

10

Тема 10.

Числові послідовності. Арифметична прогресія. Геометрична прогресія

Урок 2. Арифметична прогресія, її властивості та практичне застосування

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації знань.

План уроку

1. Арифметична прогресія.
2. Властивості арифметичної прогресії. Характеристична властивість арифметичної прогресії.
3. Сума n перших членів арифметичної прогресії.
4. Практичне використання арифметичної прогресії.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

обирає серед кількох різних стратегій розв'язання специфічних проблемних ситуацій таку, що задовольняє певні умови [12 МАО 2.2.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Повторіть основні поняття попереднього уроку, для цього розв'яжіть приклади на повторення.
- 3) Сформулюйте практичні задачі (без розв'язання). Розв'язання запропонуйте у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

- 5) Запропонуйте учням/ученицям історичні відомості на домашнє опрацювання.
- 6) Доведення властивостей арифметичної прогресії запропонуйте учням/ученицям виконати самостійно, а також акцентуйте увагу, що властивості 5 і 6 безпосередньо випливають із властивості 4.
- 7) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд з урахуванням часових можливостей уроку.
- 8) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 9) Повертаємося до практичних задач, сформульованих на початку уроку. Об'єднуємо учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задач групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 10) Формуємо навички розв'язання прикладів та задач. Пропонуйте учням/ученицям розв'язувати тренувальні вправи за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці.
- 11) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) За яким принципом розподіляється кількість місць для сидіння на стадіоні?
- 2) Як ви думаєте, від якого слова походить термін «прогресія»?
- 3) Коли доцільно використовувати арифметичну прогресію для прогнозування?
- 4) Що спільного між арифметичною прогресією і рівномірним рухом у фізиці?
- 5) Чи завжди доцільно використовувати арифметичну прогресію для прогнозування?
- 6) Чи існує взаємозв'язок між арифметичною прогресією та лінійною функцією? А між арифметичною прогресією та квадратичною функцією?
- 7) Чи знайоме вам поняття «префіксних сум» у програмуванні?
- 8) Чи можна додавати числа за допомогою геометричних ілюстрацій?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Запишіть одну із можливих формул n -го члена послідовності 5; 8; 11; 14; 17;
Відповідь. $a_n = 3n + 2$.

- 2.** У салоні пасажирського літака 144 місця. У кожному ряду салону літака 6 місць, з яких чотири зайняті пасажирами, а два — вільні. Скільки пасажирів летіло в літаку?
Відповідь. 96.
- 3.** Запишіть перші шість членів послідовності натуральних чисел, які при діленні на 5 дають в остачі 2.
Відповідь. 2; 7; 12; 17; 22; 27.
- 4.** Петро й Галина їхали в одному потязі. Петро сів у сьомий вагон від голови потяга, а Галина сіла у вісімнадцятий вагон із хвоста потяга. Скільки вагонів у цьому потязі, якщо вони їхали в одному вагоні?
Відповідь. 24.
- 5.** Зростаючою чи спадною є числова послідовність $a_n = 3 - 7n$? Відповідь обґрунтуйте.
Відповідь. Спадаю.

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. У бак поливальної станції фермерського господарства за першу секунду наливається 33 л води, а за кожну наступну — на 2 л менше. У цей же час, з цього ж бака за першу секунду виливається 3 л води, а кожної наступної — на 2 л більше. Коли рівень води в баку буде найбільшим? Після якої хвилини бак спорожніє повністю?

Задача 2. Лікарську настоянку п'ють краплями. У перший день пацієнт прийняв 6 крапель, а кожного наступного дня — на 3 краплі більше, ніж за попередній день. Якщо рахувати з 11-го дня, то пацієнт, за приписом лікаря, дозу настоянки щодня зменшував на 3 краплі та закінчив курс лікування на 19-й день після початку лікування. Скільки крапель настоянки прийняв пацієнт за перших 10 днів лікування? Скільки всього крапель прийняв пацієнт упродовж усього курсу лікування?

Задача 3. Олімпіадна задача. Відомо, що послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть суму $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$.

III. Арифметична прогресія (5–7 хв)

Розглянемо одну із *задач Ріндового напірису* (1650 р. до н.е.).

Задача. Сто мір хліба потрібно розділити між п'ятьма робітниками так, щоб другий отримав на стільки ж більше хліба за першого, на скільки третій отримав більше за другого, четвертий — за третього, п'ятий — за четвертого. Крім того, двоє перших робітників повинні отримати хліба у 7 разів менше від трьох інших. Скільки мір хліба потрібно дати кожному?

Ця задача розв'язується із застосуванням *арифметичної прогресії*.

Історична довідка

Папірус Рінда (також відомий як Rhind Mathematical Papyrus) є одним із найважливіших джерел знань про давньоєгипетську математику. Датується періодом XII династії Середнього царства (1895 – 1795 рр. до н.е.). Писар, на ім'я Ахмес, переписав цей текст на папірус приблизно у 1650 р. до н.е. із ще давнішого папірусу (третє тисячоліття до н.е.).

Александр Генрі Рінд придбав цей папірус у 1858 році в Луксорі. На даний час папірус знаходиться у Британському музеї в Лондоні. Він містить 84 задачі, які охоплюють різні аспекти арифметики, алгебри та геометрії.

Означення. Арифметичною прогресією називають числову послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число.

Це число називається **різницею** арифметичної прогресії. Позначають його, як правило, латинською літерою d (як перша літера латинського слова *differentia* – різниця).

Наприклад:

- для послідовності 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; ..., різниця $d = 2$;
- для послідовності -1; -5; -9; -13; -17; ..., різниця $d = -4$.

Арифметична прогресія (a_n) може бути задана рекурентною формулою $a_{n+1} = a_n + d$, звідки $d = a_{n+1} - a_n$. Тобто, щоб знайти різницю арифметичної прогресії, потрібно від певного члена цієї послідовності відняти її попередній член.

Оскільки, за означенням:

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d,$$

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$ тощо, то можна зробити висновок про формулу n -го члена арифметичної прогресії:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Ілюстративні приклади (7–10 хв)

- 6.** Знайдіть різницю і десятий член арифметичної прогресії (a_n) , яка задана декількома своїми першими членами: $\sqrt{5}$; $6 + \sqrt{5}$; $12 + \sqrt{5}$; $18 + \sqrt{5}$; ...

Розв'язання. $a_1 = \sqrt{5}$; $a_2 = 6 + \sqrt{5}$.

$$d = a_2 - a_1 = 6 + \sqrt{5} - \sqrt{5} = 6.$$

Скористаємось формулою $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Отримаємо: $a_{10} = a_1 + 9d = \sqrt{5} + 54$.

Відповідь. $d = 6$, $a_{10} = \sqrt{5} + 54$.

- 7.** Запишіть формулу n -го члена арифметичної прогресії (a_n) , яка задана декількома своїми першими членами: $-2\sqrt{5}$; $-\sqrt{5}$; 0 ; $\sqrt{5}$; $2\sqrt{5}$; ...

Розв'язання. Оскільки $a_1 = -2\sqrt{5}$; $a_2 = -\sqrt{5}$, то $d = a_2 - a_1 = -\sqrt{5} - (-2\sqrt{5}) = \sqrt{5}$.

Скористаємось формулою $a_n = a_1 + (n - 1)d$, отримаємо:

$$a_n = -2\sqrt{5} + (n - 1)\sqrt{5} = -2\sqrt{5} + \sqrt{5}n - \sqrt{5} = \sqrt{5}(n - 3).$$

Відповідь. $a_n = \sqrt{5}(n - 3)$.

8. Знайдіть різницю арифметичної прогресії (a_n) , якщо:

1) $a_1 = 12$, $a_5 = 40$; 2) $a_6 = -30$, $a_{16} = 30$.

Розв'язання. 1) Із рівності $a_5 = a_1 + 4d$, отримаємо $40 = 12 + 4d$, $4d = 28$, $d = 7$.

2) Знайдемо різницю двох рівностей $a_{16} = a_1 + 15d$ і $a_6 = a_1 + 5d$:

$$a_{16} - a_6 = 15d - 5d,$$

$$30 - (-30) = 10d,$$

$$10d = 60, d = 6.$$

Відповідь. 1) 7; 2) 6.

9. Укажіть найменший номер, починаючи з якого усі члени арифметичної прогресії (a_n) , де $a_1 = -12$, $d = 3$, будуть більші за 141.

Розв'язання. За формулою n -го члена $a_n = a_1 + (n - 1)d$ складемо нерівність:

$$-12 + 3(n - 1) > 141,$$

$$-12 + 3n - 3 > 141,$$

$$3n > 141 + 15,$$

$$3n > 156,$$

$$n > 52.$$

Отже, найменший номер, починаючи з якого усі члени даної арифметичної прогресії більші за 141, дорівнює 53.

Відповідь. 53.

IV. Властивості арифметичної прогресії. Характеристична властивість арифметичної прогресії (8–10 хв)

- 1) Чому прогресія називається арифметичною?
- 2) Як можна встановити, чи буде задана послідовність арифметичною прогресією?
- 3) Чи існує зв'язок між арифметичною прогресією та лінійною функцією?
- 4) Чим відрізняється ознака від властивості?

Властивості арифметичної прогресії.

1. *Характеристична властивість арифметичної прогресії.*

Кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх із ним членів, тобто в арифметичній прогресії (a_n) :

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Оскільки $a_{n-1} = a_1 + (n - 2)d$ і $a_{n+1} = a_1 + nd$, то:

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 + (n - 2)d + a_1 + nd}{2} = \frac{2a_1 + 2nd - 2d}{2} = a_1 + (n - 1)d = a_n.$$

2*. Узагальнена характеристична властивість арифметичної прогресії.

Кожний член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох рівновіддалених від нього членів, тобто в арифметичній прогресії (a_n):

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \text{ де } n - k \geq 1.$$

3. Сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців, є величиною сталою, тобто $a_1 + a_n = a_k + a_{n+1-k}$.
4. Запишемо формулу n -го члена арифметичної прогресії у вигляді $a_n = dn + a_1 - d$ і позначимо число $a_1 - d = b$. Тоді послідовність $a_n = dn + b$ є лінійною функцією натурального аргументу з кутовим коефіцієнтом d .
5. Якщо зобразити усі члени деякої арифметичної прогресії на координатній площині, то вони будуть лежати на одній прямій.
6. Арифметична прогресія зростаюча, якщо $d > 0$, і спадна — якщо $d < 0$.

Ознаки арифметичної прогресії

1. Якщо будь-який член числової послідовності, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх його членів, то така числова послідовність є арифметичною прогресією.
2. Якщо сума будь-яких двох членів скінченної числової послідовності, рівновіддалених від її кінців, є сталою величиною, то така послідовність є арифметичною прогресією.
3. Якщо $a_n = dn + b$, то числова послідовність є арифметичною прогресією.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

10. Чи є послідовність (a_n) арифметичною прогресією, якщо $a_n = -7n + 3$? У разі ствердної відповіді, вкажіть перший член і різницю прогресії.

Розв'язання. **1 спосіб.** Оскільки n -й член послідовності $a_n = -7n + 3$ визначається лінійною відносно n функцією, то ця послідовність буде арифметичною прогресією з різницею $d = -7$ і першим членом $a_1 = -4$.

2 спосіб. $a_{n-1} = -7(n-1) + 3 = -7n + 10$,

$$a_{n+1} = -7(n+1) + 3 = -7n - 4.$$

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{-7n + 10 - 7n - 4}{2} = \frac{-14n + 6}{2} = -7n + 3 = a_n.$$

Отже, задана послідовність є арифметичною прогресією з різницею $d = -7$ і першим членом $a_1 = -4$.

Відповідь. 1) Так. 2) $a_1 = -4$, $d = -7$.

11. Чи є послідовність (a_n) арифметичною прогресією, якщо $a_n = 2n^2 + n$? У разі ствердної відповіді, вкажіть перший член і різницю прогресії.

Розв'язання. Оскільки $a_n = 2n^2 + n$, то:

$$a_1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3,$$

$$a_2 = 2 \cdot 2^2 + 2 = 10,$$

$$a_3 = 2 \cdot 3^2 + 3 = 21.$$

Оскільки $a_3 - a_2 = 11$, а $a_2 - a_1 = 7$, то дана послідовність не буде арифметичною прогресією.

Відповідь. Ні.

- 12.** При якому значенні x значення виразів $x^2 - 4$, $5x + 3$ і $3x + 2$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії?

Розв'язання. Скористаємось характеристичною властивістю арифметичної прогресії: $5x + 3 = \frac{x^2 - 4 + 3x + 2}{2}$, $10x + 6 = x^2 + 3x - 2$, $x^2 - 7x - 8 = 0$.

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, $x_1 = -1$, $x_2 = 8$.

При $x = -1$ значення виразів будуть -3 , -2 , -1 .

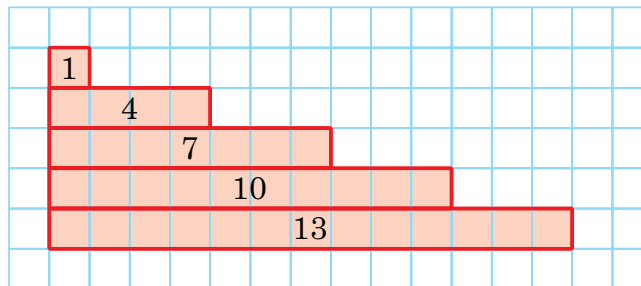
При $x = 8$ отримаємо: 60, 43, 26.

Відповідь. 1 або 8.

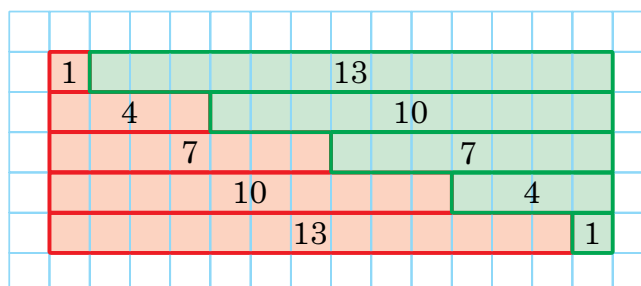
V. Сума n перших членів арифметичної прогресії (5–6 хв)

- 1) Чи доводилось вам шукати закономірності при додаванні великої кількості чисел?
- 2) Як пов'язані між собою арифметична прогресія і квадратична функція?
- 3) Чи знайоме вам поняття «префіксних сум» у програмуванні?
- 4) Як можна додавати числа за допомогою геометричних ілюстрацій?

Арифметичну прогресію, усі члени якої натуральні числа, можна зобразити у вигляді сходинок так, як показано на рисунку. На ньому зображено сходинки, які задають арифметичну прогресію 1; 4; 7; 10; ...



Якщо доповнити цей рисунок до прямокутника, то це дасть нам підказку, як шукати суму n перших членів скінченної арифметичної прогресії.



Нехай $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$.

Перепишемо цю суму у зворотному порядку: $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$.

Додамо дві останні рівності:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Оскільки $a_1 + a_n = a_k + a_{n+1-k}$, то отримаємо:

$$2S_n = n(a_1 + a_n), \text{ звідки: } S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Можна також отримати іншу формулу суми n -перших членів арифметичної прогресії, якщо підставити в попередню формулу $a_n = a_1 + (n - 1)d$:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Властивості суми n перших членів арифметичної прогресії (a_n)

1. $a_n = S_n - S_{n-1}$.
2. Сума n перших членів арифметичної прогресії є квадратичною функцією від натурального аргументу n .

Ілюстративні приклади (4–5 хв)

- 13.** Сума п'ятого і дев'ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 18. Знайдіть суму тринадцяти перших членів цієї прогресії.

Розв'язання. 1) $a_5 = a_1 + 4d$,

2) $a_9 = a_1 + 8d$,

3) $a_5 + a_9 = 2a_1 + 12d = 18$.

4) $S_{13} = \frac{2a_1 + 12d}{2} \cdot 13 = \frac{18}{2} \cdot 13 = 9 \cdot 13 = 117$.

Відповідь. 117.

- 14.** Знайдіть суму всіх натуральних чисел, кратних п'яти, які не перевищують 261.

Розв'язання. Дана послідовність є арифметичною прогресією, де $a_1 = 5$, $d = 5$.

$a_n = 5 + 5(n - 1) = 5n$, $5n \leq 261$, $n \leq 52,2$.

Тобто потрібно знайти суму перших 52-х членів цієї прогресії.

$$S_{52} = \frac{2 \cdot 5 + 51 \cdot 5}{2} \cdot 52 = 265 \cdot 26 = 6890.$$

Відповідь. 6890.

VI. Практичне застосування арифметичної прогресії (7–8 хв)

- 1) Чи має застосування арифметична прогресія в спорті?
- 2) Як використовується арифметична прогресія в поезії?
- 3) Чи можна застосувати арифметичну прогресію у прогнозуванні природних явищ або кліматичних змін?

Арифметична прогресія має практичне застосування там, де відбувається рівномір-на зміна певної величини за однакові проміжки часу.

Наведемо декілька прикладів, де використовується арифметична прогресія.

Приклад 1. Застосування у фізичних задачах.

Вільно падаюче тіло проходить за першу секунду 4,9 м, а за кожну наступну — на 9,8 м більше, ніж за попередню (опором повітря знехтуйте). Яку відстань пройде падаюче тіло за 12 с? Скільки секунд буде падати тіло з висоти 1960 м?

Розв'яжіть задачу за допомогою формул арифметичної прогресії та за допомогою формул фізики та порівняйте отримані відповіді.

Приклад 2. Застосування в задачах машинобудування.

Вагонна ресора складається з 10 скріплених металевих листів, накладених один на одний. Верхній шар ресори має довжину 105 см, а кожен з решти листів на 9 см коротший від попереднього. Знайдіть загальну довжину десяти металевих листів, потрібних для виготовлення ресори.

Приклад 3. Застосування в будівництві.

За встановлення верхнього залізобетонного кільця криниці власник заплатив бригаді робітників 100 у.о., а за кожне наступне кільце на 20 у.о. більше ніж за попереднє. Середня вартість установки одного кільця становить 220 у.о. Скільки кілець було встановлено?

Приклад 4. Застосування у спорті.

Альпіністи першого дня сходження на гору піднялися на висоту 1400 м, а кожного наступного дня вони проходили на 100 м менше, ніж за попередній день. За скільки днів вони подолають висоту 5000 м?

Також арифметична прогресія має певний стосунок й до поезії:

1) ямб — віршований розмір із наголосом на парних складах, тобто складах із номерами 2, 4, 6, 8, ...;

2) хорей — віршований розмір із наголосом на непарних складах 1, 3, 5, 7,

Тобто, віршовані розміри мають певні упорядковані наголоси словесних складів, що можуть умовно вважатися елементами арифметичної прогресії.

Ілюстративний приклад

- 15.** Спортсмен-початківець розпочав свої ранкові тренування з пробіжки завдовжки 2 км. Кожен наступний день він збільшував свою дистанцію на одну й ту саму величину. На одинадцятий день спортсмен пробіг 4 км. На яку відстань (у метрах) він збільшував дистанцію кожного дня?

Розв'язання. Довжини щоденних пробіжок спортсмена (у метрах) утворюють арифметичну прогресію (a_n) , у якій $a_1 = 2000$, $a_{11} = 4000$. Потрібно знайти різницю d цієї прогресії.

Оскільки $a_{11} = a_1 + 10d$, то: $4000 = 2000 + 10d$, $10d = 2000$, $d = 200$.

Відповідь. На 200 м.

- 16.** Щоб оздоровитися повітряними процедурами, пацієнту в санаторії запропонували 15 хв упродовж першого дня перебувати на свіжому повітрі. А кожного наступного дня збільшувати час перебування на свіжому повітрі на 10 хв. Скільки днів пацієнт проводитиме свій час на свіжому повітрі у вказаному режимі, щоб досягти їхньої максимальної тривалості 2 год 25 хв? Скільки часу пацієнт проводитиме на свіжому повітрі впродовж усього терміну оздоровлення?

Розв'язання. Щоденні терміни перебування пацієнта на свіжому повітрі (у хвилинах) утворюють арифметичну прогресію (a_n) , у якій $a_1 = 15$, $d = 10$, $a_n = 145$. Потрібно знайти n та S_n .

Для знаходження n , скористаємось формулою $a_n = a_1 + (n - 1)d$:

$$145 = 15 + 10(n - 1), 10n - 10 + 15 = 145, 10n = 140, n = 14.$$

Для знаходження S_{14} використаємо формулу: $S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$.

$$S_{14} = \frac{2 \cdot 15 + 13 \cdot 10}{2} \cdot 14 = 80 \cdot 14 = 1120 \text{ (хв)} = 18 \frac{40}{60} \text{ год} = 18 \text{ год } 40 \text{ хв}.$$

Відповідь. 14 днів, 18 год 40 хв.

VII. Розв'язування практичних задач. Групова активність (7–8 хв)

Задача 1. У бак поливальної станції фермерського господарства за першу секунду наливається 33 л води, а за кожну наступну — на 2 л менше. У цей же час, з цього ж бака за першу секунду виливається 3 л води, а кожної наступної — на 2 л більше. Коли рівень води в баку буде найбільшим? Після якої хвилини бак спорожніє повністю?

Розв'язання. 1) Кількість води, що прибуває щосекунди, є арифметичною прогресією (a_n) , де $a_1 = 33$, $d = -2$.

2) Кількість води, що виливається щосекунди, є також арифметичною прогресією (b_n) , де $b_1 = 3$, $d = 2$.

3) Використаємо формулу суми n перших членів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n,$$

для знаходження $f(n)$ — кількості води в баку через n секунд після початку.

$$\text{За } n \text{ секунд у бак наллється } \frac{2 \cdot 33 - 2(n - 1)}{2} \cdot n \text{ літрів води, а виллється з бака } \frac{2 \cdot 3 + 2(n - 1)}{2} \cdot n.$$

Таким чином, через n секунд у баку буде $f(n)$ літрів води:

$$f(n) = \frac{2 \cdot 33 - 2(n - 1)}{2} \cdot n - \frac{2 \cdot 3 + 2(n - 1)}{2} \cdot n = \frac{n}{2} (66 - 2n + 2 - 6 - 2n + 2) = \frac{n}{2} (64 - 4n) = -2n^2 + 32n.$$

Квадратична функція $f(n) = -2n^2 + 32n$ набуває свого найбільшого значення у вершині параболи, точці $n_0 = -\frac{32}{2 \cdot (-2)} = 8$. Тобто, через 8 секунд води в баку буде найбільше.

Бак буде порожній, коли $f(n) = 0$, тобто $-2n^2 + 32n = 0$, $-2n(n - 16) = 0$, звідки $n = 0$ або $n = 16$.

Отже, через 16 секунд бак спорожніє повністю.

Відповідь. 8 с, 16 с.

Задача 2. Лікарську настоянку п'ють краплями. У перший день пацієнт прийняв 6 крапель, а кожного наступного дня — на 3 краплі більше, ніж за попередній день. Якщо рахувати з 11-го дня, то пацієнт, за приписом лікаря, дозу настоянки щодня зменшував на 3 краплі та закінчив курс лікування на 19-й день після початку лікування. Скільки крапель настоянки прийняв пацієнт за перших 10 днів лікування? Скільки всього крапель прийняв пацієнт упродовж усього курсу лікування?

Розв'язання. 1) Кількість крапель, які приймав пацієнт за перших 10 днів, є арифметичною прогресією (a_n) , де $a_1 = 6$, $d = 3$.

2) Тоді: $a_{10} = a_1 + 9d = 6 + 27 = 33$, звідси: $S_{10} = \frac{6+33}{2} \cdot 10 = 195$ (крапель).

3) Кількість крапель, які прийняв пацієнт від 11-го дня до 19-го, також є арифметичною прогресією (b_n) , де $b_1 = 30$, $d = -3$.

Усього випитих крапель від 11-го дня до 19-го становитиме:

$$\frac{2 \cdot 30 - 3(9-1)}{2} \cdot 9 = \frac{60 - 24}{2} \cdot 9 = 18 \cdot 9 = 162 \text{ (краплі)}.$$

Отже, протягом курсу лікування було прийнято $195 + 162 = 357$ (крапель).

Відповідь. 195 крапель, 357 крапель.

Задача 3. Олімпіадна задача. Відомо, що послідовність (a_n) — арифметична прогресія. Знайдіть суму $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$.

Розв'язання. Нехай d — різниця арифметичної прогресії (a_n) .

Звільнимися від ірраціональності в знаменнику кожного дробу:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \\ &= \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})} + \frac{(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3})}{(\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3})(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3})} + \dots + \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}})}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}})(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}})} = \\ &= \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{a_n - a_{n+1}} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{-d} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{-d} + \dots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{-d} = \\ &= \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_2} - \sqrt{a_3} + \dots + \sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{-d} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{n+1}}}{-d} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}}{d}. \end{aligned}$$

Звільнимися від ірраціональності в чисельнику останнього дробу:

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{d(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_1})} = \frac{nd}{d(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_1})} = \frac{n}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_1}}.$$

Відповідь. $\frac{n}{\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_1}}.$

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

- Знайдіть різницю і десятий член арифметичної прогресії:
1) 100; 90; 80; 70; ...; 2) $3; 3 - \sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}; 3 - 3\sqrt{2}; \dots$
- Між числами 16 та 28 уставте число так, щоб отримані числа були послідовними членами арифметичної прогресії.
- Знайдіть суму n перших членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо відомо її перший і n -ий члени:
1) $a_1 = 41, a_{20} = -16$; 2) $a_1 = 17, a_{25} = 31$.
- Знайдіть суму чотирнадцяти перших членів арифметичної прогресії, заданої формулою $a_n = -2n + 8$.
- Знайдіть перший член арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_4 = 7$ і $a_9 = -8$. (ЗНО, 2008 р.).
- Знайдіть суму перших десяти членів арифметичної прогресії (a_n) , якщо $a_4 = 10, a_{10} = 19$.

Рівень В

- Доведіть, за характеристичною властивістю, що послідовність (a_n) є арифметичною прогресією:
1) $a_n = -\frac{1}{3}n - 5$; 2) $a_n = \sqrt{2}n + \sqrt{7}$.
- Дано арифметичну прогресію (a_n) . Знайдіть її різницю, якщо: $a_1 = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2}$,
 $a_n = -\frac{2\sqrt{3} - 3}{2}, n = 18$.
- Відомо, що $a_{19} = 5$, знайдіть $a_{14} + a_{24}$.
- Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які при діленні на 18 дають в остачі 5.
- Знайдіть значення x , при яких числа $x, 2x - 1, 5x$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії.
- Укажіть найменший номер, починаючи з якого всі члени заданої арифметичної прогресії $a_n = 117 - 5,5n$ будуть більші за 10.
- Перевірте, чи є число 4,3 членом арифметичної прогресії $a_n = 21,3 - 1,7n$. У разі ствердної відповіді, укажіть номер цього члена.
- Заповніть таблицю:

№	a_1	d	a_n	n	S_n
1.	1		28	10	
2.	10	-2		8	
3.			15	6	60
4.	3		-18		-60
5.	1	3	28		

9. З 1 по 14 червня включно температура повітря щоденно підвищувалася на $0,4^{\circ}\text{C}$. Відомо, що середня температура за цей час дорівнювала $14,6^{\circ}\text{C}$. Визначте температуру повітря 1 червня.
10. На змаганнях зі стрільби з пневматичної гвинтівки за кожен промах у серії з 25 пострілів стрілець отримує штрафні бали: за перший промах — один штрафний бал, за кожен наступний — на 0,5 штрафних бала більше, ніж за попередній. Скільки разів влучив у ціль стрілець, який отримав 7 штрафних балів?
11. Джентльмен отримав спадок. Першого місяця він витратив 100 доларів, а кожного наступного місяця він витрачав на 50 доларів більше, ніж попереднього. Який був розмір спадку, якщо грошей вистачило рівно на один рік?
12. Під час підготовки до заліку з вищої математики студент розв'язав за 9 днів 315 задач. У перший день він розв'язав 11 задач, а кожного наступного дня розв'язував на одну й ту саму кількість задач більше, ніж попереднього дня. Визначте кількість задач, які студент розв'язав дев'ятого дня. (Пробне ЗНО, 2016 р.).

Рівень С

1. Доведіть, що числа $\sqrt{2}$, 3, 4 не можуть бути членами однієї арифметичної прогресії (не обов'язково послідовними).
2. Знайдіть значення x , при яких числа $x+1$, x^2 , $x^3 - 13$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії.
3. Кожні 12 хв автомобіль зменшував свою швидкість на 10 км/год. За який час він проїде 150 км, якщо перші 12 хв він рухався зі швидкістю 120 км/год?
4. Доведіть, що якщо довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію, то відрізок прямої, що сполучає точку перетину медіан з центром вписаного у трикутник кола, паралельний до середньої за довжиною сторони трикутника.
5. В однокруговому турнірі з баскетболу брало участь n команд. Після закінчення турніру виявилося, що очки, набрані командами, утворюють арифметичну прогресію. Скільки очок набрала команда, яка зайняла останнє місце, якщо за перемогу в зустрічі команда отримує 2 очки, за поразку — 0 очок, а нічий у баскетболі не буває?
6. Кожні 15 хвилин у басейн подається на 5 м^3 води більше, ніж за попередні 15 хвилин. За який час (у хвиликах) басейн буде заповнено, якщо об'єм басейну дорівнює 675 м^3 , а за перші 15 хвилин у басейн було подано 10 м^3 води?
7. **Творче завдання.** Складіть програму, яка визначала б, чи є задана послідовність арифметичною прогресією у масиві (чи списку).

ІХ. Рефлексія (2 хв)

1. Я розумію, що таке арифметична прогресія.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----
2. Я знаю формулу n -го члена арифметичної прогресії.

Так	Ще треба потренуватися	Ні
-----	------------------------	----

- | | | | | |
|-----------|--|-----|------------------------|----|
| 3. | Я вмію застосовувати характеристичну властивість арифметичної прогресії. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю ознаки арифметичної прогресії. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я умію використовувати формулу для обчислення суми n перших членів арифметичної прогресії. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю, де арифметична прогресія використовується в повсякденному житті. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Роль арифметичної прогресії в теорії чисел.
- 2.** Арифметична прогресія у фізиці.
- 3.** Арифметична прогресія у музиці та в поезії.
- 4.** Створення власних задач на практичне використання арифметичної прогресії.
- 5.** Арифметична прогресія в історичному контексті математики.
- 6.** Математичні софізми і парадокси, пов'язані з арифметичною прогресією.
- 7.** Арифметична прогресія в задачах на знаходження сум скінченних послідовностей.