

Функції, графіки функцій. Застосування функцій на практиці. Графіки рівнянь

Урок 1. Функції та їхні властивості

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте поняття функції з однією змінною, область визначення функції та множину значень функції;
- 2) повторите різні способи задання функцій;
- 3) познайомитеся з ідеєю моделювання реальних процесів за допомогою функцій та їхніх графіків;
- 4) пригадаєте основні властивості функцій та схеми їхнього дослідження;
- 5) зможете використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач з алгебри, фізики, біології, програмування тощо.

II. Повторення

1. Число a у 6 разів менше від додатного числа b . Тоді $a = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$b - 6$	$6 : b$	$b + 6$	$6b$	$b : 6$

2. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $S(t) = 2t^2 + 5t$, де S — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть відстань у метрах від даної матеріальної точки до її початкового положення через 3 секунди після початку руху.

А	Б	В	Г	Д
51 м	33 м	3 м	18 м	15 м

3. Дівчина рухається по дорозі зі сталою швидкістю. Яка формула може відповідати залежності пройденого нею шляху та витраченого часу?

А	Б	В	Г	Д
$S = t^2$	$S = \frac{5}{t}$	$t = \frac{S}{2}$	$t = \sqrt{S}$	$S = -2,5t$

4. У двоцифровому натуральному числі цифра десятків дорівнює 5, а цифра одиниць дорівнює x . Оберіть правильну формулу для запису значення даного числа.

А	Б	В	Г	Д
$50 + x$	$5 + 10x$	$50x$	$5 + x$	$5x$

5. Відомо, що $y = \frac{4}{x}$, $x = \frac{2}{m}$. Виразіть y через m .

А	Б	В	Г	Д
m	$2m$	$m : 2$	$4m$	$m : 4$

III. Означення функції. Способи задання функції

При дослідженні багатьох реальних процесів варто створити їхню математичну модель. За допомогою такої моделі можна вивчити залежність однієї величини від іншої. Часто при цьому виникають ситуації, коли кожному вхідному параметру відповідає чітко визначений єдиний результат. Таку залежність називають функцією і для досліджень використовують її графічне відтворення у системі координат — графік функції.

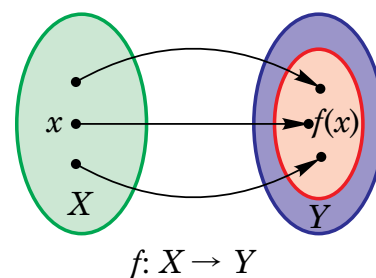
Означення. Функцією називають залежність, при якій кожному значенню елемента з однієї множини відповідає, і до того ж єдине, значення елемента другої множини.

Таку залежність можна уявляти як правило, що діє для кожного елемента даної множини, і використовувати при цьому позначення та терміни наведені нижче.

Функція $f(x)$ визначена на множині X (область визначення, або домен) та набуває значення з множини Y (кододомен): $f: X \rightarrow Y$.

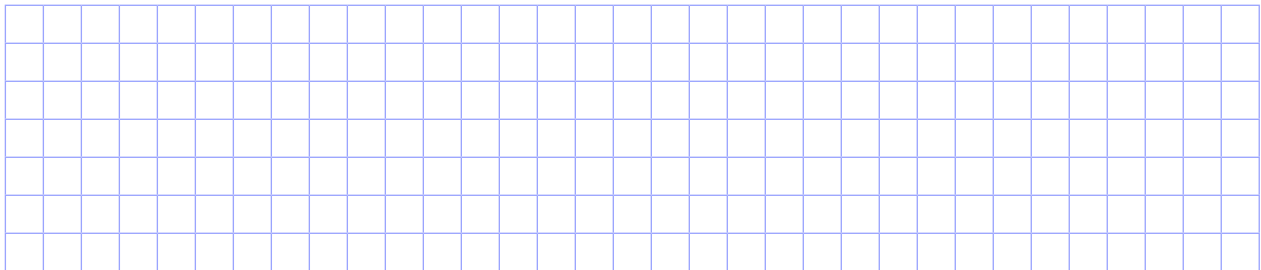
При цьому область визначення часто позначають як $D(f)$, а її елементи називають значеннями незалежної змінної, або *аргументами функції*.

Значення, які функція набуває хоча б при будь-якому аргументі, називають *значеннями функції* та об'єднують у *множину значень функції* $E(f)$. Інколи використовують терміни *область значень* або *образ функції*, або *діапазон функції*.



Так, на рисунку зелений овал відповідає області визначення функції — множині X , фіолетовий овал відповідає кодоману — множині Y , рожевий овал відповідає множині значень $E(f)$ для даної функції $f(x)$.

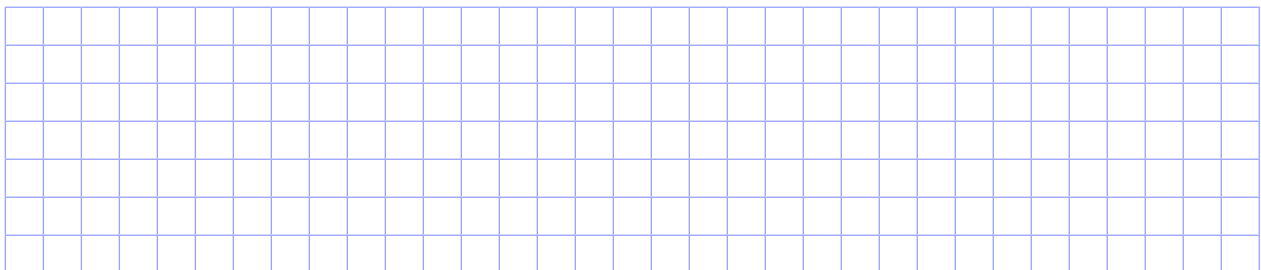
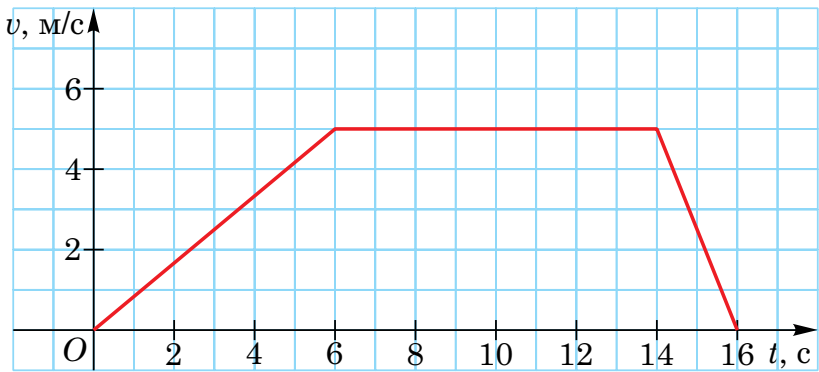
Приклад 1. Функція визначена для всіх дійсних чисел та задана формулою $f(x) = x^2 + 1$. Установіть область визначення та множину значень даної функції. Чому дорівнює $f(2)$? Яким аргументам відповідає значення функції 3?



Означення. Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсиси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Приклад 2. На рисунку зображено графік залежності швидкості велосипедиста від часу його руху. Користуючись ним, установіть:

- скільки часу рухався велосипедист;
- якого найбільшого значення досягала його швидкість;
- упродовж якого проміжку часу швидкість велосипедиста була сталою?



Способи задання функції

Функцію можна задати способами:

- описовим;
- табличним;
- графічним, а також формулою.

Розглянемо табличний спосіб задання функції (див. таблицю). Із таблиці можна безпосередньо знайти значення функції, але тільки для скінченного набору значень аргументу.

Час t , год	9	10	11	12	13	14	15
Атмосферний тиск p , мм. рт. ст.	754	755	757	755	754	753	754

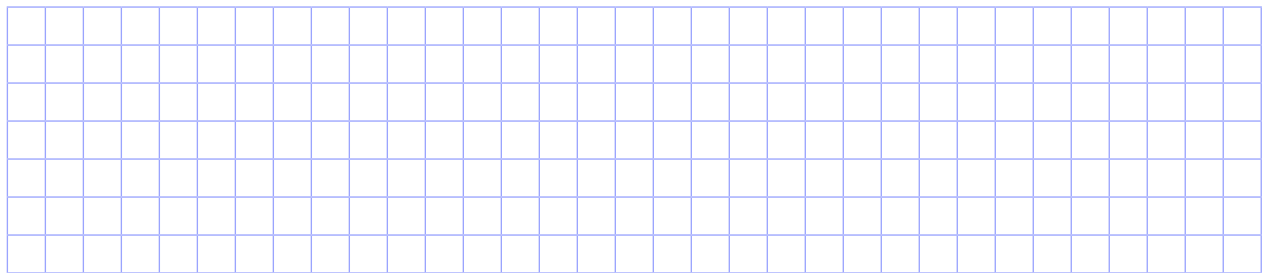
Область визначення функції утворюють числа 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, тобто числа першого рядка таблиці, а множину значень: 753, 754, 755, 757 — числа другого рядка таблиці.

Задання функції формулою є найважливішим, адже дає змогу для довільного значення аргументу з області визначення функції обчислити відповідне значення функції та в багатьох випадках виконати обернену задачу.

Наприклад: $y = x^2 - 2x + 3$, $y = \frac{x-2}{x+1}$, $y = 3 - \sqrt{x}$, $E_k = 25v^2$ — функції задано формулами.

При заданні функції аналітичним способом часто під областю визначення, якщо інше не сказано в умові, мають на увазі область допустимих значень відповідної формули (*природну область визначення*).

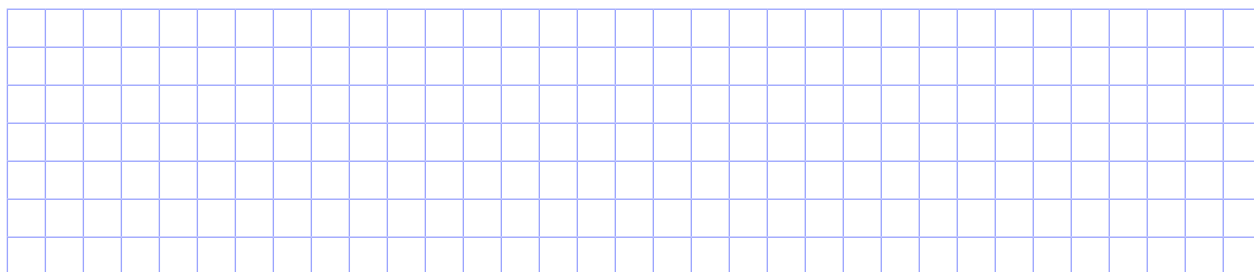
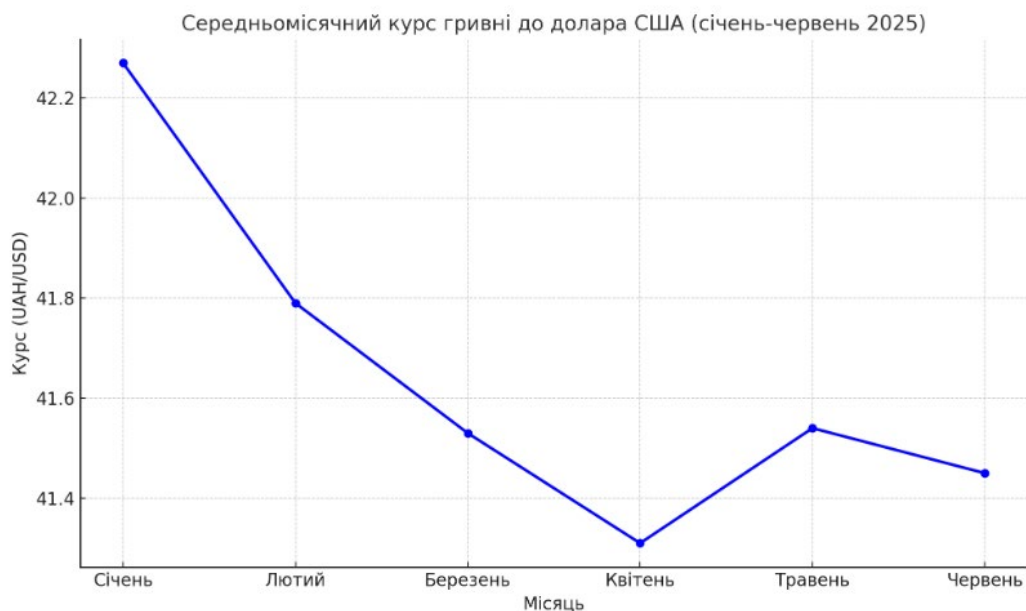
Приклад 3. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 2x - 1}$.



IV. Функція як модель реальних процесів

У реальному світі мають місце різноманітні процеси: зростання населення, рух об'єктів, зміна температури, витрати пального тощо. Але досліджувати їх достатньо складно. Набагато простіше розглядати функції, які наближено відповідають цим процесам. Таким чином, функції є потужним інструментом математичного моделювання. Вони допомагають описати стан систем та передбачити їхню подальшу поведінку, оптимізувати процеси та приймати обґрунтовані рішення.

Приклад 4. Проаналізуйте представлений графік середньомісячного курсу гривні до долара за перше півріччя 2025 року. Зробіть висновки й прогнози щодо подальшої зміни курсу.

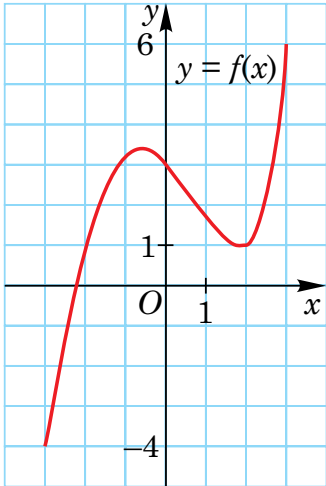


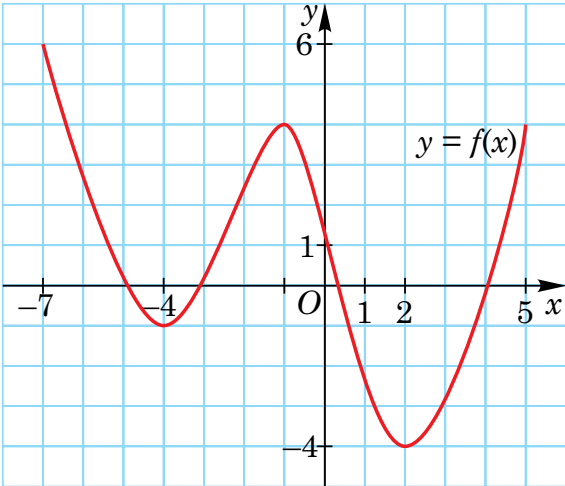
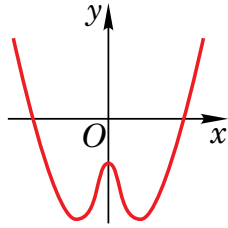
V. Властивості функцій

При дослідженні функцій потрібно звернути увагу на їхні властивості. Їх можна проаналізувати як аналітично (за допомогою формул), так і з використанням графіка.

Основні властивості функцій

	Як визначити?	Приклад або графічне представлення
Область визначення	Знайти, при яких значеннях аргументу визначена дана функція.	$y = \frac{5-x}{x-4},$ ОДЗ: $x - 4 \neq 0$, $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty).$

	Як визначити?	Приклад або графічне представлення
Множина значень	Знайти, яких значень може набувати функція (аналітично або за допомогою графіка).	 $E(y) = [-4; 6].$
Нулі	Треба розв'язати рівняння $f(x) = 0$ і знайти значення аргументу, за яких функція перетворюється на нуль.	$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{5 - x},$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{5 - x} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 5, \\ x \neq 5. \end{cases}$ Нулі функції: $x = -1$.
Знакосталість	Треба знайти проміжки, на яких функція зберігає знак (є додатною або від'ємною). Для цього можна скористатися графіком або розв'язати нерівності $f(x) > 0$ та $f(x) < 0$.	$y(x) = \frac{5}{4 - x},$ $y(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4 - x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 4).$ $y(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4 - x} < 0 \Leftrightarrow x \in (4; +\infty).$

	Як визначити?	Приклад або графічне представлення
Монотонність	Треба знайти проміжки, на яких функція зростає (більшому аргументу відповідає більше значення функції) або спадає (більшому аргументу відповідає менше значення функції).	 Функція $y = f(x)$ зростає на проміжках $[-4; -1]$ і $[2; 5]$. Функція $y = f(x)$ спадає на проміжках $[-7; -4]$ і $[-1; 2]$.
Найбільше та найменше значення	Треба знайти найбільше та найменше значення, яких набуває дана функція (аналітично або за допомогою графіка), або встановити, що таких немає.	$f(x) = x^2$. Оскільки $x^2 \geq 0$ за будь-яких значень аргументу, і при цьому $f(0) = 0$, то $\min_R f(x) = 0$. Функція $f(x) = x^2$ може набувати значень 4, 9, 16, ..., 1000000 ... Отже, вона не має найбільшого значення. Тому найбільшого значення функції не існує.
Парність та непарність	Треба встановити, чи для всіх аргументів x з області визначення $f(-x) = f(x)$ (функція парна, графік симетричний відносно осі Oy), або $f(-x) = -f(x)$ (функція непарна, графік симетричний відносно початку координат), або жодна з цих властивостей не має місця (функція загального виду).	 Графік симетричний відносно осі ординат, відповідна функція є парною.

Висновок. Функція є одним із найважливіших понять математики. Дослідження властивостей функції, вміння читати та будувати її графік є неодмінним елементом математичної культури. Багато математичних моделей реальних процесів пов'язано із функціями та їхніми графіками.

VI. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На уроці фізики учні й учениці досліджують, як змінюється тиск, з яким тисне людина з масою 60 кг на поверхню, якщо площа опори змінюється при незмінній силі (сила тиску орієнтовно дорівнює вазі тіла). Тиск визначається за формулою $P = \frac{F}{S}$, де P — тиск (у Па), F — сила (у Н), S — площа опори (у м²). На скільки зміниться тиск, з яким тисне людина на підлогу, коли вона змінює положення стоячи на положення лежачи? Зробіть висновок.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$;

б) $f(x) = 45 - \frac{1}{5x}$;

в) $g(x) = 3x^2 - 11x + 15$.

2. Знайдіть множину значень функції:

а) $y = -2x^4$;

б) $f(x) = \sqrt{x - 5}$;

в) $h(x) = \frac{2x - 10}{5 - x}$.

3. Визначте нулі функції:

а) $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{2x - 5}}$;

б) $f(x) = (2x^2 + x - 3)(3x^2 - x + 2)$;

в) $h(t) = t^4 - 2t^2 + 1$.

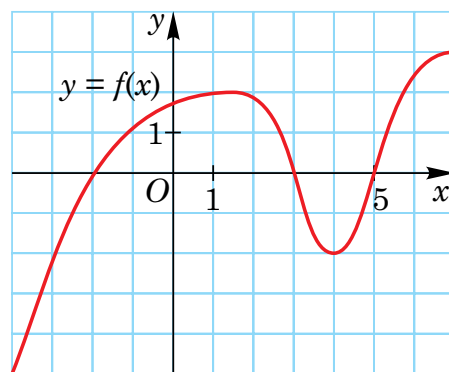
4. Дослідіть функцію на парність:

а) $y = 4x^4 - 2x^2$;

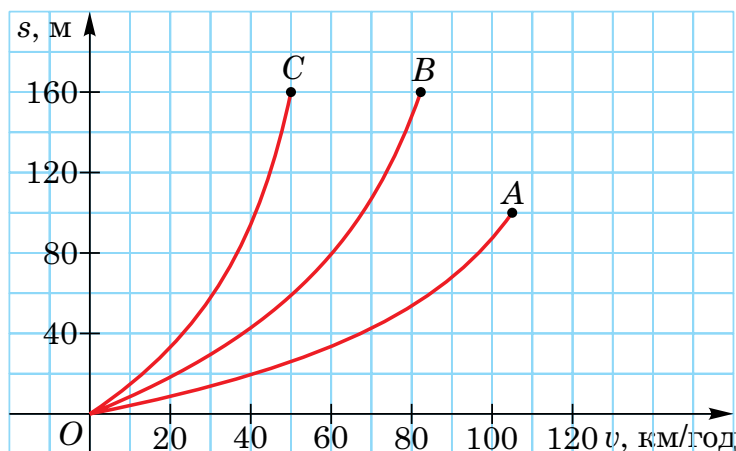
б) $y = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$;

в) $y = 3x^3 - 2x^2$.

5. Користуючись наведеним графіком функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $[-4; 7]$, визначте: а) проміжки знакосталості; б) проміжки монотонності; в) найбільше та найменше значення.



6. На рисунку зображено графіки залежності гальмівного шляху автомобіля від його швидкості під час руху на сухому асфальті (крива OA), на мокрому асфальті (крива OB), при ожеледиці (крива OC). Чому дорівнює гальмівний шлях автомобіля при швидкості 50 км/год у кожному випадку? Якою має бути швидкість автомобіля для кожної ситуації задля того, щоб гальмівний шлях не перевищував 60 м?



Рівень В

1. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

а) $y = \frac{3}{x - 2\sqrt{x}}$; б) $f(x) = \frac{|x - 5|}{|x - 3| - |x - 4|}$; в) $g(x) = \frac{1}{1 - \frac{2}{1 + \frac{1}{x}}}$.

2. Знайдіть множину значень функції:

а) $y = -2x^2 + 3x - 1$; б) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 4}$; в) $h(x) = \frac{10}{5 - x}$.

3. Дано рівнобедрений трикутник із кутом x° . Задайте формулами функції, що дозволяють знайти інші кути цього трикутника. Для кожної з них визначте область визначення та множину значень для випадків: а) даний кут є прилеглим до основи; б) даний кут є протилежним до основи трикутника.

4. Визначте нулі функції:

а) $y = \frac{x^3 - 6x^2 + 6x - 1}{1 - x}$; б) $f(x) = \begin{cases} 2, & x < -4, \\ |x^2 - 4|x| + 3|, & -4 \leq x \leq 4, \\ 3 - (x - 4)^2, & x > 4; \end{cases}$

в) $h(x) = ax^2 - 2x + a$.

5. Знайдіть проміжки знакосталості функції:

а) $y = \frac{1 - 2x}{x^2 + 4x + 4}$; б) $y = \frac{3x^3 - 81}{||x| - 1|}$; в) $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x}$.

6. Установіть, на яких проміжках функція зростає, а на яких — спадає:

а) $y = -\frac{3}{2x - 5}$; б) $y = \frac{21x - 9}{3x - 1}$; в) $y = \sqrt{x} - 2x^2$.

7. Знайдіть найбільше значення функції, та при якому значенні аргументу воно досягається:

а) $y = 6 - |x - 6|$; б) $y = 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; в) $y = -x^2 + 6x - 8 + \frac{x - 3}{|x - 3|}$.

8. Знайдіть найменше значення функції, та при якому значенні аргументу воно досягається:

а) $y = 6 + 2\sqrt{x - 1}$; б) $y = -\frac{5}{|x + 1| + 1}$; в) $y = x^2 + 6x + 11, x \in [-4; 2]$.

9. Дослідіть функцію на парність:

а) $y = (2 - 3x)^3 + (2 + 3x)^3$; б) $y = \frac{|x - 6|}{x + 1} + \frac{|x + 6|}{x - 1}$; в) $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

10. Використовуючи наведені означення, побудуйте графіки функцій:

а) цілої частини $y = [x]$ — найбільше ціле число, що не перевищує числа x ;

б) дробової частини $y = \{x\} = x - [x]$;

в) знака числа $y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

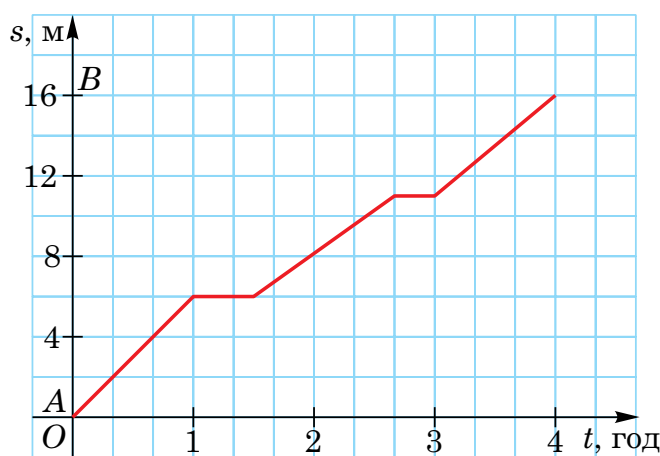
11. Використовуючи монотонність функції, розв'яжіть:

а) поліноміальне рівняння $x^5 + x^3 = 2$;

б) ірраціональне рівняння $2\sqrt{x} + \sqrt{x - 9} = 6$;

в) нерівність $x^3 + 3x \geq 7 - \sqrt{9x}$.

12. Турист вийшов із туристичної бази A у напрямку залізничної станції B . На рисунку дано графік функції, що відповідає пройденому ним шляху в залежності від часу руху. Зробіть висновок про характер руху туриста. Скільки хвилин він відпочивав упродовж своєї подорожі? Побудуйте графік залежності швидкості туриста від часу його руху вздовж маршруту від A до B .



Рівень С

1. Функція задана формулою $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}$. Знайдіть:

а) значення функції $f(\sqrt{2} + 1)$;

б) корені рівняння $f(x - 1) = 1$.

2. Розгляньте функцію Діріхле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

1) Наведіть приклади аргументів функції, для яких функція Діріхле дорівнює 0; 1.

2) Спробуйте побудувати графік функції у зошиті чи за допомогою будь-якої комп'ютерної програми.

3) Доведіть, що функція Діріхле не є монотонною на жодному проміжку.

4) Розгляньте функцію $y = (D(x) - 0,5)^2$ та побудуйте її графік.

3. Знайдіть усі значення параметра a , при яких дана функція є монотонною на всій області визначення:
а) $y = (x-1)(x+a)^2$; б) $y = -x \cdot |x-a|$;
в) $y = x^2 + ax + 11, x \in [-4; 2]$.
4. Знайдіть усі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняють рівняння $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$, для будь-яких дійсних x і y . Зверніть увагу, що відносно функції f дана рівність є *функційним рівнянням*, а відносно параметрів x і y — тотожністю, яка справджується для всіх їхніх значень.
5. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на множині дійсних чисел і є зростаючими. Доведіть, що:
а) рівняння $f(x) = -g(x)$ має не більше одного розв'язку;
б) функція $h(x) = f(g(x))$ є зростаючою;
в) функція $s(x) = f(x) \cdot g(x)$ може не бути монотонною.
6. Середня ціна преміального бензину в Україні змінилася з 50 грн/л до 60 грн/л за 12 місяців. Використайте дві моделі для прогнозування зростання ціни:
а) лінійна модель $y(x) = ax + b$; б) квадратична модель $y(x) = ax^2 + b$.
Побудуйте у будь-якому програмному середовищі (GeoGebra, WolframAlpha тощо) графіки залежності ціни бензину від зміни часу. Спрогнозуйте, через який час ціна преміального бензину досягне 65 грн/л. Порівняйте між собою прогнози, отримані в різних моделях. Зробіть висновки.

Рефлексія

- | | | | | |
|----|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я розумію поняття функції, аргументу функції, значення функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю схему знаходження області визначення та множини значень функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, як знаходити нулі функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію, як визначити проміжки монотонності та проміжки знакосталості функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, як досліджувати функцію на парність. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію, як використовувати вивчену тему при розв'язуванні задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Застосування функцій у природничих науках.
- 2.** Застосування функцій в економіці.
- 3.** Системи координат на площині та їхні застосування.
- 4.** Узагальніть задачу 12 рівня В.
- 5.** Узагальніть задачу 6 рівня С. Створіть комп'ютерну програму для візуалізації описаної ситуації та унаочнення відповіді.







