \left( 3 \operatorname{ctg} \frac{13\pi}{4} - \operatorname{tg}^2 \left( -\frac{11\pi}{3} \right) \right)^{0,5}$ ;  
2)  $\frac{\cos(-3510^\circ) + 4 \sin 2550^\circ}{|\operatorname{tg}(-510^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 750^\circ - 4|}$ .

**2.** За графіком функції  $y = \sin x$  укажіть числовий проміжок, що належить проміжку  $(0; 2\pi)$ , на якому  $\sin x > \frac{1}{2}$ . Ураховуючи періодичність функції синус, запишіть множину проміжків, на яких  $\sin x > \frac{1}{2}$ .

**3.** Побудуйте графік функції:

1)  $y = \sqrt{\cos x - 1}$ ;      2)  $y = \operatorname{tg} x |\cos x|$ ;      3)  $y = \frac{\sin |x|}{\sin x}$ ;      4)  $y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\sin^2 x}}$ .

4. Знайдіть множину значень функції:

1)  $y = 4 - 3 \sin 2x$ ;    2)  $y = 4 \cos^4 x + 2$ ;    3)  $y = (\cos x + 1)^{-1}$ ;    4)  $y = \frac{2}{3 \sin x - 4}$ .

5. Дослідіть на парність функцію:

1)  $f(x) = \sqrt[3]{\cos x - 2} + (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^4$ ;    2)  $y = |\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x|$ ;  
3)  $y = \frac{\operatorname{tg}^4 x + \cos(180^\circ - x) + 2}{x^2 - 1}$ ;    4)  $f(x) = \frac{\sqrt{3 \cos x - 4} - \operatorname{tg}^2 x}{\cos x + x^2}$ .

6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції:

1)  $y = \frac{\cos^2 x - \cos x - 2}{\cos x + 1}$ ;    2)  $y = \frac{\cos^3 x - 2 \cos^2 x + 3}{\cos x + 1}$ ;  
3)  $y = \sqrt{\sin 3x - 1}$ ;    4)  $y = \sqrt{\cos^2 x - 2 \cos x + 5}$ .

7. **Творче завдання.** Створіть інтерактивний додаток, що демонструє властивості певної тригонометричної функції.

## Рефлексія. «3–2–1»

Три уміння, які я сьогодні опанував/опанувала

.....  
.....

Два запитання, які в мене виникли

.....  
.....

Одна ідея, де я можу застосувати здобуті знання в реальному житті

.....  
.....

## Можливі теми проєктів

1. Побудова графіків тригонометричних функцій за допомогою графічних калькуляторів.
2. Застосування властивостей тригонометричних функцій в архітектурі.
3. Застосування тригонометричних функцій у навігації.
4. Моделювання природних процесів за допомогою тригонометричних функцій.
5. Систематизація властивостей тригонометричних функцій у вигляді інтерактивної мапи.







