

10

Тема 10.

Числові послідовності. Арифметична прогресія. Геометрична прогресія

Урок 1. Числові послідовності та їхні основні властивості

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите означення числових послідовностей;
- 2) навчитеся задавати числові послідовності різними способами;
- 3) дізнаєтесь, які бувають види числових послідовностей;
- 4) навчитеся досліджувати властивості числових послідовностей;
- 5) дізнаєтесь, де зустрічаються числові послідовності у природі, архітектурі, музиці, фінансах тощо;
- 6) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Яке число є зайвим у послідовності: 256; 49; 900; 169; 386; 529; 400?
2. На столі лежить розгорнута книга, сума номерів лівої і правої сторінок якої дорівнює 21. Обчисліть добуток цих номерів сторінок.
3. Визначте закономірність та знайдіть невідомі числа:

56	38	1; 2
24	36	1; 2; 3; 4; 6; 12
35	42	?

4. Із послідовності чисел $-9, -7, -6, 2, 3, 5$ виберіть два числа та обчисліть їхній добуток. Якого найбільшого значення може набувати цей добуток?

III. Числові послідовності. Способи задання числових послідовностей

Розглянемо функцію $f(x) = x^2$, областю визначення якої є множина натуральних чисел та побудуємо її графік (див. рисунок). Така функція незвична для нас, і можуть виникнути запитання, чи доцільно взагалі розглядати подібні функції.

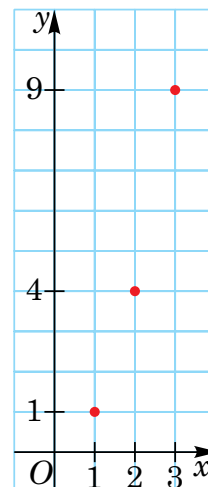
У математиці такі функції натурального аргументу називають *числовими послідовностями*.

Означення. Функцію $y = f(x)$, де $x \in \mathbb{N}$, називають *функцією від натурального аргументу* або *числовою функцією*.

Оскільки аргументи у таких функцій завжди можна пронумерувати, то позначають числові послідовності з використанням індексів.

Наприклад, (y_n) — це послідовність $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$

Для позначення числових послідовностей можуть використовуватись й інші літери латинського алфавіту: (a_n) , (x_n) тощо.



Означення. *Нескінченна числова послідовність* — це функція, областю визначення якої є множина натуральних чисел.

Послідовність вважається заданою, якщо за будь-яким її номером можна знайти відповідний член цієї послідовності. Існують числові послідовності, які не можна задати формулою n -го члена чи рекурентно, тоді застосовують описовий спосіб.

Способи задання числових послідовностей

Спосіб	Пояснення	Приклади
Описовий	Послідовність задається словесно, тобто описом її характеристичної властивості.	1) Послідовність простих чисел. 2) Послідовність натуральних чисел, які при діленні на 5 дають в остачі 2. 3) Послідовність цифр десяткового запису числа π .
Аналітичний	Послідовність задається формулою, за якою можна знайти будь-який її член, коли відомий номер члена послідовності. Таку формулу називають формулою n -го члена послідовності.	1) $a_n = 5n + 2$. 2) $b_n = -n^2 + 2n$. 3) $x_n = \frac{(-1)^n}{n + 2}$.

IV. Основні властивості числових послідовностей

Сформулюємо низку означень.

Означення 1. Числову послідовність (a_n) називають **зростаючою (спадною)**, якщо для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$).

Означення 2. Числову послідовність (a_n) називають **неспадною (незростаючою)**, якщо для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$).

Означення 3. Зростаючі, спадні, незростаючі і неспадні послідовності називаються **монотонними**.

Означення 4. Числову послідовність (a_n) називають **періодичною**, якщо існує таке натуральне число T , що для будь-якого натурального числа n виконується рівність $a_{n+T} = a_n$.

Означення 5. Послідовність, усі члени якої рівні між собою, називається **стаціонарною**.

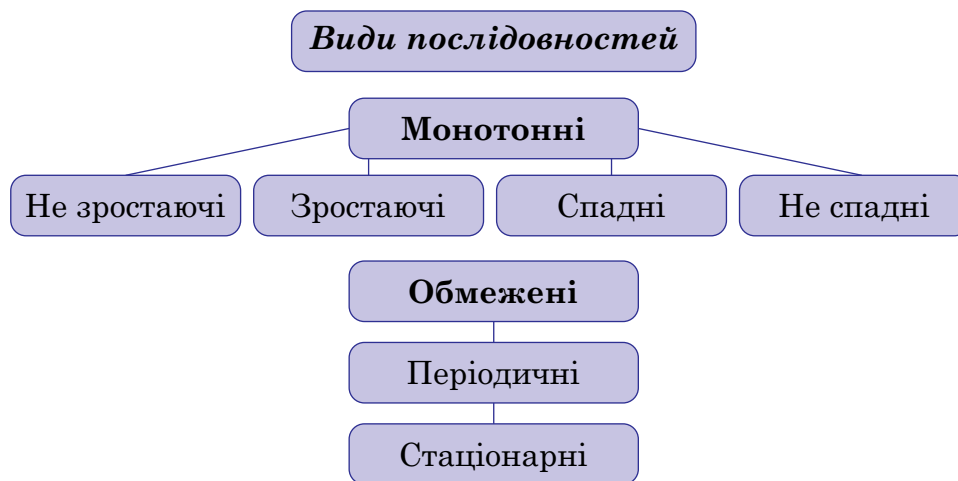
Означення 6. Числову послідовність (a_n) називають **обмеженою зверху**, якщо існує таке число C , що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \leq C$.

Означення 7. Числову послідовність (a_n) називають **обмеженою знизу**, якщо існує таке число c , що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \geq c$.

Означення 8. Послідовність називають **обмеженою**, якщо вона обмежена і зверху, і знизу.

*Деякі властивості обмежених послідовностей

1. Якщо послідовність обмежена, то будь-яка її підпослідовність обмежена.
2. Періодична послідовність — обмежена.
3. Якщо послідовність a_n обмежена, то послідовність $|a_n|$ теж обмежена.
4. Якщо послідовність a_n обмежена, то послідовності $a_n + p$ та $a_n \cdot p$, $p \in \mathbb{R}$, також обмежені.
5. Якщо послідовності a_n та b_n обмежені, то послідовності $a_n + b_n$ та $a_n \cdot b_n$ також обмежені.



Приклад 3. Доведіть, що послідовність $a_n = 5n^2 - 3$ є зростаючою.

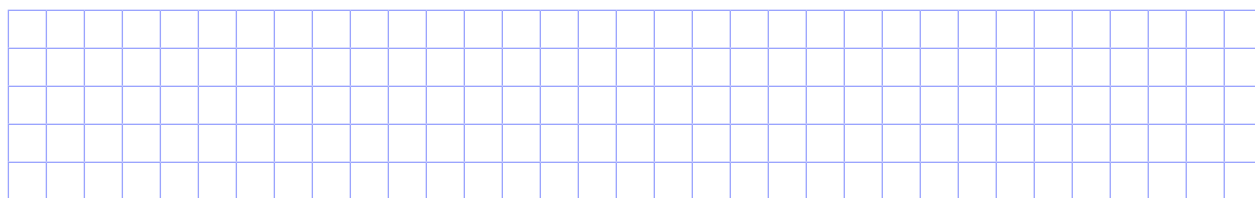
Доведення. Доведемо, що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n < a_{n+1}$.

Знайдемо: $a_{n+1} = 5(n+1)^2 - 3 = 5n^2 + 10n + 2$.

Розглянемо різницю: $a_n - a_{n+1} = (5n^2 - 3) - (5n^2 + 10n + 2) = -10n - 5 < 0$, для будь-якого натурального числа n .

Отже, за означенням, дана послідовність є зростаючою.

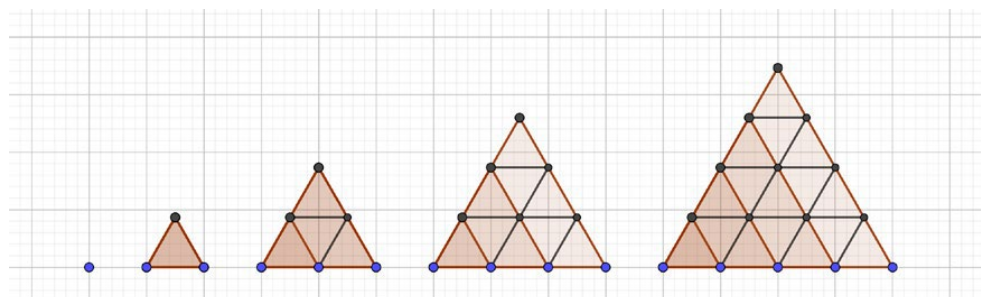
Приклад 4. Укажіть номер члена послідовності, починаючи з якого усі члени послідовності $x_n = n^2 - 27$ будуть більші за -2 .



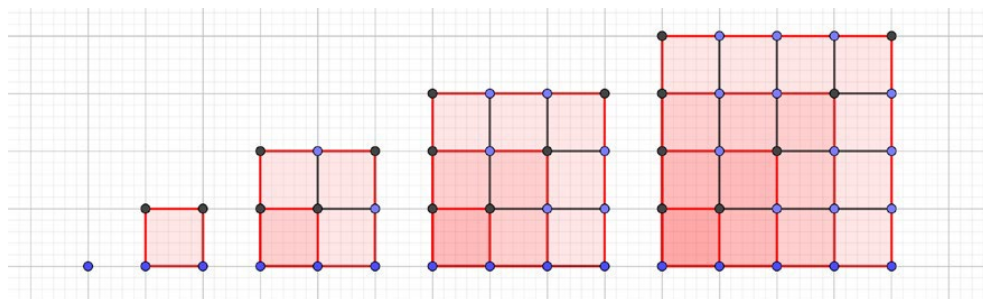
V. Приклади числових послідовностей, які застосовуються на практиці

Історична довідка

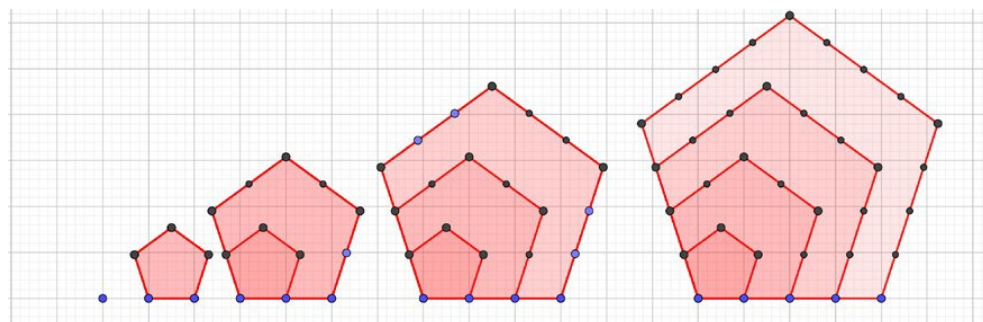
Піфагорійці (учні школи Піфагора) розглядали числові послідовності, пов'язані з геометричними фігурами. Вони складали з підручних матеріалів трикутники, чотирикутники, п'ятикутники тощо. Так було отримано послідовності фігурних чисел (див. рисунки).



1, 3, 6, 10, 15, ... — трикутні числа.



1, 4, 9, 16, 25, ... — чотирикутні (квадратні числа).



1, 5, 12, 22, 35, ... — п'ятикутні числа

Розглянемо числову послідовність, що задана рекурентно:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Ось декілька її перших членів 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89;

Така послідовність має назву «послідовність Фібоначчі», на честь італійського математика Леонарда Пізанського або, по-іншому, — Фібоначчі.

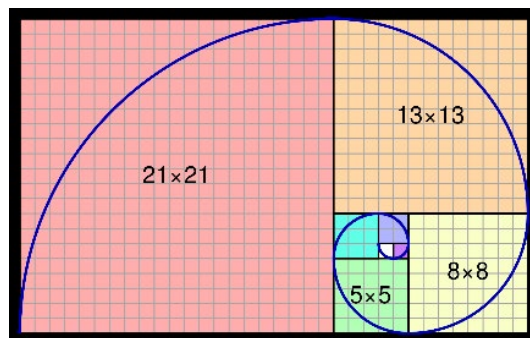
Історична довідка

Леонардо Пізанський або Фібоначчі (близько 1170 р. — близько 1250 р.) зіграв важливу роль у розвитку математики. Він упроваджував арабсько-індійську математику та алгебру в Європі. Одним із найголовніших його досягнень стала книга «Liber Abaci», в якій він представив західному світу арабські числа та методи обчислень, а також послідовність чисел, яка зараз носить його ім'я — «послідовність Фібоначчі». Ця послідовність знайшла своє застосування в різних галузях науки та техніки, в архітектурі, поезії, музиці, фінансах, а також була помічена при вивченні законів природи.

Однією з найбільш відомих властивостей чисел Фібоначчі є їхній зв'язок із уже відомим нам відношенням золотого перерізу. Співвідношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ при нескінченному збільшенні числа n пря-

мує до числа $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ (константи Фібоначчі).

Спіраль Фібоначчі, або «золота спіраль», утворюється якщо проводити її через вершини квадратів, сторони яких є послідовними числами Фібоначчі так, як показано на рисунку.



Зовнішні форми природних тіл — це те, що впадає нам у вічі при знайомстві з до-
вколишнім світом. Усі природні тіла, що нас оточують, знаходяться у полі земного тя-
жіння і, безперечно, відчувають його вплив. Рослини, тварини під впливом цієї сили
набувають ззовні схожих рис. Ці риси характеризуються узагальненими законами си-
метрії, серед яких одне з центральних місць займає явище **філотаксису**. Суть цього
явища полягає у спіральному розташуванні листків на стеблах рослин, гілок на дере-
вах, пелюсток у суцвіттях, генів у структурі молекули ДНК тощо (див. рисунок, який
узято з Вікіпедії).

У фінансовому трейдингу важливо вміти прогнозувати, яке спрямування матиме вартість криптовалюти після певного періоду зростання або падіння. І для цього можна використовувати послідовність чисел Фібоначчі. Наприклад, якщо ціна одного біткоїну виросла до 100, а потім почала падати, трейдер припускає, що вона впаде саме на відсоток, що дорівнює числу із ряду Фібоначчі, а після цього знову підніметься. Числа Фібоначчі допомагають передбачити, наскільки далеко може «відкотитися» ціна після росту або падіння.

Якщо більшість класичних музичних творів (особливо Йоганна Себастьяна Баха) розділити на частини за інтонаційною побудовою, то ці частини перебувають між собою у відношенні золотого перерізу.

Рекурентну формулу залишимо без змін: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Тоді отримаємо іншу числову послідовність. Запишіть дванадцять її перших членів.

[illegible]

VI. Розв'язування практичних задач

Задача 1. Іменинник влаштував святкування дня свого народження і замовив для гостей велику піцу. На яку найбільшу кількість шматочків він зможе її розрізати, якщо зробить 12 прямолінійних розрізів. Яку кількість шматочків отримає іменинник?

Задача 2. Гості, які полюбляють математику, підіймаються сходами на другий поверх до іменинника й домовляються, що вони не будуть повторювати послідовність сходинок, якими підіймаються на другий поверх (сходинки пронумеровані натуральними числами, нумерація починається з 1). За такого правила, яка найбільша кількість гостей може піднятися сходами, на яких 20 сходинок, на другий поверх?

Задача 3. Олімпіадна задача. Знайдіть суму $1 + 101 + 10101 + \dots + \underbrace{10101\dots 01}_n$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Послідовність задано формулою $x_n = (-1)^n$. Знайдіть: $x_1, x_5, x_{100}, x_{n+2}$.
2. Послідовність задано формулою: 1) $a_n = 4n + 1$; 2) $a_n = -3n - 4$. Знайдіть $a_3, a_5, a_{10}, a_{n+1}$.
3. Запишіть одну з можливих формул n -го члена послідовності:
1) $-2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots$; 2) $3; 6; 9; 12; \dots$.
4. Послідовність (b_n) задана рекурентно: $b_1 = -3, b_{n+1} = -2b_n$. Знайдіть суму перших чотирьох її членів.
5. Послідовність задано формулою: 1) $a_n = \frac{-2}{3-4n}$; 2) $a_n = \frac{3}{2n+4}$. Знайдіть $a_3, a_5, a_{10}, a_{n+1}$.
6. Запишіть перші шість членів послідовності:
1) парних натуральних чисел, які не діляться на 4;
2) непарних натуральних чисел, які діляться на 3.
7. Доведіть, що послідовність $a_n = 910 - 25n$ є спадною.

Рівень В

1. Послідовність задано формулою $c_n = (n + 5)(n - 2)$. Знайдіть n , якщо:
1) $c_n = 260$; 2) $c_n = 638$.
2. Запишіть одну з можливих формул n -го члена послідовності:
1) $1; 8; 27; 64; 125; \dots$; 2) $0; 3; 8; 15; 24; \dots$.
3. Послідовність (b_n) задана рекурентно: $b_1 = \frac{1}{2}, b_{n+1} = \frac{(-1)^n}{b_n}$. Знайдіть суму перших чотирьох її членів.

4. Запишіть перші шість членів послідовності:
 - 1) натуральних чисел, які при діленні на 10 дають в остачі 9;
 - 2) натуральних чисел, які кратні 3 і 4.
5. Доведіть, що послідовність $a_n = -9n^2 + 10n + 25$ є спадною.
6. Чи буде обмеженою послідовність $a_n = \frac{1}{n}$? Відповідь обґрунтуйте.
7. Послідовність задана формулою $a_n = 2^n$. Доведіть, що $a_{n+1} + a_{n+2} = 6a_n$.
8. Доведіть, що у послідовності (a_n) , яка задана формулою $a_n = \frac{n+1}{n}$, не існує найменшого члена.
9. Послідовність задано формулою $t_n = -3n^2 + 5$. Запишіть $(n+1)$ -й, $(n-2)$ -й члени цієї послідовності.
10. Чи буде обмеженою послідовність $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$? Відповідь обґрунтуйте.
11. Послідовність задана формулою $a_n = 2^n + 3^n$. Доведіть, що $\frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{6} - a_n = 3^n$.
12. Укажіть номери тих членів послідовності (x_n) , заданої формулою $x_n = \frac{2n+3}{12-n-n^2}$, які не перевищують $-0,5$.

Рівень С

1. Перевірте, чи є числа 1 і 6 членами послідовності $y_n = \frac{n^2 + 11}{n + 1}$. Якщо це так, то вкажіть номер члена цієї послідовності.
2. Запишіть одну з можливих формул n -го члена послідовності:
 - 1) $-\frac{2}{2}; \frac{4}{5}; -\frac{6}{8}; \frac{8}{11}; -\frac{10}{14} \dots$;
 - 2) $\frac{-1}{\sqrt{1 \cdot 2}}; \frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3}}; \frac{-9}{\sqrt{3 \cdot 4}}; \frac{16}{\sqrt{4 \cdot 5}}; \frac{-25}{\sqrt{5 \cdot 6}} \dots$
3. Послідовність (b_n) задана рекурентно: $b_1 = -10$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = |b_n| - 6b_{n+1}$. Знайдіть суму перших восьми її членів.
4. Запишіть перші шість членів послідовності:
 - 1) квадратів простих чисел;
 - 2) наближених значень числа $\sqrt{2}$ з точністю $\frac{1}{10^n}$ (з недостатчею).
5. Доведіть, що послідовність $a_n = \frac{9^n + 1}{3^{2n}}$ є спадною.
6. Скільки членів послідовності (u_n) , заданої формулою $u_n = |16 - 3n|$, належать множині значень функції $y = -2x^2 + 3x + 7$?
7. **Творче завдання.** Складіть програму для обчислення n -го члена послідовності, заданої рекурентно.

Рефлексія

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, що таке числові послідовності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я умію задавати числові послідовності різними способами. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я можу розпізнавати монотонні послідовності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, що таке періодичні послідовності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, що таке обмежені послідовності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я умію будувати послідовності фігурних чисел. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я знаю, що таке «послідовність Фібоначчі». | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Використання «золотої спіралі» для створення власного твору мистецтва.
2. Дослідження «фігурних послідовностей», заснованих на просторових фігурах.
3. Дослідження залежності між числами послідовності Фібоначчі та числами послідовності Люка.
4. Конструювання власних числових послідовностей, подібних до послідовності Фібоначчі. Перевірка створених послідовностей за допомогою інтерактивної енциклопедії цілочисельних послідовностей.
5. Пошук можливого застосування числових послідовностей у живій і неживій природі.
6. Математичні методи моделювання явища філотаксису.
7. Числа Фібоначчі в поетичних творах.
8. Аналіз ефективності рекурсивних та ітеративних алгоритмів.
9. Рекурентні алгоритми в графах.







