

10

Тема 10.

Числові послідовності. Арифметична прогресія. Геометрична прогресія

Урок 1. Числові послідовності та їхні основні властивості

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації знань.

План уроку

1. Числові послідовності.
2. Способи задання числових послідовностей.
3. Основні властивості числових послідовностей.
4. Приклади числових послідовностей, що застосовуються на практиці.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

оцінює повноту і достовірність інформації [12 МАО 1.2.1–3 П];

добирає додаткову інформацію з різних джерел і галузей знань [12 МАО 2.1.2–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям завдання на повторення. Оберіть ті завдання, які найдоцільніші, на ваш погляд.
- 2) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 3) Сформулюйте практичні задачі (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

- 5) Історичні відомості подавайте у межах часових можливостей.
- 6) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 7) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 8) Заплануйте останні блоки уроку, а саме: розв'язування практичних задач та тренувальні вправи як важливий компонент формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи має практичне застосування функція, областю визначення якої є множина натуральних чисел?
- 2) Чому важливо помічати закономірності у числах?
- 3) Що спільного між пелюстками квітів і спіральними галактиками?
- 4) Чи завжди можна однозначно передбачити наступне число у числовій послідовності?
- 5) Чи знаєте ви що таке Сарос, і який його взаємозв'язок з періодичними послідовностями?
- 6) Чи існують числові послідовності, щоб описати певні природні явища?
- 7) Як можна передбачати розвиток пандемії чи фінансової кризи за допомогою числових послідовностей?

II. (Усно). Повторення (3–4 хв)

1. Яке число є зайвим у послідовності: 256; 49; 900; 169; 386; 529; 400?
Відповідь. 386.
2. На столі лежить розгорнута книга, сума номерів лівої і правої сторінок якої дорівнює 21. Обчисліть добуток цих номерів сторінок.
Відповідь. 110.
3. Визначте закономірність та знайдіть невідомі числа:

56	38	1; 2
24	36	1; 2; 3; 4; 6; 12
35	42	?

Відповідь. 1; 7.

4. Із послідовності чисел $-9, -7, -6, 2, 3, 5$ виберіть два числа та обчисліть їхній добуток. Якого найбільшого значення може набувати цей добуток?
Відповідь. 63.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. Іменинник влаштував святкування дня свого народження і замовив для гостей велику піцу. На яку найбільшу кількість шматочків він зможе її розрізати, якщо зробить 12 прямолінійних розрізів. Яку кількість шматочків отримає іменинник?

Задача 2. Гості, які люблять математику, підіймаються сходами на другий поверх до іменинника й домовляюся, що вони не будуть повторювати послідовність сходинок, якими підіймаються на другий поверх (сходинок пронумеровані натуральними числами, нумерація починається з 1). За такого правила, яка найбільша кількість гостей може піднятися сходами, на яких 20 сходинок, на другий поверх?

Задача 3. Олімпіадна задача. Знайдіть суму $1 + 101 + 10101 + \dots + \underbrace{10101\dots 01}_n$.

III. Числові послідовності. Способи задання числових послідовностей (5 хв)

Розглянемо функцію $f(x) = x^2$, областю визначення якої є множина натуральних чисел та побудуємо її графік (див. рисунок). Така функція незвична для нас, і можуть виникнути запитання, чи доцільно взагалі розглядати подібні функції.

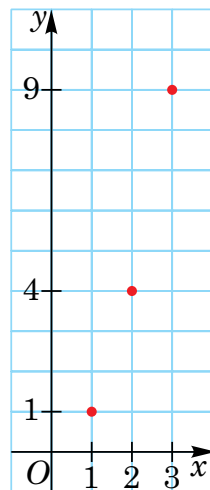
У математиці такі функції натурального аргументу називають *числовими послідовностями*.

Означення. Функцію $y = f(x)$, де $x \in \mathbb{N}$, називають *функцією від натурального аргументу* або *числовою функцією*.

Оскільки аргументи у таких функцій завжди можна пронумерувати, то позначають числові послідовності з використанням індексів.

Наприклад, (y_n) — це послідовність $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$

Для позначення числових послідовностей можуть використовуватись й інші літери латинського алфавіту: (a_n) , (x_n) тощо.



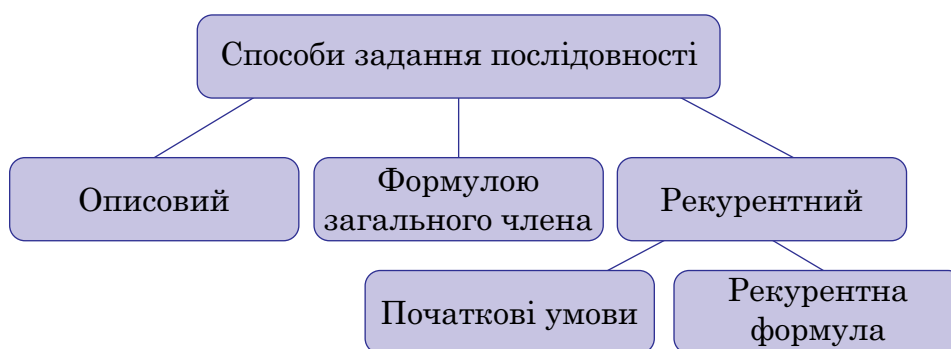
Означення. Нескінченна числова послідовність — це функція, областю визначення якої є множина натуральних чисел.

Послідовність вважається заданою, якщо за будь-яким її номером можна знайти відповідний член цієї послідовності. Існують числові послідовності, які не можна задати формулою n -го члена чи рекурентно, тоді застосовують описовий спосіб.

Способи задання числових послідовностей

Спосіб	Пояснення	Приклади
Описовий	Послідовність задається словесно, тобто описом її характеристичної властивості.	1) Послідовність простих чисел. 2) Послідовність натуральних чисел, які при діленні на 5 дають в остачі 2. 3) Послідовність цифр десяткового запису числа π .
Аналітичний	Послідовність задається формулою, за якою можна знайти будь-який її член, коли відомий номер члена послідовності. Таку формулу називають формулою n -го члена послідовності.	1) $a_n = 5n + 2$. 2) $b_n = -n^2 + 2n$. 3) $x_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$.
Рекурентний	Правило, найчастіше задане формулою, яке дозволяє обчислити n -й член послідовності, якщо відомі її попередні члени. Формулу, яка виражає кожен член послідовності через один чи декілька попередніх членів, називають рекурентною формулою. Умови, які визначають перший або кілька перших членів, називають початковими умовами. Термін рекурентний походить від латинського слова <i>recurrens</i> — той, що повертається.	1) $a_{n+1} = 5a_n$ — рекурентна формула, $a_1 = 2$ — початкова умова. 2) $b_{n+2} = 5b_n - b_{n+1}$ — рекурентна формула, $b_1 = 1, b_2 = 1$ — початкові умови.

Примітка. Послідовність вважається заданою, якщо кожен її член можна визначити за його номером.



Ілюстративні приклади (7–8 хв)

5. Підберіть одну із можливих формул n -го члена послідовності:

1) 4; 9; 16; 25; ...;

2) 2; 9; 28; 65;

Розв'язання. 1) 4; 9; 16; 25;

Можна помітити, що серед наведених членів послідовності знаходяться квадрати натуральних чисел, які починаються з квадрата двійки, тому однією з можливих формул n -го члена цієї послідовності може бути така: $a_n = (n + 1)^2$.

2) 1; 9; 28; 65;

Можна помітити, що серед наведених членів послідовності знаходяться куби натуральних чисел, які збільшені на 1, тому однією з можливих формул n -го члена цієї послідовності може бути така: $b_n = n^3 + 1$.

Відповідь. 1) $a_n = (n + 1)^2$. 2) $b_n = n^3 + 1$.

6. За формулою n -го члена, $a_n = \frac{3}{2n + 4}$, обчисліть п'ять перших членів цієї послідовності.

Розв'язання. $a_1 = \frac{3}{2 \cdot 1 + 4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{2 \cdot 2 + 4} = \frac{3}{8}$,

$$a_3 = \frac{3}{2 \cdot 3 + 4} = \frac{3}{10}, a_4 = \frac{3}{2 \cdot 4 + 4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{3}{2 \cdot 5 + 4} = \frac{3}{14}$$

Відповідь. $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{3}{10}, \frac{1}{4}, \frac{3}{14}$.

7. Чи буде число 1,8 членом послідовності, заданою формулою n -го члена

$$x_n = \frac{n^2 + 4n + 45}{n^2 + 25}?$$

Якщо так, то вкажіть номер цього члена.

Розв'язання. Припустимо, що число 1,8 є членом даної послідовності, тоді для деякого натурального числа n буде правильною рівність $\frac{n^2 + 4n + 45}{n^2 + 25} = 1,8$.

$$\frac{n^2 + 4n + 45}{n^2 + 25} = \frac{9}{5}, 9n^2 + 225 = 5n^2 + 20n + 225, 4n^2 - 20n = 0, 4n(n - 5) = 0,$$

$$n = 0 \text{ або } n = 5.$$

Оскільки номер члена послідовності може бути лише натуральним числом, то робимо висновок, що число 1,8 є п'ятим членом даної послідовності.

Відповідь. Так, $n = 5$.

8. Льодяна бурулька тане зі швидкістю 10 крапель за хвилину. Скільки крапель упаде через 1 хв, 2 хв, 3 хв, 17 хв від початку танення бурульки? Сформулюйте математичну модель цієї задачі за допомогою числової послідовності.

Розв'язання. За першу хвилину впаде 10 крапель, за дві хвилини — 20 крапель, за три хвилини — 30 крапель, а за 17 хвилин — 170 крапель.

Математична модель.

Кількість крапель, які впадуть за n хвилин від початку танення бурульки, можна порахувати за допомогою числової послідовності, заданої формулою n -го члена:

$$a_n = 10n.$$

Відповідь. 10, 20, 30, 170; $a_n = 10n$.

Історична довідка

Для послідовності простих чисел формули n -го члена не існує, однак ще в III ст. до н. е. александрійський учений Єратосфен указав спосіб, за допомогою якого можна отримати n -ий член цієї послідовності. Цей спосіб був названий «решетом Єратосфена».

IV. Основні властивості числових послідовностей (8–10 хв)

Сформулюємо низку означень.

Означення 1. Числову послідовність (a_n) називають **зростаючою (спадною)**, якщо для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$).

Означення 2. Числову послідовність (a_n) називають **неспадною (незростаючою)**, якщо для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$).

Означення 3. Зростаючі, спадні, незростаючі і неспадні послідовності називаються **монотонними**.

Означення 4. Числову послідовність (a_n) називають **періодичною**, якщо існує таке натуральне число T , що для будь-якого натурального числа n виконується рівність $a_{n+T} = a_n$.

Означення 5. Послідовність, усі члени якої рівні між собою, називається **стаціонарною**.

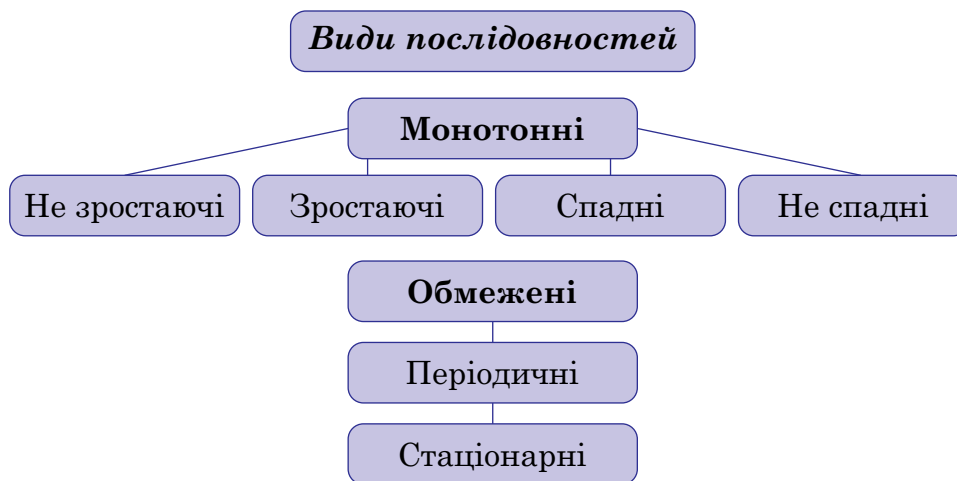
Означення 6. Числову послідовність (a_n) називають **обмеженою зверху**, якщо існує таке число C , що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \leq C$.

Означення 7. Числову послідовність (a_n) називають **обмеженою знизу**, якщо існує таке число c , що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \geq c$.

Означення 8. Послідовність називають **обмеженою**, якщо вона обмежена і зверху, і знизу.

*Деякі властивості обмежених послідовностей

1. Якщо послідовність обмежена, то будь-яка її підпослідовність обмежена.
2. Періодична послідовність — обмежена.
3. Якщо послідовність a_n обмежена, то послідовність $|a_n|$ теж обмежена.
4. Якщо послідовність a_n обмежена, то послідовності $a_n + p$ та $a_n \cdot p$, $p \in \mathbb{R}$, також обмежені.
5. Якщо послідовності a_n та b_n обмежені, то послідовності $a_n + b_n$ та $a_n \cdot b_n$ також обмежені.



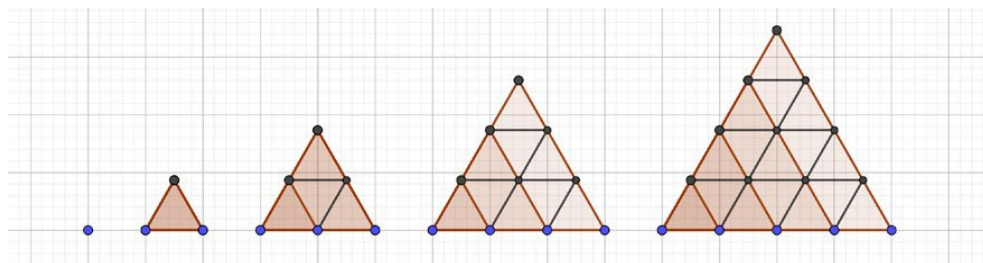
Ілюстративні приклади (7–10 хв)

- 9.** Доведіть, що послідовність $a_n = 5n^2 - 3$ є зростаючою.
Доведення. Доведемо, що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n < a_{n+1}$.
 Знайдемо: $a_{n+1} = 5(n+1)^2 - 3 = 5n^2 + 10n + 2$.
 Розглянемо різницю: $a_n - a_{n+1} = (5n^2 - 3) - (5n^2 + 10n + 2) = -10n - 5 < 0$, для будь-якого натурального числа n .
 Отже, за означенням, дана послідовність є зростаючою.
- 10.** Доведіть, що послідовність $c_n = (-1)^{n+1}$ є періодичною.
Доведення. Доведемо, що $c_{n+2} = c_n$, для будь-якого натурального n .
 $c_{n+2} = (-1)^{n+3} = (-1)^{n+1}$, оскільки числа $n+3$ та $n+1$ однакової парності.
 Отже, дана послідовність є періодичною з періодом 2.
- 11.** Укажіть номер члена послідовності, починаючи з якого усі члени послідовності $x_n = n^2 - 27$ будуть більші за -2 .
Розв'язання. Розв'яжемо нерівність $n^2 - 27 > -2$, $n^2 > 25$.
 Оскільки n — число натуральне, то $n > 5$, тобто, починаючи з шостого номера, усі члени даної послідовності будуть більшими за -2 .
Відповідь. Шостий.

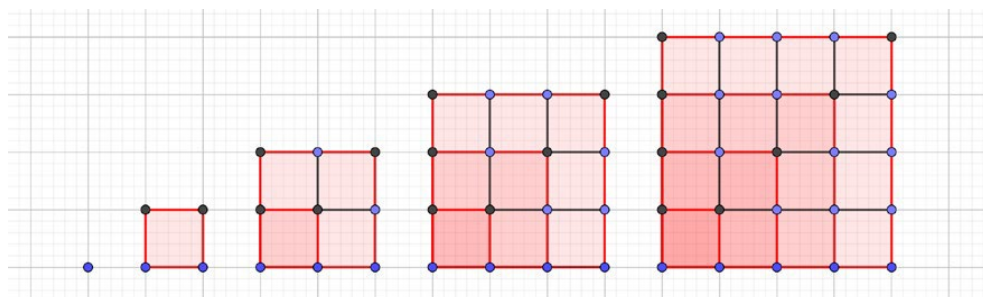
V. Приклади числових послідовностей, які застосовуються на практиці

Історична довідка

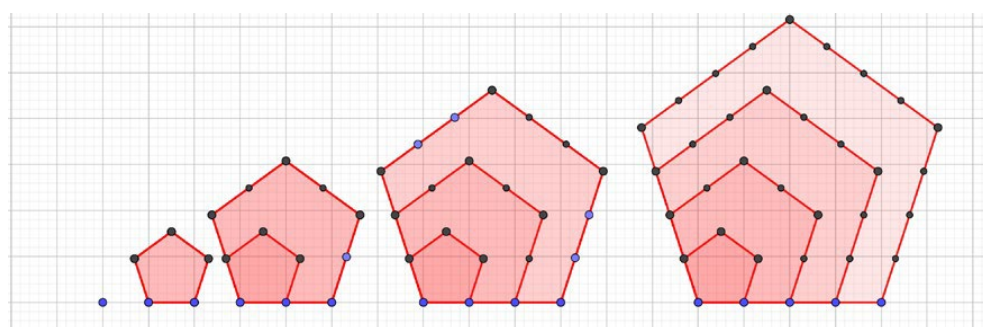
Піфагорійці (учні школи Піфагора) розглядали числові послідовності, пов'язані з геометричними фігурами. Вони складали з підручних матеріалів трикутники, чотирикутники, п'ятикутники тощо. Так було отримано послідовності фігурних чисел (див. рисунки).



1, 3, 6, 10, 15, ... — трикутні числа.



1, 4, 9, 16, 25, ... — чотирикутні (квадратні числа).



1, 5, 12, 22, 35, ... — п'ятикутні числа

Розглянемо числову послідовність, що задана рекурентно:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Ось декілька її перших членів 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89;

Така послідовність має назву «послідовність Фібоначчі», на честь італійського математика Леонарда Пізанського або, по-іншому, — Фібоначчі.

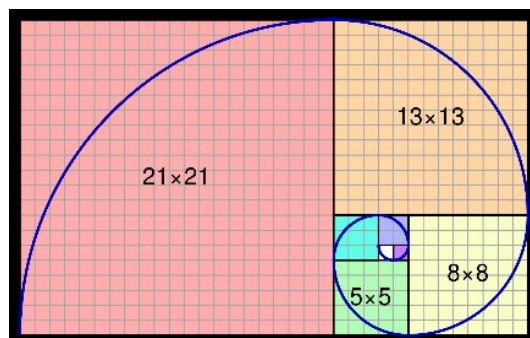
Історична довідка

Леонардо Пізанський або Фібоначчі (близько 1170 р. — близько 1250 р.) зіграв важливу роль у розвитку математики. Він упроваджував арабсько-індійську математику та алгебру в Європі. Одним із найголовніших його досягнень стала книга «Liber Abaci», в якій він представив західному світу арабські числа та методи обчислень, а також послідовність чисел, яка зараз носить його ім'я — «послідовність Фібоначчі». Ця послідовність знайшла своє застосування в різних галузях науки та техніки, в архітектурі, поезії, музиці, фінансах, а також була помічена при вивченні законів природи.

Однією з найбільш відомих властивостей чисел Фібоначчі є їхній зв'язок із уже відомим нам відношенням золотого перерізу. Співвідношення

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ при нескінченному збільшенні числа n пря-

мує до числа $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ (константи Фібоначчі).



Спіраль Фібоначчі, або «золота спіраль», утворюється якщо проводити її через вершини квадратів, сторони яких є послідовними числами Фібоначчі так, як показано на рисунку.

Ви могли помітити золоті спіралі та послідовності чисел Фібоначчі в архітектурних спорудах, живописі та скульптурі, де вони використовуються для створення приємних людському оку пропорцій.

Зовнішні форми природних тіл — це те, що впадає нам у вічі при знайомстві з довколишнім світом. Усі природні тіла, що нас оточують, знаходяться у полі земного тяжіння і, безперечно, відчувають його вплив. Рослини, тварини під впливом цієї сили набувають ззовні схожих рис. Ці риси характеризуються узагальненими законами симетрії, серед яких одне з центральних місць займає явище **філотаксису**. Суть цього явища полягає у спіральному розташуванні листків на стеблах рослин, гілок на деревах, пелюсток у суцвіттях, генів у структурі молекули ДНК тощо (див. рисунок, який узято з Вікіпедії).



Популяція бджіл збільшується за математичною моделлю, яка є послідовністю чисел Фібоначчі. Хвости морських коників розташовані у вигляді спіралей, які описуються послідовностями Фібоначчі. Також такий вигляд мають багато спіральних галактик.

У фінансовому трейдингу важливо вміти спрогнозувати, яке спрямування матиме вартість криптовалюти після певного періоду зростання або падіння. І для цього можна використовувати послідовність чисел Фібоначчі. Наприклад, якщо ціна одного біткоїну виросла до 100, а потім почала падати, трейдер припускає, що вона впаде саме на відсоток, що дорівнює числу із ряду Фібоначчі, а після цього знову підніметься. Числа Фібоначчі допомагають передбачити, наскільки далеко може «відкотитися» ціна після росту або падіння.

Послідовність чисел Фібоначчі є доволі простою, проте, важливою для вивчення основ програмування, алгоритмів та рекурсії.

Якщо більшість класичних музичних творів (особливо Йоганна Себастьяна Баха) розділити на частини за інтонаційною побудовою, то ці частини перебувають між собою у відношенні золотого перерізу.

Для кращого розуміння

<https://www.youtube.com/watch?v=kkGeOWYOFoA>



Ілюстративні приклади (5 хв)

- 12.** Замінімо в послідовності Фібоначчі початкові умови, а саме: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$. Рекурентну формулу залишимо без змін: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Тоді отримаємо іншу числову послідовність. Запишіть дванадцять її перших членів.

Розв'язання. $a_1 = 2$, $a_2 = 1$,

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 2 = 3,$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 1 = 4,$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 4 + 3 = 7,$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 7 + 4 = 11,$$

$$\begin{aligned}
a_7 &= a_6 + a_5 = 11 + 7 = 18, \\
a_8 &= a_7 + a_6 = 18 + 11 = 29, \\
a_9 &= a_8 + a_7 = 29 + 18 = 47, \\
a_{10} &= a_9 + a_8 = 47 + 29 = 76, \\
a_{11} &= a_{10} + a_9 = 76 + 47 = 123, \\
a_{12} &= a_{11} + a_{10} = 123 + 76 = 199.
\end{aligned}$$

Відповідь. 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199.

- 13.** Замінімо в послідовності Фібоначчі рекурентну формулу на $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$, а початкові умови залишимо без змін $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. Тоді отримаємо іншу числову послідовність. Запишіть дванадцять її перших членів. Зробіть висновок про вид цієї послідовності.

Розв'язання. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$,

$$a_3 = a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0,$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = 0 - 1 = -1,$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -1 - 0 = -1,$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -1 - (-1) = 0,$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = 0 - (-1) = 1,$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = 1 - 0 = 1,$$

$$a_9 = a_8 - a_7 = 1 - 1 = 0,$$

$$a_{10} = a_9 - a_8 = 0 - 1 = -1,$$

$$a_{11} = a_{10} - a_9 = -1 - 0 = -1,$$

$$a_{12} = a_{11} - a_{10} = -1 - (-1).$$

Таким чином, отримана послідовність матиме вигляд: 1, 1, 0, -1, -1, 0, 1, 1, 0, -1, -1, 0, ...

Знайдена послідовність періодична з періодом 6.

Також можна зробити висновок, що послідовність обмежена.

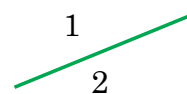
За посиланням <https://oeis.org/?language=ukrainian> ви потрапите до інтерактивної енциклопедії цілочисельних числових послідовностей, де можете вияснити, чи відома вже «відкрита вами» числова послідовність і в яких джерелах вона зустрічається.



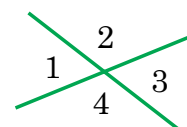
VI. Розв'язування практичних задач. Групова активність (7–8 хв)

- Задача 1.** Іменинник влаштував святкування дня свого народження і замовив для гостей велику піцу. На яку найбільшу кількість шматочків він зможе її розрізати, якщо зробить 12 прямолінійних розрізів. Яку кількість шматочків отримає іменинник?

Розв'язання. 1) Якщо іменинник зробить один прямолінійний розріз, то він отримає два шматочки піци.



2) Якщо він зробить два розрізи, то найбільша кількість шматочків, які він може отримати, — це 4.



3) Новий розріз піци буде розділяти шматочок піци, в кращому випадку, лише на дві частини. Наступні прямолінійні розрізи будуть розділяти кожен із k наявних шматочків тільки тоді, коли цей розріз перетинатиме $k - 1$ пряму розрізу з уже зроблених. Якщо нова пряма не перетинатиме попе-

редні прямі розрізу, то вона не перейде на інший шматочок піци, тобто збільшить кількість лише на 1, перетнувши якусь із прямих розрізів, вона відділятиме ще один шматочок і т.д. Якщо маємо всього n різних прямих, які попередньо поділили нашу піцу на a_n різних шматочки, то наступною $(n + 1)$ -ю прямою ми не зможемо отримати більше ніж $a_n + n$ шматочків, але таку кількість ми зможемо отримати, якщо нова $(n + 1)$ -а пряма перетинатиме усі n попередніх прямих. Це можна зробити, якщо новий розріз робити непаралельним до усіх попередніх розрізів.

Таким чином, маємо послідовність, задану рекурентно, де $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + n$.

Оскільки нам потрібно зробити 12 розрізів, то обчислимо 12 перших членів цієї послідовності:

$$\begin{aligned} a_2 &= 2 + 2 = 4, a_3 = 4 + 3 = 7, \\ a_4 &= 7 + 4 = 11, a_5 = 11 + 5 = 16, \\ a_6 &= 16 + 6 = 22, a_7 = 22 + 7 = 29, \\ a_8 &= 29 + 8 = 37, a_9 = 37 + 9 = 46, \\ a_{10} &= 46 + 10 = 56, a_{11} = 56 + 11 = 67, \\ a_{12} &= 67 + 12 = 79. \end{aligned}$$

Відповідь. 79.

Задача 2. Гості, які люблять математику, підіймаються сходами на другий поверх до іменинника й домовляються, що вони не будуть повторювати послідовність сходинок, якими підіймаються на другий поверх (сходинок пронумеровані натуральними числами, нумерація починається з 1). За такого правила, яка найбільша кількість гостей може піднятися сходами, на яких 20 сходинок, на другий поверх?

Розв'язання. Якби сходи склалися з однієї сходинки, то прийшов би лише один гість, якщо з двох сходинок — то прийшло би двоє гостей.

Далі міркуватимемо так: позначимо кількість варіантів потрапити на сходинку з номером n як b_n . Очевидно, що потрапити на сходинку з номером n можна лише зі сходинки з номером $(n - 1)$ або зі сходинки з номером $(n - 2)$.

Кількість способів піднятися на $(n - 1)$ -шу сходинку становить b_{n-1} , а на $(n - 2)$ -гу — b_{n-2} .

Отже, $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ і $b_1 = 1$, $b_2 = 2$.

Обчисливши решту членів цієї послідовності отримаємо:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233.

Відповідь. 233.

Задача 3. Олімпіадна задача. Знайдіть суму $1 + 101 + 10101 + \dots + \underbrace{10101\dots 01}_n$.

Розв'язання. Послідовність 1, 101, 10101, ... можна задати рівностями

$$a_1 = 1, a_{k+1} = 100a_k + 1.$$

$$\text{Звідси: } a_{k+1} - a_k = 99a_k + 1 \quad (1).$$

Нехай S_n — шукана сума.

Додамо почленно рівності (1) при $k = 1, 2, \dots, n$, отримаємо:

$$a_{n+1} - a_1 = 99S + n, \quad a_{n+1} - 1 = 99S + n \quad \text{і} \quad S = \frac{a_{n+1} - 1 - n}{99}.$$

$$\text{Відповідь. } \frac{\overbrace{10101\dots 100}^n - n}{99}.$$

- 12.** Укажіть номери тих членів послідовності (x_n) , заданої формулою $x_n = \frac{2n+3}{12-n-n^2}$, які не перевищують $-0,5$.

Рівень С

1. Перевірте, чи є числа 1 і 6 членами послідовності $y_n = \frac{n^2+11}{n+1}$. Якщо це так, то вкажіть номер члена цієї послідовності.
2. Запишіть одну з можливих формул n -го члена послідовності:
 - 1) $-\frac{2}{2}; \frac{4}{5}; -\frac{6}{8}; \frac{8}{11}; -\frac{10}{14} \dots$;
 - 2) $\frac{-1}{\sqrt{1 \cdot 2}}; \frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3}}; \frac{-9}{\sqrt{3 \cdot 4}}; \frac{16}{\sqrt{4 \cdot 5}}; \frac{-25}{\sqrt{5 \cdot 6}} \dots$
3. Послідовність (b_n) задана рекурентно: $b_1 = -10$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = |b_n| - 6b_{n+1}$. Знайдіть суму перших восьми її членів.
4. Запишіть перші шість членів послідовності:
 - 1) квадратів простих чисел;
 - 2) наближених значень числа $\sqrt{2}$ з точністю $\frac{1}{10^n}$ (з недостатчею).
5. Доведіть, що послідовність $a_n = \frac{9^n+1}{3^{2n}}$ є спадною.
6. Скільки членів послідовності (u_n) , заданої формулою $u_n = |16 - 3n|$, належать множині значень функції $y = -2x^2 + 3x + 7$?
7. **Творче завдання.** Складіть програму для обчислення n -го члена послідовності, заданої рекурентно.

VIII. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 1. | Я знаю, що таке числові послідовності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я умію задавати числові послідовності різними способами. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я можу розпізнавати монотонні послідовності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю, що таке періодичні послідовності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, що таке обмежені послідовності. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я умію будувати послідовності фігурних чисел. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

- | | | | | |
|-----------|--|-----|------------------------|----|
| 7. | Я знаю, що таке «послідовність Фібоначчі». | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Використання «золотої спіралі» для створення власного твору мистецтва.
- 2.** Дослідження «фігурних послідовностей», заснованих на просторових фігурах.
- 3.** Дослідження залежності між числами послідовності Фібоначчі та числами послідовності Люка.
- 4.** Конструювання власних числових послідовностей, подібних до послідовності Фібоначчі. Перевірка створених послідовностей за допомогою інтерактивної енциклопедії цілочисельних послідовностей.
- 5.** Пошук можливого застосування числових послідовностей у живій і неживій природі.
- 6.** Математичні методи моделювання явища філотаксису.
- 7.** Числа Фібоначчі в поетичних творах.
- 8.** Аналіз ефективності рекурсивних та ітеративних алгоритмів.
- 9.** Рекурентні алгоритми в графах.