
Урок 1. Систематизація та узагальнення вивченого матеріалу

План уроку

1. Корені n -го степеня.
2. Степеневі функції.
3. Ірраціональні рівняння.
4. Ірраціональні нерівності.
5. Тригонометричні функції.
6. Самостійна робота.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 MAO 1.1.1–1 П];

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 MAO 1.2.1–2 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 MAO 2.2.1–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 MAO 3.2.1–1 П];

пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 MAO 4.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Теоретичний матеріал, поданий у конспекті, має схематичний та опорний характер. Учитель/учителька може самостійно змінювати, доповнювати або деталізувати його залежно від рівня підготовки класу.
- 2) Ілюстративні приклади доцільно пропонувати як тренувальні вправи. Їх можна опрацювати індивідуально, у парах або в групах.

- 3) Роботу над теоретичним матеріалом варто організовувати у формі групової діяльності або фронтального опитування.
- 4) Запропонуйте учням виконати завдання тренувального тесту.
- 5) На уроці можна розпочати презентацію та захист індивідуальних або групових проєктів.

I. Організаційна частина (2 хв)

II. Захист індивідуальних (групових проєктів)

III. Повторення. Корені n -го степеня. Властивості коренів n -го степеня

Корені рівняння виду $x^n = a$, при $a > 0$, n — парне число, називають коренями n -го степеня із числа a і позначаються $x_1 = -\sqrt[n]{a}$, $x_2 = \sqrt[n]{a}$.

Число x називається арифметичним коренем n -го степеня з невід'ємного числа a і позначається $\sqrt[n]{a}$, якщо $x > 0$ і $x^n = a$.

Властивості коренів n -го степеня

1. Якщо $b = \sqrt[n]{a}$, то $b^n = a$.
2. $\sqrt[n]{a} \geq 0$, де $a \geq 0$.
3. $(\sqrt[n]{a})^n = a$, де $a \geq 0$.
4. $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$;
5. $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} |a|, & n = 2k, \\ a, & n = 2k + 1. \end{cases}$

Дії з коренями n -го степеня

Якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, то дії над коренями виконуються за правилами:

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.
3. $(\sqrt[n]{a^m})^k = \sqrt[n]{a^{mk}}$.
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^m}} = \sqrt[nk]{a^m}$.
5. Якщо $a \in R$, то: $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \begin{cases} \sqrt[n]{|a|^k}, & m = 2k, \\ \sqrt[n]{a^k}, & m = 2k + 1. \end{cases}$

Перетворення виразів, які містять корені n -го степеня

- 1.** Винесення множника за знак кореня:
 - розкладіть підкореневий вираз на множники таким чином, щоб хоча б один із них був представлений у вигляді степеня, показник якого відповідає показнику кореня;
 - застосуйте до отриманого виразу формулу знаходження кореня з добутку;
 - виконайте добування кореня з множника, який є точним степенем, якщо таких множників декілька, то знайдіть значення усіх коренів і обчисліть їхній добуток;
 - запишіть результат у вигляді добутку множника, винесеного за знак кореня і множника-радикала.
- 2.** Внесення множника під знак кореня:
 - визначте знак множника, який потрібно вносити під знак кореня;
 - піднесіть множник до степеня, що дорівнює показнику кореня;
 - помножте піднесений до степеня множник на вираз, який вже знаходиться під знаком кореня.
- 3.** Зведення подібних коренів:
 - у кожному з коренів винесіть множник за знак кореня;
 - визначте подібні корені;
 - зведіть коефіцієнти подібних коренів;
 - запишіть остаточний результат.
- 4.** Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробового виразу.
Залежно від вигляду знаменника може бути два випадки.

Випадок 1. Знаменник дробового виразу містить корінь n -го степеня.

Тоді треба помножити чисельник і знаменник дробу на $\sqrt[n]{a^{n-1}}$:

$$\frac{b}{\sqrt[n]{a}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a^{n-1}}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{b\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}.$$

Випадок 2. Множення чисельника та знаменника дробового виразу на спряжений вираз.

Вираз	Спряжений вираз
$a + \sqrt{b}$	$a - \sqrt{b}$
$a - \sqrt{b}$	$a + \sqrt{b}$
$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$
$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$
$a + \sqrt[3]{b}$	$a^2 - a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}$
$a - \sqrt[3]{b}$	$a^2 + a\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}$
$\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} \pm \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$

Степені з раціональними показниками

1. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
2. $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$.
3. Якщо a — додатне число, m — ціле число, а n — натуральне число ($n > 1$), то степнем числа a з раціональним показником $\frac{m}{n}$ називається корінь n -го степеня з числа a^m .

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, де m — ціле число, n — натуральне, $n \geq 2$, $a > 0$.

При виконанні дій зі степенями з раціональними показниками використовують формули скороченого множення:

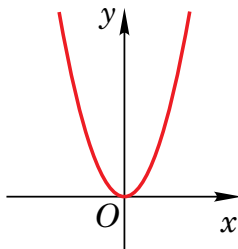
$$a - b = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right);$$

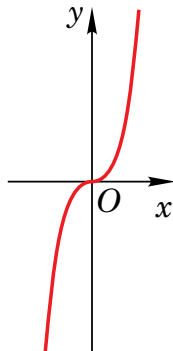
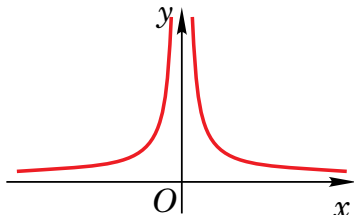
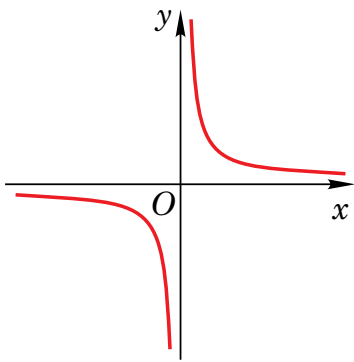
$$a - b = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right);$$

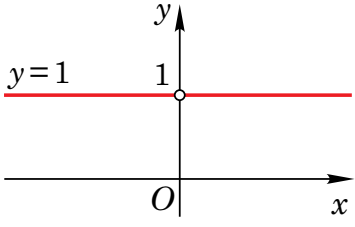
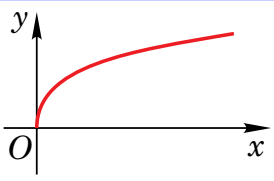
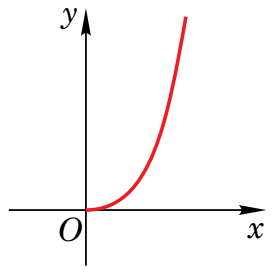
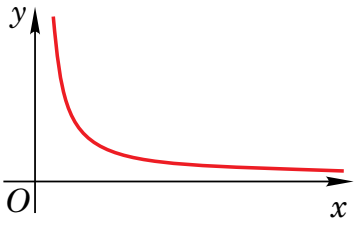
$$a + b = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right).$$

IV. Повторення. Степеневі функції із раціональними показниками та їхні властивості

Повторюємо властивості степеневих функцій

1. Степенева функція	$y = x^n$, n — парне натуральне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Якщо $x \in (-\infty; 0]$, то функція спадає, якщо $x \in [0; +\infty)$, то функція зростає.

2. Степенева функція	$y = x^n$, n — непарне натуральне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (-\infty; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
3. Степенева функція	$y = x^k$, k — ціле від'ємне число, яке ділиться на 2 без остачі
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Якщо $x \in (-\infty; 0)$, то функція зростає, якщо $x \in (0; +\infty)$, то функція спадає.
4. Степенева функція	$y = x^k$, k — ціле від'ємне число, яке не ділиться на 2 без остачі
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Спадає на всій області визначення.

5. Степенева функція	$y = x^k, k = 0$
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
Множина значень	$y = 1$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Монотонна на всій області визначення.
6. Степенева функція	$y = x^q, q$ — дробове додатне число, яке менше від 1
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in [0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
7. Степенева функція	$y = x^q, q$ — дробове додатне число, яке більше за 1
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in [0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in [0; +\infty)$.
Нулі функції	$x = 0$.
Проміжки монотонності	Зростає на всій області визначення.
8. Степенева функція	$y = x^q, q$ — дробове від'ємне число
Схематичний графік	
Область визначення	$x \in (0; +\infty)$.
Множина значень	$y \in (0; +\infty)$.
Нулі функції	Немає.
Проміжки монотонності	Спадає на всій області визначення.

V. Повторення. Ірраціональні рівняння

Основним методом розв'язання ірраціональних рівнянь є перетворення їх у раціональні рівняння. Ці перетворення виконуються за допомогою:

- 1) піднесення обох частин рівняння до одного степеня;
- 2) методу заміни;
- 3) штучних перетворень.

При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть виникнути сторонні корені. Тому потрібно обов'язково виконувати перевірку знайдених коренів. Ця перевірка виконується підстановкою знайдених коренів у задане рівняння, або доведенням рівносильності рівнянь, які утворюються в ході розв'язання.

Види рівнянь та методи їхнього розв'язання

1. Якщо $a \geq 0$, то $\sqrt[n]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^{2n}$; якщо $a < 0$, то рівняння не має коренів.

2. $\sqrt[2n+1]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^{2n+1}$, при будь-якому значенні a .

3. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Примітка. Із двох систем обирається та, яка простіше розв'язується.

4. *Теорема про корінь парного степеня* ($n \in \mathbb{N}$):

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^{2n} \end{cases}$$

5. *Теорема про корінь непарного степеня* ($n \in \mathbb{N}$):

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = (g(x))^{2n+1}.$$

6. *Теорема про добуток* $\sqrt[n]{f(x)} \cdot g(x)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{f(x)} \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) = 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g) \end{cases}$$

6. *Теорема про частку* $\frac{\sqrt[n]{f(x)}}{g(x)}$, $n \in \mathbb{N}$: $\frac{\sqrt[n]{f(x)}}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$

7. *Теорема про частку* $\frac{g(x)}{\sqrt[n]{f(x)}}$, $n \in \mathbb{N}$: $\frac{g(x)}{\sqrt[n]{f(x)}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0, \\ f(x) > 0. \end{cases}$

VI. Повторення. Ірраціональні нерівності

Види ірраціональних нерівностей та методи їхнього розв'язання

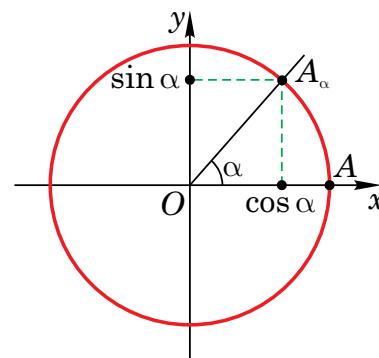
1. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

2. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g(x). \end{cases}$

3. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$
4. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$
5. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$
6. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^2(x). \end{cases}$
7. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > g(x)$ рівносильна сукупності двох систем $\begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$
8. Нерівність виду $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ рівносильна сукупності двох систем $\begin{cases} g(x) \leq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^2(x). \end{cases}$

VII. Повторення. Тригонометричні функції

Означення. Ординату точки $A\alpha$, яка відповідає куту α повороту точки $A(1; 0)$, називають **синусом** кута α (позначають $\sin \alpha$), а абсцису точки $A\alpha$ називають **косинусом** кута α (позначають $\cos \alpha$) (див. рисунок).



Властивості синуса та косинуса

- Для будь-якого кута абсциса та ордината точки $A\alpha$ не можуть бути більшими за 1 чи меншими від -1 , тому завжди будуть правильними такі нерівності: $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ та $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.
- Кутам α та β , для яких виконується рівність $\alpha - \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка на тригонометричному колі, тому $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin \alpha$ і $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos \alpha, n \in \mathbb{Z}$.
- Кутам α та $-\alpha$ відповідають точки на тригонометричному колі, симетричні відносно осі Ox , тому $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ та $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.
- Кутам α та $\alpha + \pi$ відповідають діаметрально протилежні точки на тригонометричному колі, тобто точки, симетричні відносно початку координат, тому $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ і $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$.

5. Оскільки координати усіх точок, які належать тригонометричному колу, задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$, то: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Означення. Тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Котангенсом кута α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Безпосередньо з означень тангенса та котангенса випливає, що для будь-якого кута α , такого, що $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$, є правильними рівності:

1) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$;

2) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$;

3) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$.

Запишемо рівняння прямої OA_α , $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$. Оскільки ця пряма не вертикальна і завжди проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд $y = kx$, де k — кутовий коефіцієнт цієї прямої (див. рисунок).

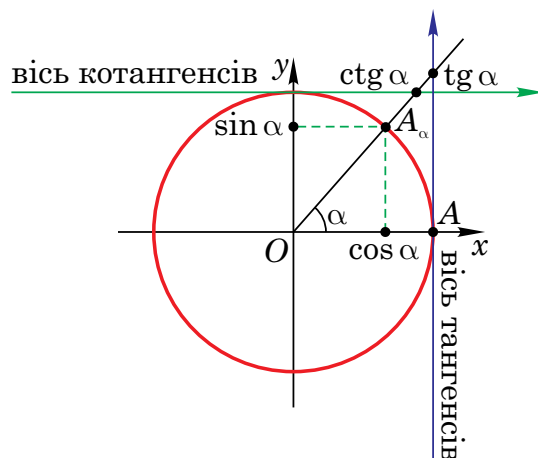
Оскільки пряма проходить через точку $A_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha)$, то $\sin \alpha = k \cos \alpha$, звідси

$$k = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Тобто рівняння прямої $y = (\operatorname{tg} \alpha) \cdot x$. Пряма

$y = (\operatorname{tg} \alpha) \cdot x$ перетинає пряму $x = 1$ у точці

з координатами $(1; \operatorname{tg} \alpha)$, а пряму $y = 1$ — у точці $(\operatorname{ctg} \alpha; 1)$ (див. рисунок).



Властивості тангенса й котангенса

№	Властивість	Доведення
1.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.	$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$
2.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$.	$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$

№	Властивість	Доведення
3.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \operatorname{tg}(\alpha + \pi)$	$\operatorname{tg}(\alpha - \pi) = \frac{\sin(\alpha - \pi)}{\cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha .$ $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha .$
4.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi)$	$\operatorname{ctg}(\alpha - \pi) = \frac{\cos(\alpha - \pi)}{\sin(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha .$ $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \frac{\cos(\alpha + \pi)}{\sin(\alpha + \pi)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha .$
5.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.	1) Для $n = 2m, m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi m) = \frac{\sin(\alpha + 2\pi m)}{\cos(\alpha + 2\pi m)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha .$ 2) Для $n = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{tg}(\alpha + \pi(2m + 1)) = \frac{\sin(\alpha + \pi + 2\pi m)}{\cos(\alpha + \pi + 2\pi m)} =$ $= \frac{\sin(\alpha + \pi)}{\cos(\alpha + \pi)} = \frac{-\sin \alpha}{-\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha .$
6.	Для будь-якого кута $\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, виконується рівність $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.	1) Для $n = 2m, m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{ctg}(\alpha + 2\pi m) = \frac{\cos(\alpha + 2\pi m)}{\sin(\alpha + 2\pi m)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha .$ 2) Для $n = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$: $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi(2m + 1)) = \frac{\cos(\alpha + \pi + 2\pi m)}{\sin(\alpha + \pi + 2\pi m)} =$ $= \frac{\cos(\alpha + \pi)}{\sin(\alpha + \pi)} = \frac{-\cos \alpha}{-\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha .$

Ілюстративні приклади

1. Спростіть вираз $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1} \cdot a^{\frac{1}{4}}+1$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1} \cdot a^{\frac{1}{4}}+1 &= \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{4}}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a}+1\right) \cdot \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}+1= \\ &= \frac{a^{\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right) \cdot\left(\sqrt[4]{a}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt[4]{a}+1\right)}+1=a^{\frac{1}{2}}-1+1=a^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Відповідь. $a^{\frac{1}{2}}$.

2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 21x + 98} - \sqrt{x^2 - 16x + 63} = \sqrt{x^2 - 13x + 42}$.

Розв'язання. Оскільки піднесення лівої і правої частини до квадрата призводить до громіздких перетворень, то розкладемо квадратні тричлени на множники й отримаємо: $\sqrt{(x-7)(x-14)} - \sqrt{(x-7)(x-9)} = \sqrt{(x-7)(x-6)}$,

$$\sqrt{x-7}(\sqrt{x-14} - \sqrt{x-9} - \sqrt{x-6}) = 0, \quad \begin{cases} \sqrt{x-7} = 0, \\ \sqrt{x-14} - \sqrt{x-9} = \sqrt{x-6}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-7=0, \\ x-14+x-9-2\sqrt{x^2-23x+126}=x-6, \end{cases} \quad \begin{cases} x=7, \\ 3x^2-58x+215=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=7, \\ x=5, \\ x=\frac{43}{3}. \end{cases}$$

Оскільки не всі перетворення в рівнянні були рівносильними, то виконаємо перевірку знайдених коренів. Корінь $\frac{43}{3}$ є стороннім.

Відповідь. 5; 7.

3. Знайдіть найменше значення функції $y = \frac{1}{3\sin x + 5}$.

Розв'язання. Оскільки $-3 \leq 3\sin x \leq 3$, то $2 \leq 3\sin x + 5 \leq 8$.

Отже, значення знаменника дробового вразу належать проміжку $[2; 8]$. Тоді $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{3\sin x + 5} \leq \frac{1}{2}$. Отже, найменше значення заданої функції дорівнює $\frac{1}{8}$.

Відповідь. $\frac{1}{8}$.

4. Знайдіть суму всіх натуральних розв'язків нерівності $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-4} \geq 2$.

Розв'язання. Оскільки у лівій частині нерівності — різниця двох коренів, то корінь із від'ємним знаком перенесемо у праву частину нерівності й знайдемо ОДЗ нерівності: $\sqrt{x+8} - \sqrt{x-4} \geq 2$,

$$\begin{cases} x+8 \geq 0, \\ x-4 \geq 0, \\ \sqrt{x+8} \geq \sqrt{x-4} + 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -8, \\ x \geq 4, \\ x+8 \geq x-4+4+4\sqrt{x-4}, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ 4\sqrt{x-4} \leq 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4, \\ x-4 \leq 4, \\ x \leq 8. \end{cases}$$

Оскільки $x \in [4; 8]$, то натуральними розв'язками нерівності є числа: 4, 5, 6, 7, 8, сума яких дорівнює 30.

Відповідь. 30.

5. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = 1$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$\sqrt{x-1-2\sqrt{x-1}} + 1 + \sqrt{x-1-4\sqrt{x-1}+4} = 1 \text{ та введемо заміну } \sqrt{x-1} = t, t \geq 0.$$

$$\text{Тоді } \sqrt{t^2-2t+1} + \sqrt{t^2-4t+4} = 1 \text{ або } \sqrt{(t-1)^2} + \sqrt{(t-2)^2} = 1.$$

$$\text{Звідси } |t-1| + |t-2| = 1.$$

Розкриємо модулі методом інтервалів.

Якщо $t \leq 1$, то $-(t-1) - (t-2) = 1$, звідси $t = 1$.

Якщо $t \in (1; 2]$, то $(t-1) - (t-2) = 1$, $1 = 1$ — правильна рівність.

Отже, коренем рівняння є будь-яке число з проміжку $[1; 2]$.

Якщо $t > 2$, то $(t-1) + (t-2) = 1$. Звідси $t = 2$.

Отже, $t \in [1; 2]$.

Повернемося до заміни $1 \leq \sqrt{x-1} \leq 2$, звідси $2 \leq x \leq 5$.

Відповідь. $x \in [2; 5]$.

- 6.** Знайдіть множину значень функції $y = \cos^4 x - \sin^4 x$. Укажіть найменший додатний період функції.

Розв'язання. Розкладемо функцію як різницю квадратів:

$$y = \cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x \cdot 1 = \cos 2x.$$

Отже, функція $y = \cos^4 x - \sin^4 x$ тотожна функції $y = \cos 2x$.

Оскільки $-1 \leq \cos 2x \leq 1$, то $E(y) = [-1; 1]$.

Період функції $y = \cos 2x$ становить π .

Відповідь. $E(y) = [-1; 1]$, $T = \pi$.

VIII. Самостійна робота

Варіант 1

- 1.** Знайдіть значення числового виразу $\sqrt[3]{81} - \sqrt{49} \cdot \sqrt[3]{24}$.

A	Б	В	Г	Д
$14\sqrt[3]{3}$	$3\sqrt[3]{3}$	$-11\sqrt[3]{3}$	-11	$-3\sqrt[3]{3}$

[illegible]

- 2.** Якій зі степеневих функцій 1) $y = x^{-2}$, 2) $y = x^{\frac{3}{2}}$, 3) $y = x^{-\frac{4}{3}}$, 4) $y = 3x^3$ належить точка (4; 8)?

А	Б	В	Г	Д
1)	2)	3)	4)	жодній

[illegible]

- 3.** Спростіть вираз $\frac{n^{\frac{4}{7}} \cdot n^{-\frac{1}{21}}}{n^{\frac{11}{21}}}$.

А	Б	В	Г	Д
n	1	$n^{\frac{22}{21}}$	$n^{\frac{2}{21}}$	$\sqrt{n}$

[illegible]

4. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt[3]{x-3} = -2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-6; -3)$	$(-3; 0)$	$(0; 3)$	$(3; 6)$	інша відповідь

[illegible]

- 5.** Установіть відповідність між нерівністю (1–4) та множиною її розв’язків (А–Д).

<i>Нерівність</i>	<i>Множина розв'язків нерівності</i>	А Б В Г Д
1 $\sqrt{x} \geq -4$	А $[-4; +\infty)$	1 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
2 $\sqrt{x+4} \geq 0$	Б $[-2; +\infty)$	2 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
3 $\sqrt{x} \geq 2$	В $[0; +\infty)$	3 ☐ ☐ ☐ ☐ ☐
4 $\sqrt{x-2} \geq 0$	Г $[2; +\infty)$	
	Д $[4; +\infty)$	

[illegible]

6. Знайдіть найменший додатний період T_0 функції $y = \sin x + \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{5}$. У відповідь запишіть значення $\frac{T_0}{\pi}$.

A full-page view of a blank sheet of graph paper. The grid consists of small squares formed by thin, light blue lines. The paper has a white background and no margins or text are visible.

Відповідь.

- 7.** Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 5x + 1} = \sqrt{x - 4}$.

A full-page sheet of graph paper featuring a uniform grid of small squares. The grid consists of 20 columns and 15 rows, creating a total of 300 square units. The lines are thin and dark gray, set against a white background. There are no margins, text, or other markings on the page.

Відповідь.

Варіант 2

- 1.** Внесіть множник під знак кореня: $b\sqrt[5]{5}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[5]{5^5 b}$	$\sqrt[5]{5b^5}$	$\sqrt[5]{5b}$	$\sqrt[5]{5b^6}$	інша відповідь

[illegible]

- 2.** Яка з наведених функцій є парною?

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{x+2}{2}$	$y = x^{-2}$	$y = x^{\frac{1}{4}}$	$y = 2x$	$y = -\frac{2}{x}$

[illegible]

- 3.** Обчисліть: $\frac{2^{-1,6} \cdot 4^{4,3}}{8^{\frac{2}{3}}}$. (ЗНО, 2009 р.).

А	Б	В	Г	Д
16	8	24	64	32

[illegible]

- 4.** Скільки коренів має рівняння $\sqrt{x^4 - 17} = x^2 - 1$?

А	Б	В	Г	Д
чотири	три	два	один	жодного

[illegible]

- 5.** Установіть відповідні між нерівністю (1–4) та множиною її розв'язків (А —Д).

Нерівність	Множина розв'язків нерівності	А	Б	В	Г	Д
1 $\sqrt{x} \leq 2$	А $[-2; 0]$	☐	☐	☐	☐	☐
2 $\sqrt{x} \leq -2$	Б $[-2; 2]$	☐	☐	☐	☐	☐
3 $\sqrt{x-2} \leq 2$	В $[0; 4]$	☐	☐	☐	☐	☐
4 $\sqrt{x+2} \leq 2$	Г $[2; 6]$	☐	☐	☐	☐	☐
	Д $\emptyset$	☐	☐	☐	☐	☐

This is a full-page view of a blank sheet of graph paper. The page features a uniform grid of thin blue lines on a light gray background. The grid consists of small squares that cover the entire area of the page, leaving no margins or additional markings.

- 6.** Знайдіть область значення функції $y = 3\sin^2 x + 2\cos^2 x$. У відповідь запишіть кількість цілих значень функції.

This is a full-page view of a blank sheet of graph paper. The page features a uniform grid of thin blue lines on a light gray background. The grid consists of small squares that cover the entire area of the page, leaving no margins or additional markings.

Відповідь.

- 7.** Розв'яжіть рівняння $(x-1)\sqrt{x^2-x-42}=0$. У відповідь запишіть модуль різниці коренів.

A full-page sheet of graph paper featuring a uniform grid of small squares. The grid consists of 20 columns and 15 rows, creating a total of 300 square units. The lines are thin and dark gray, set against a white background. There are no margins, text, or other markings on the page.

Відповідь.

Відповіді до тестових завдань

Варіант 1

1. В.
2. Б.
3. Б.
4. А.
5. 1 – В, 2 – А, 3 – Д, 4 – Г.
6. 30π.
7. 5.

Варіант 2

1. В.
2. Д.
3. Г.
4. Б.
5. 1 – В, 2 – Д, 3 – Г, 4 – Б.
6. [2; 3].
7. 13.

ІХ. Рефлексія (1–2 хв)

Запропонуйте учням/ученицям оцінити розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

- 1)
.....
.....
- 2)
.....
.....
- ?
.....
.....