

10

Тема 10.

Числові послідовності. Арифметична прогресія. Геометрична прогресія

Урок 2. Арифметична прогресія, її властивості та практичне застосування

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) дізнаєтесь, що таке арифметична прогресія;
- 2) повторите формулу n -го члена арифметичної прогресії;
- 3) повторите властивості арифметичної прогресії;
- 4) навчитеся використовувати ознаки арифметичної прогресії;
- 5) дізнаєтесь, як обчислити суму скінченної кількості членів арифметичної прогресії;
- 6) дізнаєтесь, де зустрічаються арифметичні прогресії у фізиці, будівництві, біології, поезії, тощо;
- 7) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Запишіть одну із можливих формул n -го члена послідовності 5; 8; 11; 14; 17;
2. У салоні пасажирського літака 144 місця. У кожному ряду салону літака 6 місць, з яких чотири зайняті пасажирами, а два — вільні. Скільки пасажирів летіло в літаку?
3. Запишіть перші шість членів послідовності натуральних чисел, які при діленні на 5 дають в остачі 2.

4. Петро й Галина їхали в одному потязі. Петро сів у сьомий вагон від голови потяга, а Галина сіла у вісімнадцятий вагон із хвоста потяга. Скільки вагонів у цьому потязі, якщо вони їхали в одному вагоні?
5. Зростаючою чи спадною є числова послідовність $a_n = 3 - 7n$? Відповідь обґрунтуйте.

III. Арифметична прогресія

Розглянемо одну із *задач Ріндового папірусу* (1650 р. до н.е.).

Задача. Сто мір хліба потрібно розділити між п'ятьма робітниками так, щоб другий отримав на стільки ж більше хліба за першого, на скільки третій отримав більше за другого, четвертий – за третього, п'ятий – за четвертого. Крім того, двоє перших робітників повинні отримати хліба у 7 разів менше від трьох інших. Скільки мір хліба потрібно дати кожному?

Ця задача розв'язується із застосуванням *арифметичної прогресії*.

Історична довідка

Папірус Рінда (також відомий як Rhind Mathematical Papyrus) є одним із найважливіших джерел знань про давньоєгипетську математику. Датується періодом XII династії Середнього царства (1895 – 1795 рр. до н.е.). Писар, на ім'я Ахмес, переписав цей текст на папірус приблизно у 1650 р. до н.е. із ще давнішого папірусу (третє тисячоліття до н.е.).

Александр Генрі Рінд придбав цей папірус у 1858 році в Луксорі. На даний час папірус знаходиться у Британському музеї в Лондоні. Він містить 84 задачі, які охоплюють різні аспекти арифметики, алгебри та геометрії.

Означення. *Арифметичною прогресією* називають числову послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число.

Це число називається *різницею* арифметичної прогресії. Позначають його, як правило, латинською літерою d (як перша літера латинського слова *differentia* – різниця).

Наприклад:

- для послідовності 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; ..., різниця $d = 2$;
- для послідовності -1 ; -5 ; -9 ; -13 ; -17 ; ..., різниця $d = -4$.

Арифметична прогресія (a_n) може бути задана рекурентною формулою $a_{n+1} = a_n + d$, звідки $d = a_{n+1} - a_n$. Тобто, щоб знайти різницю арифметичної прогресії, потрібно від певного члена цієї послідовності відняти її попередній член.

Оскільки, за означенням:

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d,$$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$ тощо, то можна зробити висновок про формулу n -го члена арифметичної прогресії:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Приклад 1. Знайдіть різницю і десятий член арифметичної прогресії (a_n) , яка задана декількома своїми першими членами: $\sqrt{5}$; $6 + \sqrt{5}$; $12 + \sqrt{5}$; $18 + \sqrt{5}$; ...

Приклад 2. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

1) $a_1 = 12$, $a_5 = 40$; 2) $a_6 = -30$, $a_{16} = 30$.

IV. Властивості арифметичної прогресії. Характеристична властивість арифметичної прогресії

Властивості арифметичної прогресії.

1. Характеристична властивість арифметичної прогресії.

Кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх із ним членів, тобто в арифметичній прогресії (a_n) :

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Оскільки $a_{n-1} = a_1 + (n-2)d$ і $a_{n+1} = a_1 + nd$, то:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + (n-2)d + a_1 + nd}{2} = \frac{2a_1 + 2nd - 2d}{2} = a_1 + (n-1)d = a_n.$$

2*. Узагальнена характеристична властивість арифметичної прогресії.

Кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох рівновіддалених від нього членів, тобто в арифметичній прогресії (a_n) :

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \text{ де } n-k \geq 1.$$

3. Сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців, є величиною сталою, тобто $a_1 + a_n = a_k + a_{n+1-k}$.
4. Запишемо формулу n -го члена арифметичної прогресії у вигляді $a_n = dn + a_1 - d$ і позначимо число $a_1 - d = b$. Тоді послідовність $a_n = dn + b$ є лінійною функцією натурального аргументу з кутовим коефіцієнтом d .
5. Якщо зобразити усі члени деякої арифметичної прогресії на координатній площині, то вони будуть лежати на одній прямій.
6. Арифметична прогресія зростаюча, якщо $d > 0$, і спадна — якщо $d < 0$.

Ознаки арифметичної прогресії

1. Якщо будь-який член числової послідовності, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх його членів, то така числова послідовність є арифметичною прогресією.
2. Якщо сума будь-яких двох членів скінченної числової послідовності, рівновіддалених від її кінців, є сталою величиною, то така послідовність є арифметичною прогресією.
3. Якщо $a_n = dn + b$, то числова послідовність є арифметичною прогресією.

Приклад 3. Чи є послідовність (a_n) арифметичною прогресією, якщо $a_n = -7n + 3$? У разі ствердної відповіді, вкажіть перший член і різницю прогресії.

Розв'язання. **1 спосіб.** Оскільки n -й член послідовності $a_n = -7n + 3$ визначається лінійною відносно n функцією, то ця послідовність буде арифметичною прогресією з різницею $d = -7$ і першим членом $a_1 = -4$.

2 спосіб. $a_{n-1} = -7(n-1) + 3 = -7n + 10$,

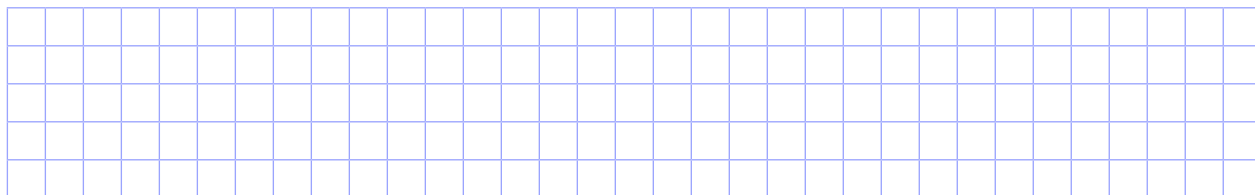
$a_{n+1} = -7(n+1) + 3 = -7n - 4$.

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{-7n + 10 - 7n - 4}{2} = \frac{-14n + 6}{2} = -7n + 3 = a_n.$$

Отже, задана послідовність є арифметичною прогресією з різницею $d = -7$ і першим членом $a_1 = -4$.

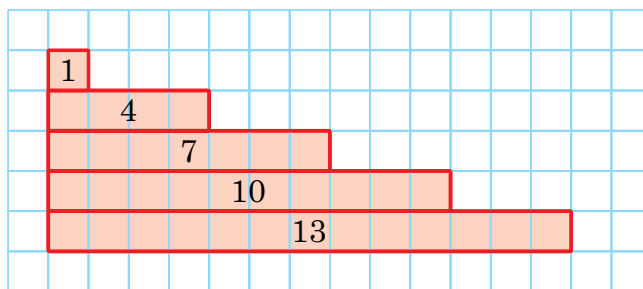
Відповідь. 1) Так. 2) $a_1 = -4$, $d = -7$.

Приклад 4. При якому значенні x значення виразів $x^2 - 4$, $5x + 3$ і $3x + 2$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії?



V. Сума n перших членів арифметичної прогресії

Арифметичну прогресію, усі члени якої натуральні числа, можна зобразити у вигляді сходинки так, як показано на рисунку. На ньому зображено сходинки, які задають арифметичну прогресію $1; 4; 7; 10; \dots$



Якщо доповнити цей рисунок до прямокутника, то це дасть нам підказку, як шукати суму n перших членів скінченної арифметичної прогресії.

Задача 3. Олімпіадна задача. Відомо, що послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть суму $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- Знайдіть різницю і десятий член арифметичної прогресії:
1) 100; 90; 80; 70; ...; 2) $3; 3 - \sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}; 3 - 3\sqrt{2}; \dots$
- Між числами 16 та 28 уставте число так, щоб отримані числа були послідовними членами арифметичної прогресії.
- Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо відомо її перший і n -ий члени:
1) $a_1 = 41, a_{20} = -16$; 2) $a_1 = 17, a_{25} = 31$.
- Знайдіть суму чотирнадцяти перших членів арифметичної прогресії, заданої формулою $a_n = -2n + 8$.
- Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_4 = 7$ і $a_9 = -8$. (ЗНО, 2008 р.).
- Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_4 = 10, a_{10} = 19$.

Рівень В

- Доведіть, за характеристичною властивістю, що послідовність (a_n) є арифметичною прогресією:
1) $a_n = -\frac{1}{3}n - 5$; 2) $a_n = \sqrt{2}n + \sqrt{7}$.
- Дано арифметичну прогресію (a_n) . Знайдіть її різницю, якщо: $a_1 = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2}$,
 $a_n = -\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}, n = 18$.
- Відомо, що $a_{19} = 5$, знайдіть $a_{14} + a_{24}$.
- Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які при діленні на 18 дають в остачі 5.
- Знайдіть значення x , при яких числа $x, 2x - 1, 5x$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії.
- Укажіть найменший номер, починаючи з якого всі члени заданої арифметичної прогресії $a_n = 117 - 5,5n$ будуть більші за 10.
- Перевірте, чи є число 4,3 членом арифметичної прогресії $a_n = 21,3 - 1,7n$. У разі ствердної відповіді, укажіть номер цього члена.

8. Заповніть таблицю:

№	a_1	d	a_n	n	S_n
1.	1		28	10	
2.	10	-2		8	
3.			15	6	60
4.	3		-18		-60
5.	1	3	28		

- 9.** З 1 по 14 червня включно температура повітря щоденно підвищувалася на $0,4^\circ\text{C}$. Відомо, що середня температура за цей час дорівнювала $14,6^\circ\text{C}$. Визначте температуру повітря 1 червня.
- 10.** На змаганнях зі стрільби з пневматичної гвинтівки за кожен промах у серії з 25 пострілів стрілець отримує штрафні бали: за перший промах — один штрафний бал, за кожен наступний — на 0,5 штрафних бала більше, ніж за попередній. Скільки разів влучив у ціль стрілець, який отримав 7 штрафних балів?
- 11.** Джентльмен отримав спадок. Першого місяця він витратив 100 доларів, а кожного наступного місяця він витрачав на 50 доларів більше, ніж попереднього. Який був розмір спадку, якщо грошей вистачило рівно на один рік?
- 12.** Під час підготовки до заліку з вищої математики студент розв'язав за 9 днів 315 задач. У перший день він розв'язав 11 задач, а кожного наступного дня розв'язував на одну й ту саму кількість задач більше, ніж попереднього дня. Визначте кількість задач, які студент розв'язав дев'ятого дня. (Пробне ЗНО, 2016 р.).

Рівень С

- 1.** Доведіть, що числа $\sqrt{2}$, 3, 4 не можуть бути членами однієї арифметичної прогресії (не обов'язково послідовними).
- 2.** Знайдіть значення x , при яких числа $x+1$, x^2 , x^3-13 будуть послідовними членами арифметичної прогресії.
- 3.** Кожні 12 хв автомобіль зменшував свою швидкість на 10 км/год. За який час він проїде 150 км, якщо перші 12 хв він рухався зі швидкістю 120 км/год?
- 4.** Доведіть, що якщо довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію, то відрізок прямої, що сполучає точку перетину медіан з центром вписаного у трикутник кола, паралельний до середньої за довжиною сторони трикутника.
- 5.** В однокруговому турнірі з баскетболу брало участь n команд. Після закінчення турніру виявилося, що очки, набрані командами, утворюють арифметичну прогресію. Скільки очок набрала команда, яка зайняла останнє місце, якщо за перемогу в зустрічі команда отримує 2 очки, за поразку — 0 очок, а нічиїх у баскетболі не буває?
- 6.** Кожні 15 хвилин у басейн подається на 5 м^3 води більше, ніж за попередні 15 хвилин. За який час (у хвиликах) басейн буде заповнено, якщо об'єм басейну дорівнює 675 м^3 , а за перші 15 хвилин у басейн було подано 10 м^3 води?
- 7. Творче завдання.** Складіть програму, яка визначала б, чи є задана послідовність арифметичною прогресією у масиві (чи списку).

Рефлексія

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 1. | Я розумію, що таке арифметична прогресія. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю формулу n -го члена арифметичної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію застосовувати характеристичну властивість арифметичної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю ознаки арифметичної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я умію використовувати формулу для обчислення суми n перших членів арифметичної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю, де арифметична прогресія використовується в повсякденному житті. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Роль арифметичної прогресії в теорії чисел.
2. Арифметична прогресія у фізиці.
3. Арифметична прогресія у музиці та в поезії.
4. Створення власних задач на практичне використання арифметичної прогресії.
5. Арифметична прогресія в історичному контексті математики.
6. Математичні софізми і парадокси, пов'язані з арифметичною прогресією.
7. Арифметична прогресія в задачах на знаходження сум скінченних послідовностей.







