

10

Тема 10.

Числові послідовності. Арифметична прогресія. Геометрична прогресія

Урок 3. Геометрична прогресія, її властивості та практичне застосування

Тип уроку: урок узагальнення та систематизації знань.

План уроку

1. Геометрична прогресія.
2. Властивості геометричної прогресії. Характеристична властивість геометричної прогресії.
3. Сума n перших членів геометричної прогресії.
4. Нескінченно спадна геометрична прогресія.
5. Практичне використання геометричної прогресії.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

використовує математичні поняття, факти та процедури, пояснює їхнє застосування, наводить аргументи [12 МАО 4.3.1–1 П];

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Розв'яжіть кілька прикладів на повторення.
- 3) Сформулюйте практичні задачі (без розв'язання). Розв'язання задач (або задачі) пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

- 5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 6) Історичні відомості подавайте в межах часових можливостей.
- 7) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 8) Повертаємося до практичних задач, сформульованих на початку уроку. Об'єднуємо учнів/учениць у кілька груп. Формуємо комунікаційні навички, пропонуємо учням/ученицям знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачі.
- 9) Формуємо навички розв'язання прикладів та задач. Пропонуємо учням/ученицям розв'язувати тренувальні вправи за трьома рівнями складності.
- 10) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Якби вам запропонували подарунок в 1 мільйон гривень одразу чи 1 копійку, вартість якої кожного наступного дня впродовж місяця подвоюється в порівнянні з попереднім днем, що б ви обрали?
- 2) Якій закономірності підпорядковується розмноження бактерій і вірусів?
- 3) Що таке «вірусна інформація»? За яким законом вона поширюється?
- 4) Що спільного між олімпійською системою проведення спортивних турнірів і геометричною прогресією?
- 5) Уявіть, що ви поклали 1 грн у банк на депозит під 3% річних. Чи нарахував би банк вашим нащадкам 1 мільйон гривень за 100 років? А за 1000 років?
- 6) Що вам відомо про парадокс Зенона «Ахілес і черепаха»?
- 7) Який зв'язок між геометричною прогресією та фінансовими «пірамідами»?
- 8) Як пов'язані між собою історія винайдення шахів та геометрична прогресія?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Розв'яжіть нерівність $3x - 4 > 5x + 4$.
Відповідь. $(-\infty; -4)$.
2. Автосалон продав клієнтам m автомобілів по n грн кожний і отримав чистого прибутку p грн. По якій ціні автосалон купував один автомобіль у виробника?
Відповідь. $\frac{mn - p}{m}$.

- 3.** Знайдіть сьомий член арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 8, а різниця становить 0,5.
Відповідь. 11.
- 4.** Обчисліть значення виразу $\sqrt{(8-\sqrt{7})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$.
Відповідь. 6.
- 5.** При якому значенні a розклад квадратного тричлена $2x^2 + ax - 3$ на лінійні множники містить множник $2x - 3$?
Відповідь. -1 .

Як я вирішую певну проблему?

Задача 1. В одному з епізодів фантастичного мультсеріалу головний герой мав на своєму рахунку 93 центи. Через 1000 років він прокинувся після кріогенного сну і з'ясував, що за формулою складних відсотків його кошти зросли до 4,3 мільярда доларів.

1. З'ясуйте, чи правдоподібний такий сценарій, якщо банківський відсоток становив 2,25% річних.
2. Яка сума була на його рахунку через 10 років; 100 років; 500 років?

Задача 2. Учня 10-го класу ліцею на уроці математики викликали до дошки. Учень почав рухатися від своєї парти до дошки по прямій. Перший крок він робить завдовжки 1 м, другий — $\frac{1}{2}$ м, третій — $\frac{1}{4}$ м тощо. Довжина кожного наступного кроку вдвічі менша від довжини попереднього (учень, здається, не виконав домашнього завдання). Чи дійде учень до дошки, якщо відстань від парти до дошки по прямій становить 2,5 м?

Задача 3. Олімпіадна задача. Знайдіть суму $S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots + n \cdot a^{n-1}$, де $a \neq 1$.

III. Геометрична прогресія (5 хв)

Мотиваційна задача. Один із користувачів соціальної мережі дізнався важливу новину і поділився цією новиною з чотирма своїми друзями. Кожен із його друзів упродовж найближчої години поділився новиною із чотирма своїми друзями. І так кожен із отримувачів новини упродовж години ділився новиною із чотирма своїми друзями. Якій найбільшій кількості користувачів соціальної мережі повідомлено новину за 10 годин?

Така задача і подібні до неї, де використовуються послідовності, в яких кожен наступний член утворюється за допомогою множення попереднього на одне і те саме число, розв'язуються за допомогою геометричної прогресії.

Означення. Геометричною прогресією називають числову послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число.

Це число називається **знаменником** геометричної прогресії. Позначають його, як правило, латинською літерою q (походить від французького слова quotient, тобто частка).

Наприклад:

- для послідовності 3; 6; 12; 24; 48; 96; 192; 384; ... знаменник $q = 2$,
- для послідовності $-1; 0,5; -0,25; 0,125; -0,625; \dots$ знаменник $q = -0,5$.

Геометрична прогресія (b_n) може бути задана рекурентною формулою $b_{n+1} = b_n \cdot q$,

$b_n \neq 0, q \neq 0$, звідки $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тобто, щоб знайти знаменник геометричної прогресії,

потрібно деякий член цієї послідовності поділити на її попередній член.

Змоделюємо формулу n -го члена геометричної прогресії.

За означенням:

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3,$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = b_1 \cdot q^3 \cdot q = b_1 \cdot q^4 \text{ тощо.}$$

Тоді формула n -го члена геометричної прогресії: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Історична довідка

Слово «прогресія» латинського походження (лат. *progresio*), означає «рух уперед» (як і слово «прогрес») і зустрічається вперше у римського автора Боеція (V–VI ст.). Спочатку під терміном «прогресія» розуміли будь-яку числову послідовність, побудовану за правилом, яке дозволяло нескінченно продовжувати її в одному напрямку, наприклад, послідовність квадратів чи кубів натуральних чисел. У XVII ст. Дж. Грегорі почав уживати замість терміна «прогресія» термін «ряд». У наш час ми вживаємо термін «прогресія» лише для деяких послідовностей.

Ілюстративні приклади (7–10 хв)

- 6.** Знайдіть знаменник геометричної прогресії: $\frac{12\sqrt{5}}{7}; 6\sqrt{5}; 21\sqrt{5} \dots$.

Розв'язання. $q = \frac{b_2}{b_1} = 6\sqrt{5} : \frac{12\sqrt{5}}{7} = \frac{7}{2} = 3,5.$

Відповідь. 3,5.

- 7.** Запишіть формулу n -го члена геометричної прогресії (b_n) , яка задана декількома своїми першими членами: $4; 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \dots$.

Розв'язання. Знаменник прогресії: $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{4}.$

Формула n -го члена геометричної прогресії: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 4^{2-n}.$

Відповідь. $b_n = 4^{2-n}.$

8. Знайдіть знаменник та перший член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_2 = 9$, $b_6 = 729$.

Розв'язання. Оскільки: $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_6 = b_1 \cdot q^5$, то:

$$q^4 = \frac{b_6}{b_2} = 81, \text{ звідси: } q = 3 \text{ або } q = -3.$$

$$\text{Якщо } q = 3, \text{ то } b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$\text{Якщо } q = -3, \text{ то } b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{9}{-3} = -3.$$

Відповідь. $b_1 = 3$, $q = 3$ або $b_1 = -3$, $q = -3$.

IV. Властивості геометричної прогресії. Характеристична властивість геометричної прогресії (8–10 хв)

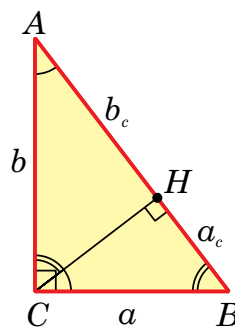
- 1) Чому прогресія називається «геометричною»?
- 2) Де поняття «середнього геометричного» використовується в геометрії?
- 3) Як можна встановити, чи задана послідовність є геометричною прогресією?
- 4) Чи достатньо двох членів геометричної прогресії, щоб знайти будь-який інший її член?

Означення. Число a називається **середнім геометричним** чисел b та c , якщо $a^2 = b \cdot c$.

Побудуємо прямокутний трикутник ABC та опустимо висоту CH на гіпотенузу AB (див. рисунок). Нехай $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $AH = b_c$, $BH = a_c$.

Оскільки трикутники ACB і AHC подібні, то $\frac{AC}{AH} = \frac{AB}{AC}$ або $\frac{b}{b_c} = \frac{c}{b}$,
звідси $b^2 = b_c \cdot c$.

Оскільки трикутники ACB і CHB подібні, то $\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{HB}$ або $\frac{c}{a} = \frac{a}{a_c}$,
звідси $a^2 = a_c \cdot c$.



У прямокутному трикутнику квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи на проекцію цього катета на гіпотенузу.

Властивості геометричної прогресії

1. Характеристична властивість геометричної прогресії.

Квадрат кожного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх із ним членів, тобто в геометричній прогресії (b_n):

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Оскільки $b_{n-1} = b_1 \cdot q^{n-2}$, а $b_{n+1} = b_1 \cdot q^n$, то:

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 \cdot q^{n-2} \cdot b_1 \cdot q^n,$$

$$(b_1 \cdot q^{n-1})^2 = b_n^2.$$

2. Узагальнена характеристична властивість геометричної прогресії.

Квадрат кожного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох рівновіддалених від нього членів, тобто в геометричній прогресії (b_n) : $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, де $n - k \geq 1$.

3. Добуток двох членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від її першого і останнього членів, є сталим і дорівнює добутку першого і останнього членів, тобто $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$.

Ознаки геометричної прогресії

- 1.** Якщо будь-який член числової послідовності, починаючи з другого, дорівнює середньому геометричному двох сусідніх його членів, то така числова послідовність є геометричною прогресією.
- 2.** Якщо добуток будь-яких двох членів скінченної числової послідовності, які рівновіддалені від її кінців, є сталим, то така послідовність є геометричною прогресією.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

- 9.** Чи є послідовність (b_n) геометричною прогресією, якщо $b_n = 4 \cdot 3^{n-2}$? У разі ствердної відповіді вкажіть перший член прогресії.

Розв'язання. 1) $b_{n-1} = 4 \cdot 3^{n-3}$,

$$b_{n+1} = 4 \cdot 3^{n-1},$$

$$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = 4 \cdot 3^{n-3} \cdot 4 \cdot 3^{n-1} = 16 \cdot 3^{2n-4} = (4 \cdot 3^{n-2})^2 = b_n^2.$$

Отже, за ознакою геометричної прогресії, послідовність (b_n) є геометричною прогресією.

$$\text{Тоді: } b_1 = 4 \cdot 3^{1-2} = 4 \cdot 3^{-1} = \frac{4}{3}.$$

Відповідь. Так; $\frac{4}{3}$.

- 10.** Знайдіть значення x , при яких числа -81 ; $3x$; -1 є послідовними членами геометричної прогресії.

Розв'язання. За характеристичною властивістю геометричної прогресії:

$$(3x)^2 = -81 \cdot (-1), \quad 9x^2 = 81, \quad x^2 = 9, \quad x = -3 \text{ або } x = 3.$$

Відповідь. -3 ; 3 .

- 11.** Між числами $\frac{15}{8}$ і 240 запишіть шість таких чисел, які разом з даними числами утворюють геометричну прогресію.

Розв'язання. Нехай (b_n) — дана геометрична прогресія, де $b_1 = \frac{15}{8}$ та $b_8 = 240$.

$$\text{Оскільки } b_8 = b_1 q^7, \text{ то } 240 = \frac{15}{8} \cdot q^7, \quad q^7 = \frac{240 \cdot 8}{15}, \quad q^7 = 128, \quad q = 2.$$

$$\text{Отже, } b_2 = \frac{15}{8} \cdot 2 = \frac{15}{4}, \quad b_3 = \frac{15}{4} \cdot 2 = \frac{15}{2}, \quad b_4 = \frac{15}{2} \cdot 2 = 15, \quad b_5 = 15 \cdot 2 = 30,$$

$$b_6 = 30 \cdot 2 = 60, \quad b_7 = 60 \cdot 2 = 120.$$

Відповідь. $\frac{15}{4}$; $\frac{15}{2}$; 15 ; 30 ; 60 ; 120 .

V. Сума n перших членів геометричної прогресії (5 хв)

Розглянемо задачу із уже відомого нам *напірису Рінда*.

Задача. Є 7 будинків, у кожному будинку по 7 котів, кожен кіт з'їдає 7 мишей, кожна миша з'їдає по 7 колосків ячменю, кожен колосок, якщо посіяти зерно, дає 7 мір ячменю. Знайдіть суму загальної кількості будинків, котів, мишей, колосків і мір ячменю.

У цій задачі потрібно знайти суму $S = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$, у якій доданками є послідовні члени геометричної прогресії з першим членом 7 та знаменником 7.

Для обчислення цієї суми помножимо обидві її частини на 7:

$$7S = 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6,$$

$$7S = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 + 7^6 - 7,$$

$$7S = S + 7^6 - 7,$$

$$6S = 7^6 - 7,$$

$$S = \frac{7^6 - 7}{6} = \frac{117649 - 7}{6} = \frac{117642}{6} = 19607.$$

Скористаємось цією ідеєю для доведення загальної формули суми n перших членів геометричної прогресії.

Нехай $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} + b_n$, тобто:

$$S_n = b_1 + b_1q + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Якщо $q = 1$, то геометрична прогресія буде стаціонарною послідовністю і $S_n = nb_1$.

Якщо $q \neq 1$, тоді:

$$qS_n = b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n,$$

$$qS_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n - b_1,$$

$$qS_n = S_n + b_1q^n - b_1,$$

$$qS_n - S_n = b_1q^n - b_1, S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1),$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ або } S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Існує легенда, згідно з якою винахідник шахів попросив у нагороду за свій винахід стільки пшеничних зерен, скільки їх буде, якщо на першу клітинку шахівниці покласти одну зернинку, на другу — дві, на третю — чотири і так далі до 64-ої клітинки. Скільки зерен запросив винахідник шахів?

Спробуйте розв'язати цю задачу за допомогою формули суми n перших членів геометричної прогресії та оцініть кількість зерна, яку хотів отримати у винагороду винахідник шахів.

Якщо вас цікавлять шахи і ви хочете знати про них більше, то перегляньте наступне відео:



Зауваження. Запропонуйте учням/ученицям проект, у якому вони мають підрахувати кількість зерна в задачі про винайдення шахів та оцінити, скільки років потрібно вирощувати зерно, наприклад, в Україні чи у США, для того, щоб «розрахуватися» з винахідником.

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 12.** Знайдіть суму перших шести членів геометричної прогресії (b_n) , якщо $b_1 = -12$, $q = -\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, то

$$S_6 = \frac{-12 \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^6 \right)}{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)} = \frac{-12 \left(1 - \frac{1}{64} \right)}{\frac{3}{2}} = \frac{-12 \cdot \frac{63}{64}}{\frac{3}{2}} = \frac{-12 \cdot 63 \cdot 2}{64 \cdot 3} = -\frac{63}{8}.$$

Відповідь. $-\frac{63}{8}$.

- 13.** Дано скінченну геометричну прогресію (b_n) . Знайдіть кількість членів цієї прогресії, якщо $b_1 = 5$, $q = 3$, $S_n = 200$.

Розв'язання. Із формули суми n перших членів $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$, маємо:

$$200 = \frac{5(3^n - 1)}{3 - 1}, \quad 3^n - 1 = 80, \quad 3^n = 81, \quad n = 4.$$

Відповідь. 4.

- 14.** Знайдіть суму $x^2 - x^4 + x^6 - \dots - x^{20}$.

Розв'язання. Числа $x^2, -x^4, x^6, \dots, -x^{20}$ утворюють 10 послідовних членів геометричної прогресії з першим членом x^2 та знаменником $(-x^2)$.

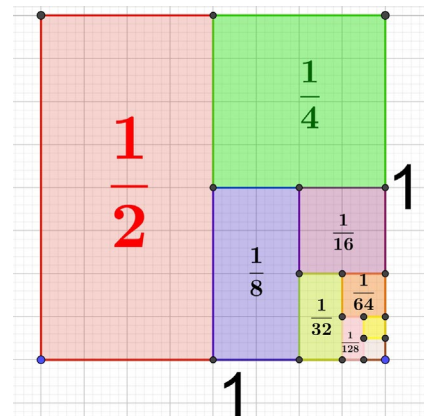
$$\text{Тоді: } S_{10} = \frac{x^2(1 - (-x^2)^{10})}{1 - (-x^2)} = \frac{x^2(1 - x^{20})}{1 + x^2}.$$

Відповідь. $\frac{x^2(1 - x^{20})}{1 + x^2}$.

VI. Нескінченно спадна геометрична прогресія

Уявлення про суму нескінченно спадної геометричної прогресії можна отримати, якщо ділити квадрат зі стороною 1 на дві рівновеликі (рівні за площею) частини, одну із них зафарбовувати, а іншу знову ділити на дві рівновеликі частини і т. д. (див. рисунок).

Зрозуміло, що тоді сума $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots$ ніколи не перевищить 1 і буде тим ближча до 1, чим більше доданків цієї суми ми візьмемо.



Для більшої наочності можна також скористатися Geogebra-аплетом:



<https://www.geogebra.org/m/za4yjhqv>

У загальному, із формули суми скінченної геометричної прогресії $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$,

у якої $|q| < 1$, то при $n \rightarrow \infty$, вираз $1-q^n \rightarrow 1$. Тобто формула суми нескінченно спадної геометричної прогресії матиме вигляд $S = \frac{b_1}{1-q}$, де $|q| < 1$.

За допомогою формули суми нескінченно спадної геометричної прогресії можна перетворювати періодичні дроби у звичайні.

Наприклад, якщо $0,(21) = 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + \dots$, то маємо суму нескінченно спадної геометричної прогресії, в якій $b_1 = 0,21$, а $q = 0,01$.

Скориставшись формулою $S = \frac{b_1}{1-q}$, отримаємо:

$$0,21 = \frac{0,21}{1-0,01} = \frac{0,21}{0,99} = \frac{21}{99} = \frac{7}{33}.$$

Ілюстративні приклади (3–4 хв)

- 15.** Обчисліть суму нескінченно спадної геометричної прогресії $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$.

Розв'язання. Для нескінченно спадної геометричної прогресії (b_n) , у якій $b_1 = \frac{1}{2}$,

$$q = -\frac{1}{2}, \text{ за формулою } S = \frac{b_1}{1-q}, \text{ отримаємо: } S = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь. $\frac{1}{3}$.

- 16.** Подайте періодичний дріб $1,2(3)$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. Запишемо: $1,2(3) = 1 + 0,2 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$

Послідовність $0,03; 0,003; 0,0003; \dots$ утворює нескінченно спадну геометричну прогресію, у якій $b_1 = 0,03$, $q = 0,1$.

$$\text{Знайдемо її суму: } \frac{0,03}{1-0,1} = \frac{0,03}{0,9} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}.$$

$$\text{Отже, } 1,2(3) = 1 + 0,2 + \frac{1}{30} = 1 + \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = 1\frac{7}{30}.$$

Відповідь. $1\frac{7}{30}$.

VII. Практичне застосування геометричної прогресії (6–7 хв)

- 1) Які природні явища описує геометрична прогресія?
- 2) Як розвиватиметься популяція тварин, якщо відсутні будь-які природні обмеження?

3) Що спільного між складними відсотками, які використовуються сучасними банками, та геометричною прогресією?

4) За яким законом зростала кількість хворих під час пандемії Covid-19?

Геометрична прогресія застосовується там, де відбувається періодичне збільшення (зменшення) певної величини в одну і ту саму кількість разів.

Наведемо декілька прикладів, де використовується геометрична прогресія.

Геометричну прогресію використовують у фізичних задачах.

Наприклад, затухання коливань маятника, ланцюгова ядерна реакція тощо, відбуваються за законами геометричної прогресії.

Приклад 1. Застосування у фізичних задачах.

Маятник, розгойдуючись, проходить відстань, яка дорівнює 50 см, а потім за кожен наступний рух пройдена ним відстань становитиме 80% від попередньої. Назвіть перших шість членів послідовності відстаней, пройдених маятником при кожному коливанні.

У задачах біології мікроорганізми розмножуються поділом навпіл, тому за сприятливих умов їхня кількість збільшуватиметься за геометричною прогресією.

Приклад 2. Застосування в біології.

Бактерія, потрапивши до організму, до кінця двадцятої хвилини ділиться на дві, кожна з яких до кінця двадцятої хвилини теж ділиться на дві і т.д. Скільки буде бактерій в організмі через добу, вважаючи, що імунна система організму людини знищує 40% бактерій?

Якщо розмістити грошовий вклад у банк, то щорічно прибуток нараховується за формулою складних відсотків $A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, що задає геометричну прогресію.

Приклад 3. Застосування в банківських розрахунках.

За ставкою по депозиту банк виплачує 12% річних. Якою буде сума на рахунок вкладника через 10 років, якщо початковий його вклад становить 10 000 грн?

У деяких видах спорту змагання проводять за олімпійською системою («програв – вибув»), тобто після кожного ігрового кола змагань кількість учасників зменшується вдвічі.

Приклад 4. Застосування у спорті.

Знайдіть початкову кількість учасників змагання з кульової стрільби, яке проводиться за олімпійською системою, якщо всього змагання складається із семи кіл і в сьомому, останньому, колі залишається один учасник.

Геометрична прогресія зустрічається і в геометричних задачах.

Приклад 5. Застосування в геометричних задачах.

Дано рівнобедрений прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють по 1 см. Гіпотенуза цього трикутника є катетом іншого рівнобедреного прямокутного трикутника і т. д. Знайдіть довжину гіпотенузи десятого трикутника, побудованого таким чином.

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 17.** У газеті, що була видана у 1914 р., описувалася подія, яка відбулася у місті Новочеркаську (в якому, на той час, проживало багато українців), про продаж отари із 20 овець, за такими умовами: за першу вівцю покупець заплатив 1 коп., за другу — 2 коп., за третю — 4 коп. і т. д. Скільки коштувала вся отара?

Розв'язання. Ціни на овець утворюють 20 членів геометричної прогресії (b_n) , де $b_1 = 1$, $q = 2$.

$$\text{Знайдемо суму } S_{20} = \frac{1 \cdot (2^{20} - 1)}{2 - 1} = 2^{20} - 1 = 1\,084\,575 \text{ (коп.)}$$

Таким чином, покупець за всю отару заплатив 10 845 крб. 75 коп.

Відповідь. 10 845 крб. 75 коп.

- 18.** Після кожного руху поршня розріджувального насоса, з ємності видаляється 20 % повітря, що міститься в ній, і як наслідок, тиск повітря в ємності також зменшується на 20%. Визначте тиск повітря всередині ємності після шести рухів поршня, якщо початковий тиск становив 750 мм рт. ст.

Розв'язання. Після кожного руху поршня з ємності видаляється 20% повітря а залишається 80%. Тому тиск повітря після кожного руху поршня становитиме 0,8 від попереднього.

Маємо геометричну прогресію з першим членом 750 та знаменником 0,8.

Число, що визначає тиск повітря після шостого руху поршня є сьомим членом цієї прогресії та дорівнює $750 \cdot 0,8^6 = 196,608$ (мм рт. ст.).

Відповідь. 196,608 мм рт. ст.

VIII. Розв'язування практичних задач. Групова активність (8–10 хв)

- Задача 1.** В одному з епізодів фантастичного мультсеріалу головний герой мав на своєму рахунку 93 центи. Через 1000 років він прокинувся після кріогенного сну і з'ясував, що за формулою складних відсотків, його кошти зросли до 4,3 мільярда доларів.

1. З'ясуйте, чи правдоподібний такий сценарій, якщо банківський відсоток становив 2,25% річних.

2. Яка сума була на його рахунку через 10 років; 100 років; 500 років?

Розв'язання. Кількість коштів, яка щороку була на рахунку у головного героя мультсеріалу, становить геометричну прогресію (b_n) з першим членом $b_1 = 0,93$, $q = 1,0225$.

Таким чином, через 10 років на його рахунку буде $0,93 \cdot 1,0225^{10} \approx 1,16\$$.

Через 100 років: $0,93 \cdot 1,0225^{100} \approx 8,61\$$.

Через 500 років: $0,93 \cdot 1,0225^{500} \approx 63116,26\$$.

Через 1000 років: $0,93 \cdot 1,0225^{1000} \approx 4\,283\,508\,449,71\$$.

Відповідь. 1. Так. 2. 1,16\$; 8,61\$; 63116,26\$.

Задача 2. Учня 10-го класу ліцею на уроці математики викликали до дошки. Учень почав рухатися від своєї парти до дошки по прямій. Перший крок він робить завдовжки 1 м, другий — $\frac{1}{2}$ м, третій — $\frac{1}{4}$ м тощо. Довжина кожного наступного кроку вдвічі менша від довжини попереднього (учень, здається, не виконав домашнього завдання). Чи дійде учень до дошки, якщо відстань від парти до дошки по прямій становить 2,5 м?

Розв'язання. Довжини кроків учня становлять нескінченно спадну геометричну прогресію (b_n) , у якої $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

За формулою $S = \frac{b_1}{1-q}$, отримаємо: $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

Таким чином, якщо учень крокуватиме навіть нескінченно, то він не пройде більше, ніж 2 метри.

Відповідь. Ні.

Задача 3. Олімпіадна задача. Знайдіть суму $S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots + n \cdot a^{n-1}$, де $a \neq 1$.

Розв'язання. Якщо $a = 0$, то $S_n = 1$.

Якщо $a \neq 0$, то $aS_n = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \dots + n \cdot a^n$

Звідки $S_n - aS_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} - n \cdot a^n$,

$$S_n(1-a) = \frac{1 \cdot (a^n - 1)}{a - 1} - n \cdot a^n,$$

$$S_n = \frac{n \cdot a^n}{a - 1} - \frac{a^n - 1}{(a - 1)^2}.$$

Відповідь. $S_n = \frac{n \cdot a^n}{a - 1} - \frac{a^n - 1}{(a - 1)^2}.$

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть знаменник геометричної прогресії:

1) $4^{15}; 4^{14}; 4^{13}; \dots$

2) $2; \sqrt{2}; 1; \dots$

2. Запишіть формулу n -го члена геометричної прогресії (b_n) , якщо:

1) $b_1 = 4, q = 2$;

2) $b_1 = 3\sqrt{3}, q = \frac{1}{9}$.

3. Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n) , якщо:

1) $b_1 = 7, b_4 = 448$;

2) $b_1 = 35, b_4 = \frac{5}{49}$.

4. Задано нескінченно спадну геометричну прогресію (b_n) . Знайдіть S , якщо $b_1 = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{3}$.

- 5.** Знайдіть суму перших чотирьох членів геометричної прогресії (b_n), якщо:
1) $b_1 = 1, q = 2$; 2) $b_1 = 1, q = \frac{1}{3}$;
- 6.** Обчисліть другий член b_2 геометричної прогресії, якщо $b_1 = -0,25, b_4 = 2$.
(Пробне ЗНО, 2017 р.).
- 7.** Задано геометричну прогресію (b_n), для якої другий член $b_2 = 12$ і знаменник $q = -2$. Знайдіть b_1 . **(ЗНО, 2011 р.).**
- 8.** Обчисліть другий член b_2 геометричної прогресії, якщо $b_1 = -0,25, b_4 = 2$. **(Пробне ЗНО, 2017 р.).**

Рівень В

1. Укажіть найменший номер, починаючи з якого, всі члени геометричної прогресії $b_n = 3,5 \cdot (\sqrt{2})^{n-2}$ будуть більші за 14.
2. У скінченній геометричній прогресії (b_n) : $b_1 = -1$, $q = \frac{1}{2}$, $S_n = -1\frac{63}{64}$. Знайдіть кількість членів цієї прогресії.
3. Перший член зростаючої геометричної прогресії (b_n) дорівнює 4, а сума третього і п'ятого членів дорівнює 80. Знайдіть q та b_{10} .
4. Знайдіть суму $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \dots + \frac{1}{2^{10}}$.
5. Знайдіть значення x , при яких числа $x - 1$, $\sqrt{3x}$, $6x$ будуть послідовними членами геометричної прогресії.
6. Знаменник геометричної прогресії дорівнює $\frac{2}{3}$, а сума чотирьох перших її членів дорівнює 65. Знайдіть перший член цієї прогресії. (ЗНО, 2018 р.).
7. Знайдіть кількість членів та їхню суму для геометричної прогресії 1; 5; ...; 78 125.
8. Для геометричної прогресії (b_n) заповніть таблицю:

N_0	b_1	q	b_n	n	S_n
1.	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$			$4(3 + \sqrt{3})$
2.		$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{81}$	6	
3.	$2\sqrt{6}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{3}$		

- 9.** Подайте періодичні дроби у вигляді звичайних дробів:
1) $0,(12)$; 2) $0,1(2)$; 3) $0,12(1)$; 4) $0,121(2)$.
- 10.** Сума другого та четвертого членів зростаючої геометричної прогресії дорівнює 45, а їхній добуток становить 324. Визначте перший член цієї прогресії. (Пробне ЗНО, 2018 р.)
- 11.** Восьмий член геометричної прогресії дорівнює 10. Знайдіть добуток усіх її членів від першого до п'ятнадцятого включно.

- 12.** Три брати, роки яких утворюють геометричну прогресію, ділять між собою певну суму грошей пропорційно своєму віку. Якби вони робили це через три роки, коли наймолодший із них буде вдвічі молодшим від найстаршого, то молодший отримав би на 105 грн більше, а середній — на 15 грн більше, ніж на момент поділу грошей. Скільки років кожному з братів на момент поділу грошей?

Рівень С

1. Знайдіть четвертий член геометричної прогресії, що складається з семи членів, якщо сума перших трьох її членів дорівнює 26, а трьох останніх — 2106.
2. Геометрична прогресія має парне число членів, сума яких у три рази більша за суму членів, що розташовані на парних місцях. Знайдіть знаменник цієї прогресії.
3. У геометричній прогресії сума першого та четвертого членів дорівнює 27, а різниця другого та третього та сума четвертого членів дорівнює 18. Знайдіть перший член та знаменник цієї прогресії.
4. Сума усіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії дорівнює 9, а сума квадратів її членів дорівнює 40,5. Знайдіть перший член цієї прогресії.
5. Знайдіть знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії, в якій кожний член у 4 рази більший за суму всіх наступних за ним членів цієї прогресії.
6. У результаті триразового підвищення ціни на деякий товар на одну й ту саму кількість відсотків, ціна товару стала більшою за початкову на 72,8%. На скільки відсотків підвищувалася ціна на товар кожного разу?
7. *Творче завдання.* Складіть програму, яка визначала би, чи є задана в масиві (або списку) послідовність геометричною прогресією.

Х. Рефлексія (2 хв)

- | | | | |
|----|--|------------------------|----|
| 1. | Я розумію, що таке геометрична прогресія. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю формулу n -го члена геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію користуватися характеристичною властивістю геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я знаю ознаки геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я умію використовувати формулу обчислення суми n перших членів геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю, як можна порахувати суму нескінченно спадної геометричної прогресії. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

- | | | | | |
|-----------|--|-----|------------------------|----|
| 7. | Я умію перетворювати періодичні дроби у звичайні, за формулою суми нескінченно спадної геометричної прогресії. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 8. | Я знаю, де геометрична прогресія використовується в повсякденному житті. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 9. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Як геометрична прогресія описує ланцюгові реакції?
- 2.** Роль геометричної прогресії у вивченні розповсюдження вірусної інформації.
- 3.** Створення власних задач на практичне використання геометричної прогресії.
- 4.** Історичні приклади неконтрольованого росту популяції тварин.
- 5.** Парадокс з астрономічним зростанням банківського рахунку в романі Герберта Велса «Коли прокинеться той, хто спить».
- 6.** Математичні софізми і парадокси, пов'язані з геометричною прогресією.
- 7.** Середнє арифметичне та середнє геометричне у задачах геометрії.