

10

Тема 10.

Числові послідовності. Арифметична прогресія. Геометрична прогресія

Урок 3. Геометрична прогресія, її властивості та практичне застосування

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) повторите означення геометричної прогресії;
- 2) повторите формулу n -го члена геометричної прогресії;
- 3) вивчите властивості геометричної прогресії;
- 4) навчитеся використовувати ознаки геометричної прогресії;
- 5) дізнаєтесь, як шукати суму скінченної кількості членів геометричної прогресії;
- 6) навчитеся шукати суму нескінченно спадної геометричної прогресії;
- 7) навчитеся за допомогою формули суми нескінченно спадної геометричної прогресії перетворювати періодичні дроби у звичайні;
- 8) зрозумієте застосування геометричної прогресії у фізиці, біології, економіці, геометрії, тощо;
- 9) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв'яжіть нерівність $3x - 4 > 5x + 4$.
2. Автосалон продав клієнтам m автомобілів по n грн кожний і отримав чистого прибутку p грн. По якій ціні автосалон купував один автомобіль у виробника?
3. Знайдіть сьомий член арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 8, а різниця становить 0,5.
4. Обчисліть значення виразу $\sqrt{(8 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$.
5. При якому значенні a розклад квадратного тричлена $2x^2 + ax - 3$ на лінійні множники містить множник $2x - 3$?

III. Геометрична прогресія

Мотиваційна задача. Один із користувачів соціальної мережі дізнався важливу новину і поділився цією новиною з чотирма своїми друзями. Кожен із його друзів упродовж найближчої години поділився новиною із чотирма своїми друзями. І так кожен із отримувачів новини упродовж години ділився новиною із чотирма своїми друзями. Якій найбільшій кількості користувачів соціальної мережі повідомлено новину за 10 годин?

Така задача і подібні до неї, де використовуються послідовності, в яких кожен наступний член утворюється за допомогою множення попереднього на одне і те саме число, розв'язуються за допомогою геометричної прогресії.

Означення. Геометричною прогресією називають числову послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число.

Це число називається **знаменником** геометричної прогресії. Позначають його, як правило, латинською літерою q (походить від французького слова quotient, тобто частка).

Наприклад:

- для послідовності 3; 6; 12; 24; 48; 96; 192; 384; ... знаменник $q = 2$,
- для послідовності -1 ; 0,5; $-0,25$; 0,125; $-0,625$; ... знаменник $q = -0,5$.

Геометрична прогресія (b_n) може бути задана рекурентною формулою $b_{n+1} = b_n \cdot q$,

$b_n \neq 0$, $q \neq 0$, звідки $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тобто, щоб знайти знаменник геометричної прогресії,

потрібно деякий член цієї послідовності поділити на її попередній член.

Змоделюємо формулу n -го члена геометричної прогресії.

За означенням:

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3,$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = b_1 \cdot q^3 \cdot q = b_1 \cdot q^4 \text{ тощо.}$$

Тоді формула n -го члена геометричної прогресії: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Історична довідка

Слово «прогресія» латинського походження (лат. *progresio*), означає «рух уперед» (як і слово «прогрес») і зустрічається вперше у римського автора Боеція (V – VI ст.). Спочатку під терміном «прогресія» розуміли будь-яку числову послідовність, побудовану за правилом, яке дозволяло нескінченно продовжувати її в одному напрямку, наприклад, послідовність квадратів чи кубів натуральних чисел. У XVII ст. Дж. Грегорі почав уживати замість терміна «прогресія» термін «ряд». У наш час ми вживаємо термін «прогресія» лише для деяких послідовностей.

Приклад 1. Знайдіть знаменник геометричної прогресії: $\frac{12\sqrt{5}}{7}; 6\sqrt{5}; 21\sqrt{5} \dots$

[illegible]

Приклад 2. Запишіть формулу n -го члена геометричної прогресії (b_n) , яка задана декількома своїми першими членами: $4; 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \dots$

[illegible]

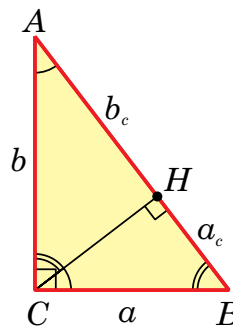
IV. Властивості геометричної прогресії. Характеристична властивість геометричної прогресії

Означення. Число a називається **середнім геометричним** чисел b та c , якщо $a^2 = b \cdot c$.

Побудуємо прямокутний трикутник ABC та опустимо висоту CH на гіпотенузу AB (див. рисунок). Нехай $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $AH = b_c$, $BH = a_c$.

Оскільки трикутники ACB і AHC подібні, то $\frac{AC}{AH} = \frac{AB}{AC}$ або $\frac{b}{b_c} = \frac{c}{b}$, звідси $b^2 = b_c \cdot c$.

Оскільки трикутники ACB і CHB подібні, то $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{HB}$ або $\frac{c}{a} = \frac{a}{a_c}$,
звідси $a^2 = a_c \cdot c$.



У прямокутному трикутнику квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи на проекцію цього катета на гіпотенузу.

Властивості геометричної прогресії

1. Характеристична властивість геометричної прогресії.

Квадрат кожного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх із ним членів, тобто в геометричній прогресії (b_n):

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Оскільки $b_{n-1} = b_1 \cdot q^{n-2}$, а $b_{n+1} = b_1 \cdot q^n$, то:

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n,$$

$$\left(b_1 \cdot q^{n-1}\right)^2 = b_n^2.$$

2. Узагальнена характеристична властивість геометричної прогресії.

Квадрат кожного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох рівновіддалених від нього членів, тобто в геометричній прогресії (b_n) : $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, де $n - k \geq 1$.

3. Добуток двох членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від її першого і останнього членів, є сталим і дорівнює добутку першого і останнього членів, тобто $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$.

Ознаки геометричної прогресії

- 1.** Якщо будь-який член числової послідовності, починаючи з другого, дорівнює середньому геометричному двох сусідніх його членів, то така числова послідовність є геометричною прогресією.
- 2.** Якщо добуток будь-яких двох членів скінченної числової послідовності, які рівновіддалені від її кінців, є сталим, то така послідовність є геометричною прогресією.

Приклад 3. Чи є послідовність (b_n) геометричною прогресією, якщо $b_n = 4 \cdot 3^{n-2}$? У разі ствердної відповіді вкажіть перший член прогресії.

[illegible]

Приклад 4. Знайдіть значення x , при яких числа $-81; 3x; -1$ є послідовними членами геометричної прогресії.

[illegible]

V. Сума n перших членів геометричної прогресії

Розглянемо задачу із уже відомого нам *напірису Рінда*.

Задача. Є 7 будинків, у кожному будинку по 7 котів, кожен кіт з'їдає 7 мишей, кожна миша з'їдає по 7 колосків ячменю, кожен колосок, якщо посіяти зерно, дає 7 мір ячменю. Знайдіть суму загальної кількості будинків, котів, мишей, колосків і мір ячменю.

У цій задачі потрібно знайти суму $S = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$, у якій доданками є послідовні члени геометричної прогресії з першим членом 7 та знаменником 7.

Для обчислення цієї суми помножимо обидві її частини на 7:

$$7S = 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6,$$

$$7S = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6 - 7,$$

$$7S = S + 7^6 - 7,$$

$$6S = 7^6 - 7,$$

$$S = \frac{7^6 - 7}{6} = \frac{117649 - 7}{6} = \frac{117642}{6} = 19607.$$

Скористаємось цією ідеєю для доведення загальної формули суми n перших членів геометричної прогресії.

Нехай $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$, тобто:

$$S_n = b_1 + b_1q + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Якщо $q = 1$, то геометрична прогресія буде стаціонарною послідовністю і $S_n = nb_1$.

Якщо $q \neq 1$, тоді:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n,$$

$$qS_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n - b_1,$$

$$qS_n = S_n + b_1q^n - b_1,$$

$$qS_n - S_n = b_1q^n - b_1, S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1),$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ або } S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Існує легенда, згідно з якою винахідник шахів попросив у нагороду за свій винахід стільки пшеничних зерен, скільки їх буде, якщо на першу клітинку шахівниці покласти одну зернинку, на другу — дві, на третю — чотири і так далі до 64-ої клітинки. Скільки зерен запросив винахідник шахів?

Спробуйте розв'язати цю задачу за допомогою формули суми n перших членів геометричної прогресії та оцініть кількість зерна, яку хотів отримати у винагороду винахідник шахів.

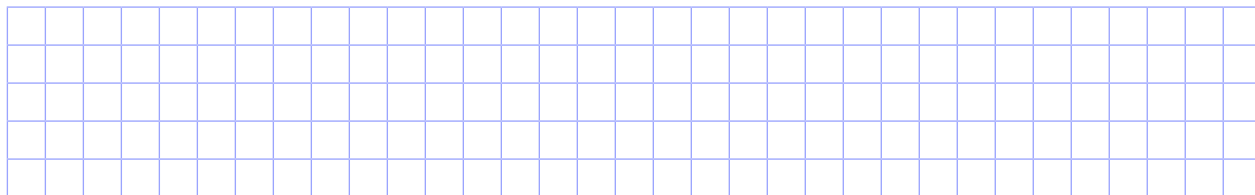
Якщо вас цікавлять шахи і ви хочете знати про них більше, то перегляньте наступне відео:



Зауваження. Запропонуйте учням/ученицям проект, у якому вони мають підрахувати кількість зерна в задачі про винайдення шахів та оцінити, скільки років потрібно вирощувати зерно, наприклад, в Україні чи у США, для того, щоб «розрахуватися» з винахідником.

Приклад 5. Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії (b_n) , якщо

$$b_1 = -12, q = -\frac{1}{2}.$$

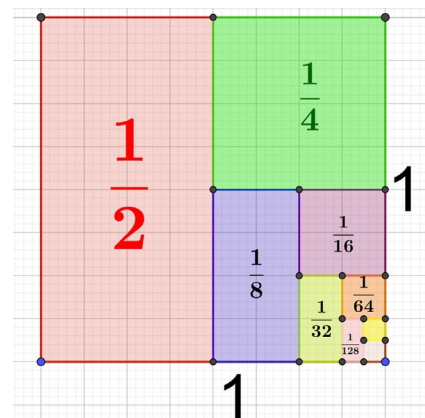


VI. Нескінченно спадна геометрична прогресія

Уявлення про суму нескінченно спадної геометричної прогресії можна отримати, якщо ділити квадрат зі стороною 1 на дві рівновеликі (рівні за площею) частини, одну із них зафарбовувати, а іншу знову ділити на дві рівновеликі частини і т. д. (див. рисунок).

Зрозуміло, що додана сума $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots$ ніколи не перевищить 1 і буде тим ближча до 1, чим більше доданків цієї суми ми візьмемо.

Для більшої наочності можна також скористатися Geogebra-аплетом:



<https://www.geogebra.org/m/za4yjhqv>

У загальному, із формули суми скінченної геометричної прогресії $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$,

у якій $|q| < 1$, то при $n \rightarrow \infty$, вираз $1 - q^n \rightarrow 1$. Тобто формула суми нескінченно спадної геометричної прогресії матиме вигляд $S = \frac{b_1}{1-q}$, де $|q| < 1$.

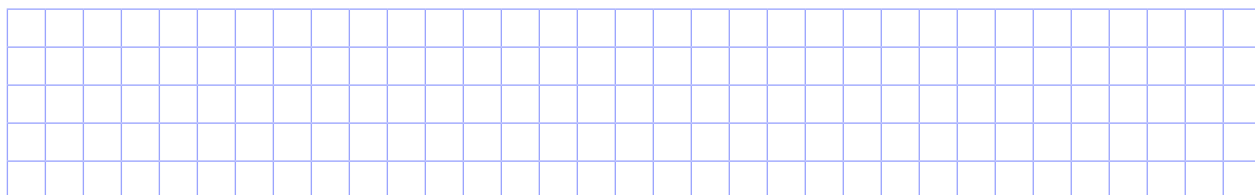
За допомогою формули суми нескінченно спадної геометричної прогресії можна перетворювати періодичні дробу у звичайні.

Наприклад, якщо $0,(21) = 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + \dots$, то маємо суму нескінченно спадної геометричної прогресії, в якій $b_1 = 0,21$, а $q = 0,01$.

Скориставшись формулою $S = \frac{b_1}{1-q}$, отримаємо: $0,21 = \frac{0,21}{1-0,01} = \frac{0,21}{0,99} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}$.

Приклад 6. Обчисліть суму нескінченно спадної геометричної прогресії

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$$



Приклад 7. Подайте періодичний дріб $1,2(3)$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. Запишемо: $1,2(3) = 1 + 0,2 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$

Послідовність $0,03; 0,003; 0,0003; \dots$ утворює нескінченно спадну геометричну прогресію, у якій $b_1 = 0,03$, $q = 0,1$.

Знайдемо її суму: $\frac{0,03}{1-0,1} = \frac{0,03}{0,9} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$.

Отже, $1,2(3) = 1 + 0,2 + \frac{1}{30} = 1 + \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = 1\frac{7}{30}$.

Відповідь. $1\frac{7}{30}$.

VII. Практичне застосування геометричної прогресії

- 1) Які природні явища описує геометрична прогресія?
- 2) Як розвиватиметься популяція тварин, якщо відсутні будь-які природні обмеження?
- 3) Що спільного між складними відсотками, які використовуються сучасними банками, та геометричною прогресією?
- 4) За яким законом зростала кількість хворих під час пандемії Covid-19?

Геометрична прогресія застосовується там, де відбувається періодичне збільшення (зменшення) певної величини в одну і ту саму кількість разів.

Наведемо декілька прикладів, де використовується геометрична прогресія.

Геометричну прогресію використовують у фізичних задачах.

Наприклад, затухання коливань маятника, ланцюгова ядерна реакція тощо, відбуваються за законами геометричної прогресії.

1. Застосування у фізичних задачах.

Маятник, розгойдуючись, проходить відстань, яка дорівнює 50 см, а потім за кожен наступний рух пройдена ним відстань становитиме 80% від попередньої. Назвіть перших шість членів послідовності відстаней, пройдених маятником при кожному коливанні.

У задачах біології мікроорганізми розмножуються поділом навпіл, тому за сприятливих умов їхня кількість збільшуватиметься за геометричною прогресією.

2. Застосування в біології.

Бактерія, потрапивши до організму, до кінця двадцятої хвилини ділиться на дві, кожна з яких до кінця двадцятої хвилини теж ділиться на дві і т.д. Скільки буде бактерій в організмі через добу, вважаючи, що імунна система організму людини знищує 40% бактерій?

Якщо розмістити грошовий вклад у банк, то щорічно прибуток нараховується за формулою складних відсотків $A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, що задає геометричну прогресію.

3. Застосування в банківських розрахунках.

За ставкою по депозиту банк виплачує 12% річних. Якою буде сума на рахунок вкладника через 10 років, якщо початковий його вклад становить 10 000 грн?

У деяких видах спорту змагання проводять за олімпійською системою («програв – вибув»), тобто після кожного ігрового кола змагань кількість учасників зменшується вдвічі.

4. Застосування у спорті.

Знайдіть початкову кількість учасників змагання з кульової стрільби, яке проводиться за олімпійською системою, якщо всього змагання складається із семи кіл і в сьомому, останньому, колі залишається один учасник.

Геометрична прогресія зустрічається і в геометричних задачах.

5. Застосування в геометричних задачах.

Дано рівнобедрений прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють по 1 см. Гіпотенуза цього трикутника є катетом іншого рівнобедреного прямокутного трикутника і т. д. Знайдіть довжину гіпотенузи десятого трикутника, побудованого таким чином.

VIII. Розв'язування практичних задач. Групова активність

Задача 1. В одному з епізодів фантастичного мультсеріалу головний герой мав на своєму рахунку 93 центи. Через 1000 років він прокинувся після криогенного сну і з'ясував, що за формулою складних відсотків, його кошти зросли до 4,3 мільярда доларів.

1. З'ясуйте, чи правдоподібний такий сценарій, якщо банківський відсоток становив 2,25% річних.
2. Яка сума була на його рахунок через 10 років; 100 років; 500 років?

Задача 2. Учня 10-го класу ліцею на уроці математики викликали до дошки. Учень почав рухатися від своєї парти до дошки по прямій. Перший крок він робить завдовжки 1 м, другий — $\frac{1}{2}$ м, третій — $\frac{1}{4}$ м тощо. Довжина кожного наступного кроку вдвічі менша від довжини попереднього (учень, здається, не виконав домашнього завдання). Чи дійде учень до дошки, якщо відстань від парти до дошки по прямій становить 2,5 м?

Задача 3. Олімпіадна задача. Знайдіть суму $S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots + n \cdot a^{n-1}$, де $a \neq 1$.

ІХ. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- 1.** Знайдіть знаменник геометричної прогресії:
1) $4^{15}; 4^{14}, 4^{13}, \dots$; 2) $2; \sqrt{2}; 1, \dots$.
- 2.** Запишіть формулу n -го члена геометричної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_1 = 4, q = 2$; 2) $b_1 = 3\sqrt{3}, q = \frac{1}{9}$.
- 3.** Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_1 = 7, b_4 = 448$; 2) $b_1 = 35, b_4 = \frac{5}{49}$.
- 4.** Задано нескінченно спадну геометричну прогресію (b_n). Знайдіть S , якщо $b_1 = \frac{1}{3}$,
 $q = \frac{1}{3}$.
- 5.** Знайдіть суму перших чотирьох членів геометричної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_1 = 1, q = 2$; 2) $b_1 = 1, q = \frac{1}{3}$;
- 6.** Обчисліть другий член b_2 геометричної прогресії, якщо $b_1 = -0,25, b_4 = 2$.
(Пробне ЗНО, 2017 р.).
- 7.** Задано геометричну прогресію (b_n), для якої другий член $b_2 = 12$ і знаменник
 $q = -2$. Знайдіть b_1 . (ЗНО, 2011 р.).
- 8.** Обчисліть другий член b_2 геометричної прогресії, якщо $b_1 = -0,25, b_4 = 2$. (Пробне ЗНО, 2017 р.).

Рівень В

- 1.** Укажіть найменший номер, починаючи з якого, всі члени геометричної прогресії $b_n = 3,5 \cdot (\sqrt{2})^{n-2}$ будуть більші за 14.
- 2.** У скінченній геометричній прогресії (b_n) : $b_1 = -1$, $q = \frac{1}{2}$, $S_n = -1\frac{63}{64}$. Знайдіть кількість членів цієї прогресії.
- 3.** Перший член зростаючої геометричної прогресії (b_n) дорівнює 4, а сума третього і п'ятого членів дорівнює 80. Знайдіть q та b_{10} .
- 4.** Знайдіть суму $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \dots + \frac{1}{2^{10}}$.
- 5.** Знайдіть значення x , при яких числа $x - 1$, $\sqrt{3x}$, $6x$ будуть послідовними членами геометричної прогресії.
- 6.** Знаменник геометричної прогресії дорівнює $\frac{2}{3}$, а сума чотирьох перших її членів дорівнює 65. Знайдіть перший член цієї прогресії. (ЗНО, 2018 р.).
- 7.** Знайдіть кількість членів та їхню суму для геометричної прогресії 1; 5; ...; 78 125.

8. Для геометричної прогресії (b_n) заповніть таблицю:

№	b_1	q	b_n	n	S_n
1.	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$			$4(3 + \sqrt{3})$
2.		$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{81}$	6	
3.	$2\sqrt{6}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{3}$		

9. Подайте періодичні дробу у вигляді звичайних дробів:

1) 0,(12); 2) 0,1(2); 3) 0,12(1); 4) 0,121(2).

10. Сума другого та четвертого членів зростаючої геометричної прогресії дорівнює 45, а їхній добуток становить 324. Визначте перший член цієї прогресії. (Пробне ЗНО, 2018 р.)
11. Восьмий член геометричної прогресії дорівнює 10. Знайдіть добуток усіх її членів від першого до п'ятнадцятого включно.
12. Три брати, роки яких утворюють геометричну прогресію, ділять між собою певну суму грошей пропорційно своєму віку. Якби вони робили це через три роки, коли наймолодший із них буде вдвічі молодшим від найстаршого, то молодший отримав би на 105 грн більше, а середній — на 15 грн більше, ніж на момент поділу грошей. Скільки років кожному з братів на момент поділу грошей?

Рівень С

1. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії, що складається з семи членів, якщо сума перших трьох її членів дорівнює 26, а трьох останніх — 2106.
2. Геометрична прогресія має парне число членів, сума яких у три рази більша за суму членів, що розташовані на парних місцях. Знайдіть знаменник цієї прогресії.
3. У геометричній прогресії сума першого та четвертого членів дорівнює 27, а різниця другого та третього та сума четвертого членів дорівнює 18. Знайдіть перший член та знаменник цієї прогресії.
4. Сума усіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 9, а сума квадратів її членів дорівнює 40,5. Знайдіть перший член цієї прогресії.
5. Знайдіть знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії, в якій кожний член у 4 рази більший за суму всіх наступних за ним членів цієї прогресії.
6. У результаті триразового підвищення ціни на деякий товар на одну й ту саму кількість відсотків, ціна товару стала більшою за початкову на 72,8%. На скільки відсотків підвищувалася ціна на товар кожного разу?
7. **Творче завдання.** Складіть програму, яка визначала би, чи є задана в масиві (або списку) послідовність геометричною прогресією.

Рефлексія

- | | | | |
|----|--|------------------------|----|
| 1. | Я розумію, що таке геометрична прогресія. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю формулу n -го члена геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію користуватися характеристичною властивістю геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю ознаки геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я умію використовувати формулу обчислення суми n перших членів геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю, як можна порахувати суму нескінченно спадної геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я умію перетворювати періодичні дроби у звичайні, за формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я знаю, де геометрична прогресія використовується в повсякденному житті. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 9. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Як геометрична прогресія описує ланцюгові реакції?
2. Роль геометричної прогресії у вивченні розповсюдження вірусної інформації.
3. Створення власних задач на практичне використання геометричної прогресії.
4. Історичні приклади неконтрольованого росту популяції тварин.
5. Парадокс з астрономічним зростанням банківського рахунку в романі Герберта Велса «Коли прокинеться той, хто спить».
6. Математичні софізми і парадокси, пов'язані з геометричною прогресією.
7. Середнє арифметичне та середнє геометричне у задачах геометрії.







