

10

Тема 4. Тригонометричні функції

Урок 9. Урок —практикум. Розв'язування задач. Дослідження властивостей тригонометричних функцій

Тип уроку: урок формування умінь і навичок.

План уроку

1. Знаходження області визначення та множини значень тригонометричних функцій.
2. Дослідження тригонометричних функцій на парність та непарність.
3. Знаходження нулів функцій.
4. Дослідження функцій на монотонність та знакосталість.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 1.2.2–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово з поясненням матеріалу.
- 2) Повторіть основні поняття попереднього уроку, розв'яжіть приклади на повторення.
- 3) Сформулюйте практичну задачу, розв'язати яку запропонуйте учням/ученицям наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.

- 6) Доведення деяких властивостей і теорем наведені в ілюстративних прикладах.
- 7) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 8) Заплануйте виконання останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичної задачі та тренувальних вправ як важливі компоненти формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи застосовують тригонометричні функції для створення комп'ютерної анімації?
- 2) Чи можливо побудувати безпечну гірку або атракціон без знання властивостей тригонометричних функцій?
- 3) Яким чином парність чи непарність функції допомагає у знаходженні кількості нулів функції?
- 4) Як можна використати симетрію тригонометричних функцій для розв'язування рівнянь, нерівностей і побудови графіків?
- 5) Що доцільніше: вивчити декілька ключових властивостей чи запам'ятовувати десятки формул?

II. (Усно). Повторення (3–4 хв)

1. Укажіть серед функцій 1) – 4) непарну:

1) $y = \sqrt{x}$; 2) $y = \sqrt[3]{x}$; 3) $y = \sqrt[3]{x^2}$; 4) $y = \sqrt{-x}$.

Відповідь. Функція 2).

2. Яка з функцій 1) – 4) є парною:

1) $y = 4x$; 2) $y = 4x + 3$; 3) $y = 4x^2 - 3$; 4) $y = \frac{4}{x}$?

Відповідь. Функція 3).

3. Обчисліть значення виразу $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2}\right)$.

Відповідь. 1.

4. Розв'яжіть нерівність $x^2 \geq x$.

Відповідь. $x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

5. Областю визначення періодичної функції $y = f(x)$ з періодом $T = 4$ є множина дійсних чисел. Чому дорівнює значення виразу $3f(6) - 2f(-2)$, якщо $f(2) = 1$?
- Відповідь. 1.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Інженери спроектували ділянку атракціону «Американські гірки», форму якої описує функція $h(x) = 30\cos x + 50$, $x \in [0; 20]$, де x — горизонтальна відстань (у метрах) від початку руху, а $h(x)$ — висота вагончика над землею (у метрах), який рухається по рейках гірки.

Знайдіть:

- 1) найбільшу і найменшу висоти вагончика над землею на спроектованій ділянці;
 - 2) відстань від початку ділянки, де вагончик уперше досягне максимальної висоти;
 - 3) точки траєкторії, на яких висота вагончика над землею дорівнюватиме 50 м.
- Схематично побудуйте траєкторію руху вагончика на ділянці атракціону.

Задача 2. Олімпіадна задача. Сума трьох додатних чисел α , β та γ дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Доведіть, що $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$.

III. Знаходження області визначення та множини значень тригонометричних функцій

Функція	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Область визначення	Множина всіх дійсних чисел: $D(y) = (-\infty; +\infty)$	Множина всіх дійсних чисел: $D(y) = (-\infty; +\infty)$	Множина всіх дійсних чисел, окрім чисел виду: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	Множина всіх дійсних чисел, окрім чисел виду: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$
Функція	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Область (множина) значень	$E(y) = [-1; 1]$	$E(y) = [-1; 1]$	$E(y) = (-\infty; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; +\infty)$

Поради учням/ученицям для знаходження області визначення функції

- 1) Звертайте увагу на знаменники дробів, які не дорівнюють нулю.
- 2) Пам'ятайте, що тангенс і котангенс — також дробові вирази.
- 3) Підкореневі вирази коренів парного степеня — невід'ємні.
- 4) Основа степеня з дробовим додатним показником — невід'ємна.
- 5) Основа степеня з дробовим від'ємним показником — додатна.

Поради учням/ученицям для знаходження множини значень функції

- 1) Якщо можливо, то побудуйте графік функції і знайдіть множину значень функції за графіком, тобто спроектуйте графік на вісь Oy .
- 2) З'ясуйте, яких значень набуває функція, використовуючи властивості нерівностей.
- 3) Областю визначення функції є множина, яка часто допомагає в знаходженні й множини значень функції.
- 4) У складних випадках для знаходження множини значень функції $y = f(x)$ знаходять множину всіх значень параметра a , при яких рівняння $f(x) = a$ має корені.

Примітка. Зверніть увагу, що не для кожної функції можна знайти область визначення та множину значень користуючись цими порадами.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Які з чисел $\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\pi, 2\pi, -\frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ не належать області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$?

Розв'язання. Множина усіх дійсних чисел, крім чисел виду $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ є областю визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$, тому числа $0, -\pi$ та 2π не належать області визначення котангенса.

Відповідь. $0, -\pi, 2\pi$.

7. Серед чисел $-\frac{5\pi}{2}, -8\pi, -\pi, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, 10\pi$ укажіть числа, при яких функція $y = \cos x$ набуває найбільшого значення.

Розв'язання. Функція $y = \cos x$ набуває найбільшого значення в точках виду $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Цю умову задовольняють числа $0, -8\pi, 10\pi$.

Відповідь. $0, -8\pi, 10\pi$.

8. Знайдіть область визначення та множину значень функції $y = \sqrt{-\sin^2 x}$.

Розв'язання. Оскільки $-\sin^2 x \geq 0$, то $\sin^2 x \leq 0$.

Нерівність можлива лише в точках, у яких $\sin x = 0$.

Тобто областю визначення даної функції є множина чисел виду $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь. $D(y) = \{x \mid x = \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.

9. Знайдіть область визначення функції $y = (4 + 3x - x^2)^{\frac{1}{3}} - \sqrt{3} \operatorname{tg} x$.

Розв'язання.
$$\begin{cases} 4 + 3x - x^2 > 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \end{cases} \begin{cases} -1 < x < 4, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тоді: $x \in \left(-1; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 4\right)$.

Відповідь. $D(y) = \left(-1; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 4\right)$.

10. Знайдіть множину значень функції $y = -3\sin x + 2$.

Розв'язання. Оскільки $-1 \leq \sin x \leq 1$, то: $-3 \leq -3\sin x \leq 3$, $-1 \leq -3\sin x + 2 \leq 5$.

Отже, $E(y) = [-1; 5]$.

Відповідь. $E(y) = [-1; 5]$.

IV. Дослідження тригонометричних функцій на парність та непарність

Означення 1. Функцію $f(x)$ називають **парною**, якщо для будь-якого $x \in D(f(x))$ є правильною рівність $f(-x) = f(x)$.

Означення 2. Функцію $f(x)$ називають **непарною**, якщо для будь-якого $x \in D(f(x))$ є правильною рівність $f(-x) = -f(x)$.

Серед основних тригонометричних функцій функція $y = \cos x$ — парна, а функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$ — непарні, тобто:

$$\cos(-x) = \cos x,$$

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Практичні висновки.

- 1) Вісь Oy є віссю симетрії графіків парних функцій.
- 2) Початок координат є центром симетрії графіків непарних функцій.
- 3) Якщо область визначення функції не симетрична відносно початку координат, то функція не може бути ні парною, ні непарною.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

11. Обчисліть значення виразу $4\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos(-30^\circ) \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 3\operatorname{ctg}(-45^\circ)$.

Розв'язання. $4\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\cos(-30^\circ) \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 3\operatorname{ctg}(-45^\circ) =$
 $= -4\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + 3\operatorname{ctg} 45^\circ = -4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 1 = -2 - 3 + 3 = -2.$

Відповідь. -2 .

12. Дослідіть на парність функцію $f(x) = 2\sin^2 x - 3\cos x + 1$.

Розв'язання. $f(-x) = 2\sin^2(-x) - 3\cos(-x) + 1 = 2\sin^2 x - 3\cos x + 1 = f(x)$.

Отже, функція — парна.

Відповідь. Парна.

13. Дослідіть на парність функцію $f(x) = |\sin x - \cos x| - |\sin x + \cos x|$.

Розв'язання. $f(-x) = |\sin(-x) - \cos(-x)| - |\sin(-x) + \cos(-x)| =$
 $= |-\sin x - \cos x| - |-\sin x + \cos x| = |\sin x + \cos x| - |\sin x - \cos x| =$

$$= -(|\sin x - \cos x| - |\sin x + \cos x|) = -f(x).$$

Отже, функція непарна.

Відповідь. Функція непарна.

14. Дослідіть на парність функцію $f(x) = \frac{(x^3 - 8)\sin x + 2}{2x - 4}$.

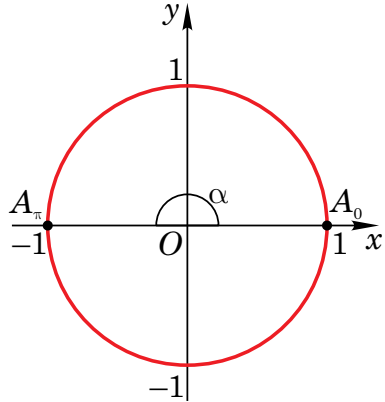
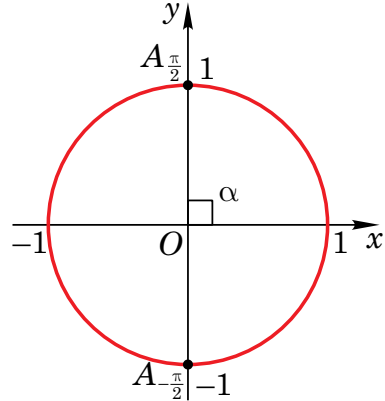
Розв'язання. Область визначення функції: $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Область визначення функції не симетрична відносно початку координат, оскільки $-2 \in D(f)$, а $2 \notin D(f)$. Тому функція не може бути ні парною, ні непарною.

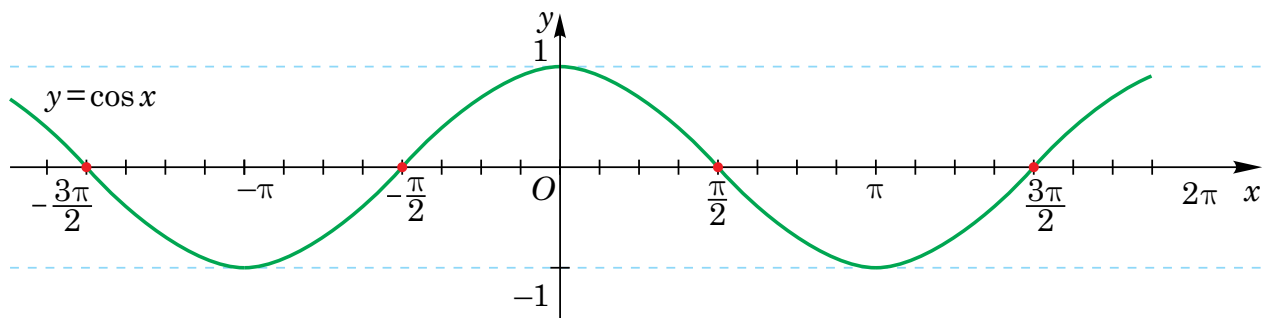
Відповідь. Функція ні парна, ні непарна.

V. Знаходження нулів тригонометричних функцій

Означення. Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають *нулем функції*.

Функція	Нулі функції	Пояснення
$y = \sin x$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$y = \cos x$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	
$y = \operatorname{tg} x$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	Оскільки $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то нулями функції $y = \operatorname{tg} x$ є значення x , при яких $\sin x = 0$, тобто $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
$y = \operatorname{ctg} x$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	Оскільки $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, то нулями функції $y = \operatorname{ctg} x$ є значення x , при яких $\cos x = 0$, тобто $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

На графічних ілюстраціях точки перетину графіка функції з віссю абсцис також називають нулями функції (див. рисунок).



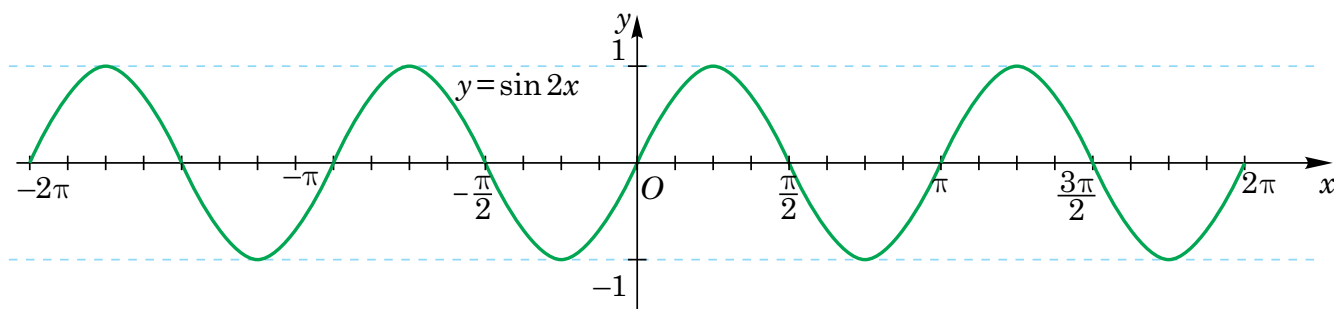
Ілюстративні приклади

- 15.** Які з чисел $-\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 3\pi, \frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ є нулями функції $y = \operatorname{ctg} x$?

Розв'язання. Нулями функції $y = \operatorname{ctg} x$ є числа виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, тобто: $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$.

Відповідь. $-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$.

- 16.** На рисунку зображено графік функції $y = \sin 2x$ на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$. Укажіть нулі функції.



Розв'язання. Нулі функції — абсциси точок перетину графіка з віссю Ox : $-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

Відповідь. $-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

VI. Дослідження тригонометричних функцій на монотонність та знакосталість

Проміжки монотонності тригонометричних функцій

$y = \sin x$	Зростає на кожному з проміжків вигляду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, де $n \in \mathbb{Z}$. Спадає на кожному з проміжків вигляду $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, де $n \in \mathbb{Z}$.
$y = \cos x$	Зростає на кожному з проміжків вигляду $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, де $n \in \mathbb{Z}$. Спадає на кожному з проміжків вигляду $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, де $n \in \mathbb{Z}$.
$y = \operatorname{tg} x$	Зростає на кожному з проміжків вигляду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, де $n \in \mathbb{Z}$.
$y = \operatorname{ctg} x$	Спадає на кожному з проміжків вигляду $(\pi n; \pi + \pi n)$, де $n \in \mathbb{Z}$.

1) Якщо кути α і β належать одному проміжку $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ і $\alpha > \beta$, то $\sin \alpha > \sin \beta$. Якщо кути α і β належать одному проміжку $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$ і $\alpha > \beta$, то $\sin \alpha < \sin \beta$.

2) Якщо кути α і β належать одному проміжку $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$ і $\alpha > \beta$, то $\cos \alpha > \cos \beta$. Якщо кути α і β належать одному проміжку $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$ і $\alpha > \beta$, то $\cos \alpha < \cos \beta$.

3) Якщо кути α і β належать одному проміжку $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ і $\alpha > \beta$, то $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \beta$.

4) Якщо кути α і β належать одному проміжку $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ і $\alpha > \beta$, то $\operatorname{ctg} \alpha < \operatorname{ctg} \beta$.

Примітка. Якщо два числа не належать одному проміжку монотонності, то можна порівнювати відповідні значення тригонометричних функцій із застосуванням періодичності.

Проміжки знакосталості тригонометричних функцій

$y = \sin x$	$\sin x > 0$ на кожному з проміжків вигляду $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$ $\sin x < 0$ на кожному з проміжків вигляду $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
$y = \cos x$	$\cos x > 0$ на кожному з проміжків вигляду $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ $\cos x < 0$ на кожному з проміжків вигляду $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$

$y = \operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg} x > 0$ на кожному з проміжків вигляду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{tg} x < 0$ на кожному з проміжків вигляду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x > 0$ на кожному з проміжків вигляду $\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ctg} x < 0$ на кожному з проміжків вигляду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$

Примітка. Функція $y = af(x)$, де a — довільне додатне дійсне число, має такі самі нулі, область визначення, проміжки знакосталості й монотонності, як і функція $y = f(x)$, а при $a < 0$ проміжки знакосталості й монотонності функції змінюються на протилежні.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

- 17.** Чи можлива рівність $\sin \alpha = 2 \sin 31^\circ$?

Розв'язання. Оскільки функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\sin 31^\circ > \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Тоді $2 \sin 31^\circ > 1$. Отже, дана рівність неможлива.

- 18.** Порівняйте $\cos 6$ і $\cos 5,7$.

Розв'язання. Оскільки $6 \in [\pi; 2\pi]$ і $5,7 \in [\pi; 2\pi]$, то числа 6 і 5,7 належать одному проміжку, на якому функція $y = \cos x$ зростає. Тому, з нерівності $6 > 5,7$ слідує, що $\cos 6 > \cos 5,7$.

Відповідь. $\cos 6 > \cos 5,7$.

- 19.** Порівняйте $\operatorname{tg} 582^\circ$ і $\operatorname{tg} 43^\circ$.

Розв'язання. $\operatorname{tg} 582^\circ = \operatorname{tg}(42^\circ + 3 \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} 42^\circ$.

Кути 42° і 43° належать проміжку $(-90^\circ; 90^\circ)$, на якому функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає, тому $\operatorname{tg} 582^\circ = \operatorname{tg} 42^\circ < \operatorname{tg} 43^\circ$.

Відповідь. $\operatorname{tg} 582^\circ < \operatorname{tg} 43^\circ$.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Інженери спроектували ділянку атракціону «Американські гірки», форму якої описує функція $h(x) = 30 \cos x + 50$, $x \in [0; 20]$, де x — горизонтальна відстань (у метрах) від початку руху, а $h(x)$ — висота вагончика над землею (у метрах), який рухається по рейках гірки.

Знайдіть:

- 1) найбільшу і найменшу висоти вагончика над землею на спроектованій ділянці;

- 2) відстань від початку ділянки, де вагончик уперше досягне максимальної висоти;
- 3) точки траєкторії, на яких висота вагончика над землею дорівнюватиме 50 м.
- 4) Схематично побудуйте траєкторію руху вагончика на ділянці атракціону.

Розв'язання. 1) Оскільки $-1 \leq \cos x \leq 1$, то: $-30 \leq 30 \cos x \leq 30$, $20 \leq 30 \cos x + 50 \leq 80$. Тому найбільша висота, на якій вагончик підніметься над землею, становить 80 м, а найменша — 20 м.

2) Висота 80 м досягається тоді, коли $\cos x = 1$, тобто в точках виду $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Вперше ця висота буде досягнута при $x = 2\pi \approx 6,28$ (м).

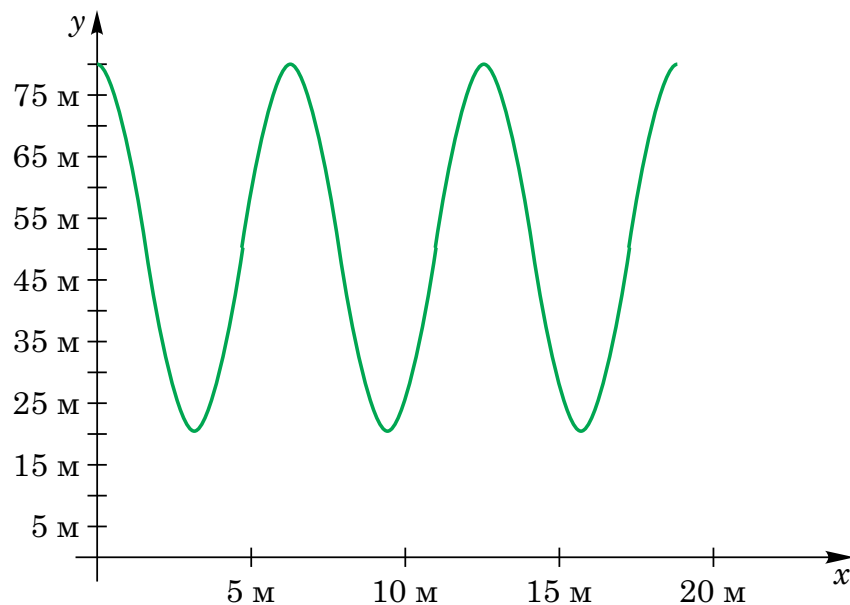
3) Висота 50 м буде досягатися, коли $\cos x = 0$, тобто в точках виду $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

На проміжку $x \in (0; 20]$ — це буде в точках:

$$\frac{\pi}{2} \approx 1,57 \text{ (м)}, \quad \frac{3\pi}{2} \approx 4,71 \text{ (м)}, \quad \frac{5\pi}{2} \approx 7,85 \text{ (м)},$$

$$\frac{7\pi}{2} \approx 10,99 \text{ (м)}, \quad \frac{9\pi}{2} \approx 14,13 \text{ (м)}, \quad \frac{11\pi}{2} \approx 17,27 \text{ (м)}.$$

4) Схематична траєкторія руху вагончика на ділянці атракціону (див. рисунок).



Відповідь. 1) Найбільша — 80 м, найменша — 20 м. 2) 6,28 м.

3) 1,57 м, 4,71 м, 7,85 м, 10,99 м, 14,13 м, 17,27 м.

Задача 2. Олімпіадна задача. Сума трьох додатних чисел α , β та γ дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Доведіть, що $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$.

Доведення. Оскільки $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, тобто $\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$.

Враховуючи те, що функція $y = \cos x$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ є спадною, то

$$\cos \alpha > \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right), \text{ звідки } \cos \alpha > \sin \beta.$$

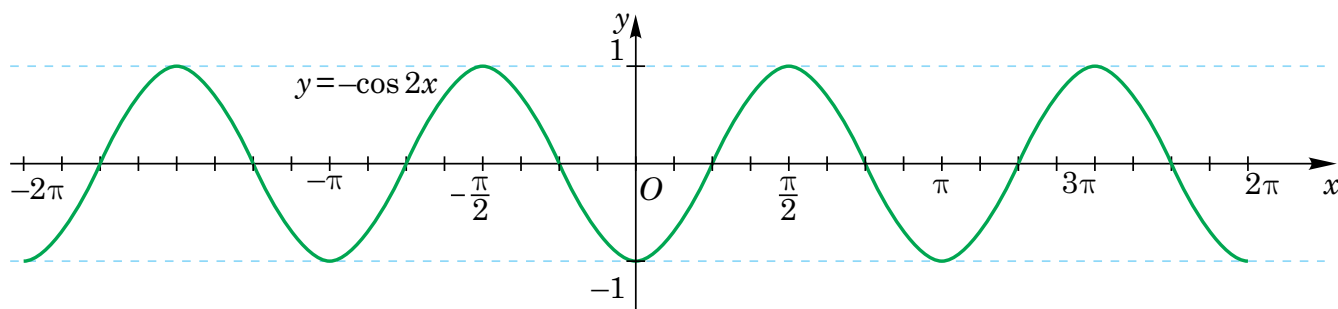
Аналогічно: $\cos \beta > \sin \gamma$ та $\cos \gamma > \sin \alpha$.

Додамо три отримані нерівності: $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$, що й треба було довести.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

- Знайдіть значення виразу:
 - $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;
 - $8\cos(-180^\circ) \cdot \sin^2(-30^\circ) \cdot \operatorname{tg}^3(-45^\circ) + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
- Серед чисел $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\pi$, 0 , $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, 8π укажіть значення аргументу, при яких функція $y = \cos x$ набуває найменшого значення.
- Знайдіть область визначення та множину значень функції:
 - $f(x) = 3\operatorname{tg} x$;
 - $f(x) = -2\sin x + 5$.
- В одній системі координат побудуйте графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$. Знайдіть графічно кілька значень x , для яких $\sin x = \cos x$. Скільки таких значень можна вказати?
- Користуючись графіком функції $y = \operatorname{ctg} x$, знайдіть і запишіть по три проміжки, на яких ця функція: 1) набуває додатних значень; 2) набуває від'ємних значень.
- На рисунку зображено графік функції $y = -\cos 2x$ на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$. Укажіть нулі функції, проміжки монотонності та проміжки знакосталості.



Рівень В

- Знайдіть значення виразу:
 - $\sin(-750^\circ) + 6\sqrt{3} \operatorname{tg}(-2340^\circ) + 4\sqrt{2} \cos(-675^\circ)$;
 - $2\cos(-420^\circ) + 2\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{4}\right) - \sin\frac{17\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}(-780^\circ)$.
- В якій чверті знаходиться кут α , якщо відомо, що:
 - $\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha > 0$ і $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$;
 - $\cos 132^\circ \cdot \cos \alpha > 0$ і $\sin 132^\circ \cdot \operatorname{ctg} \alpha > 0$;
 - $(\sin \alpha)^{0.5} - (\cos \alpha)^{0.5} = 0,1$;
 - $\sqrt{\cos^2 \alpha} = -\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha = -2$?

- 3.** Знайдіть області визначення функцій $y = \sqrt{\sin^2 x}$ і $y = (\sqrt{\sin x})^2$ та опишіть, чим відрізняються їхні графіки.
- 4.** Знайдіть область визначення та множину значень функції:
- 1) $y = 2 \sin x$; 2) $y = 1 - \frac{1}{2} \sin x$; 3) $y = -\sqrt{3} \cos x$; 4) $y = -17 \operatorname{tg} x$.
- 5.** Порівняйте числа:
- 1) $\sin \frac{1}{2}$ і $\sin \frac{1}{3}$; 2) $\cos \frac{1}{2}$ і $\cos \frac{1}{3}$; 3) $\sin 3$ і $\sin 4$; 4) $\cos \frac{2\pi}{3}$ і $\cos \pi$;
 5) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}$ і $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$; 6) $\operatorname{tg} 0$ і $\operatorname{tg} 1$; 7) $\operatorname{tg}(-3)$ і $\operatorname{tg}(-2,1)$; 8) $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{10}$ і $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{5}$.
- 6.** За графіком функції $y = \cos x$ знайдіть три наближених значення x , за яких $\cos x = 0,5$. Скільки існує таких значень x , що задовольняють дане рівняння?
- 7.** Дослідіть на парність функцію:
- 1) $y = \frac{x - \sin \frac{x}{2}}{x^3 \operatorname{tg}^2 x}$; 2) $f(x) = \frac{6 - x^2}{\cos 3x}$.
- 8.** Розташуйте числа за спаданням: $\operatorname{ctg} 3$, $\operatorname{ctg}(-120^\circ)$, $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$.
- 9.** Побудуйте графік функції $y = \sin x - |\sin x|$.
- 10.** Укажіть нулі, проміжки знакосталості та монотонності функції:
- 1) $y = 2 \operatorname{ctg} x$; 2) $y = -3 \operatorname{tg} x$.
- 11.** Знайдіть область визначення функції:
- 1) $y = \frac{\cos x^2}{1 - \operatorname{tg} x}$; 2) $y = \sqrt{\sin x}$;
 3) $y = (\sin x)^{0,3} + \operatorname{tg} x$; 4) $y = \sqrt{25 - x^2} + \frac{\cos x}{\sin x + 1}$.
- 12.** Знайдіть найбільше і найменше значення функції:
- 1) $y = 4 - 3 \sin 2x$; 2) $y = \left| \cos \frac{x}{3} \right|$;
 3) $y = 4 \cos^4 x + 2$; 4) $y = 0,3 \operatorname{ctg}^2 x - 1$.

Рівень С

- 1.** Знайдіть значення виразу:
- 1) $\sqrt{4 \cos(-1020^\circ) - 2 \sin 870^\circ} + \left(3 \operatorname{ctg} \frac{13\pi}{4} - \operatorname{tg}^2 \left(-\frac{11\pi}{3} \right) \right)^{0,5}$;
 2) $\frac{\cos(-3510^\circ) + 4 \sin 2550^\circ}{|\operatorname{tg}(-510^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 750^\circ - 4|}$.
- 2.** За графіком функції $y = \sin x$ укажіть числовий проміжок, що належить проміжку $(0; 2\pi)$, на якому $\sin x > \frac{1}{2}$. Ураховуючи періодичність функції синус, запишіть множину проміжків, на яких $\sin x > \frac{1}{2}$.

3. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{\cos x - 1}$; 2) $y = \operatorname{tg} x |\cos x|$; 3) $y = \frac{\sin |x|}{\sin x}$; 4) $y = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\sin^2 x}}$.

4. Знайдіть множину значень функції:

1) $y = 4 - 3 \sin 2x$; 2) $y = 4 \cos^4 x + 2$; 3) $y = (\cos x + 1)^{-1}$; 4) $y = \frac{2}{3 \sin x - 4}$.

5. Дослідіть на парність функцію:

1) $f(x) = \sqrt[3]{\cos x - 2} + (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^4$; 2) $y = |\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x|$;
3) $y = \frac{\operatorname{tg}^4 x + \cos(180^\circ - x) + 2}{x^2 - 1}$; 4) $f(x) = \frac{\sqrt{3 \cos x - 4} - \operatorname{tg}^2 x}{\cos x + x^2}$.

6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції:

1) $y = \frac{\cos^2 x - \cos x - 2}{\cos x + 1}$; 2) $y = \frac{\cos^3 x - 2 \cos^2 x + 3}{\cos x + 1}$;
3) $y = \sqrt{\sin 3x - 1}$; 4) $y = \sqrt{\cos^2 x - 2 \cos x + 5}$.

7. Творче завдання. Створіть інтерактивний додаток, що демонструє властивості певної тригонометричної функції.

IX. Рефлексія. «3–2–1» (2 хв)

Три уміння, які я сьогодні опанував/опанувала

.....
.....

Два запитання, які в мене виникли

.....
.....

Одна ідея, де я можу застосувати здобуті знання в реальному житті

.....
.....

Можливі теми проєктів

- 1.** Побудова графіків тригонометричних функцій за допомогою графічних калькуляторів.
- 2.** Застосування властивостей тригонометричних функцій в архітектурі.
- 3.** Застосування тригонометричних функцій у навігації.
- 4.** Моделювання природних процесів за допомогою тригонометричних функцій.
- 5.** Систематизація властивостей тригонометричних функцій у вигляді інтерактивної мапи.