

10

Тема 6.

Функції, графіки функцій. Застосування функцій на практиці. Графіки рівнянь

Урок 1. Функції та їхні властивості

Тип уроку: урок повторення та систематизації знань.

План уроку

1. Означення функції. Способи задання функції.
2. Функція як модель реальних процесів.
3. Властивості функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

обирає математичну модель розв'язання специфічної проблемної ситуації з урахуванням різних умов [12 МАО 3.2.2–1 П];

використовує різні форми подання математичних об'єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П];

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово з поясненням матеріалу.
- 2) Розв'яжіть кілька прикладів на повторення.
- 3) Сформулюйте практичну задачу, розв'язати яку надайте можливість учням/ученицям наприкінці уроку.
- 4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

- 5) До кожного теоретичного твердження наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 7) Обов'язково сплануйте виконання останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичних задач та тренувальних вправ як важливі компоненти формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Що називають функцією, її аргументом та значенням?
- 2) За допомогою яких математичних об'єктів досліджують реальні процеси?
- 3) Як можна проілюструвати формульну залежність між двома величинами?
- 4) За яких умов на змінну має сенс формула, що містить цю змінну?
- 5) У декартовій системі координат провели пряму, що проходить через точки (0; 0) та (2; 5). Графіком якого реального процесу може бути дана пряма?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Число a у 6 разів менше від додатного числа b . Тоді $a = \dots$

А	Б	В	Г	Д
$b - 6$	$6 : b$	$b + 6$	$6b$	$b : 6$

2. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $S(t) = 2t^2 + 5t$, де S — відстань (у метрах), t — час (у секундах). Знайдіть відстань у метрах від даної матеріальної точки до її початкового положення через 3 секунди після початку руху.

А	Б	В	Г	Д
51 м	33 м	3 м	18 м	15 м

3. Дівчина рухається по дорозі зі сталою швидкістю. Яка формула може відповідати залежності пройденого нею шляху та витраченого часу?

А	Б	В	Г	Д
$S = t^2$	$S = \frac{5}{t}$	$t = \frac{S}{2}$	$t = \sqrt{S}$	$S = -2,5t$

4. У двоцифровому натуральному числі цифра десятків дорівнює 5, а цифра одиниць дорівнює x . Оберіть правильну формулу для запису значення даного числа.

А	Б	В	Г	Д
$50 + x$	$5 + 10x$	$50x$	$5 + x$	$5x$

5. Відомо, що $y = \frac{4}{x}$, $x = \frac{2}{m}$. Виразіть y через m .

А	Б	В	Г	Д
m	$2m$	$m : 2$	$4m$	$m : 4$

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** На уроці фізики учні й учениці досліджують, як змінюється тиск, з яким тисне людина з масою 60 кг на поверхню, якщо площа опори змінюється при незмінній силі (сила тиску орієнтовно дорівнює вазі тіла). Тиск визначається за формулою $P = \frac{F}{S}$, де P — тиск (у Па), F — сила (у Н), S — площа опори (у м²). На скільки зміниться тиск, з яким тисне людина на підлогу, коли вона змінює положення стоячи на положення лежачи? Зробіть висновок.

III. Означення функції. Способи задання функції

При дослідженні багатьох реальних процесів варто створити їхню математичну модель. За допомогою такої моделі можна вивчити залежність однієї величини від іншої. Часто при цьому виникають ситуації, коли кожному вхідному параметру відповідає чітко визначений єдиний результат. Таку залежність називають функцією і для досліджень використовують її графічне відтворення у системі координат — графік функції.

Означення. Функцією називають залежність, при якій кожному значенню елемента з однієї множини відповідає, і до того ж єдине, значення елемента другої множини.

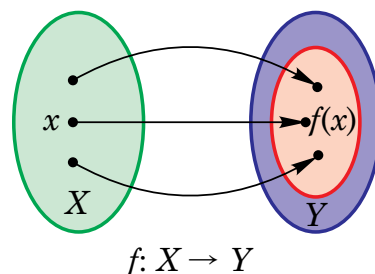
Таку залежність можна уявляти як правило, що діє для кожного елемента даної множини, і використовувати при цьому позначення та терміни наведені нижче.

Функція $f(x)$ визначена на множині X (область визначення, або домен) та набуває значення з множини Y (кодомен): $f: X \rightarrow Y$.

При цьому область визначення часто позначають як $D(f)$, а її елементи називають значеннями незалежної змінної, або *аргументами функції*.

Значення, які функція набуває хоча б при будь-якому аргументі, називають *значеннями функції* та об'єднують у *множину значень функції* $E(f)$. Інколи використовують терміни область значень або образ функції, або діапазон функції.

Так, на рисунку зелений овал відповідає області визначення функції — множині X , фіолетовий овал відповідає кодомону — множині Y , рожевий овал відповідає множині значень $E(f)$ для даної функції $f(x)$.



Ілюстративні приклади

- 6.** До Івана Петровича завітали гості: Семен Семенович із дружиною Клавдією Петрівною та Василь Васильович із дружиною Ольгою Олександрівною. Господар запропонував усім гостям капці зі спеціального набору, в якому є декілька пар кожного розміру з 38 до 45 включно. Кожний/кожна скористався/скористалася капцями відповідно до свого розміру (див. таблицю). Встановіть відповідну функцію, її область визначення, кодомен, множину значень. Які аргументи відповідають значенню функції, що дорівнює 39?

Гості	Семен Семенович	Клавдія Петрівна	Василь Васильович	Ольга Олександрівна
Розмір взуття	43	39	44	39

Розв'язання. Нехай функція $f(x)$ задає розмір капців, якими скористалися гості Івана Петровича.

Тоді її область визначення $D(f) = \{\text{Семен Семенович, Клавдія Петрівна, Василь Васильович, Ольга Олександрівна}\}$. Кодомен — це множина $\{38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45\}$, множина значень $E(f) = \{39, 43, 44\}$. Якщо $f(x) = 39$, то аргумент x набуває значень із множини $\{\text{Клавдія Петрівна, Ольга Олександрівна}\}$.

- 7.** Функція визначена для всіх дійсних чисел та задана формулою $f(x) = x^2 + 1$. Установіть область визначення та множину значень даної функції. Чому дорівнює $f(2)$? Яким аргументам відповідає значення функції 3?

Розв'язання. Оскільки функція визначена для всіх дійсних чисел, то область визначення функції: $D(f) = \mathbb{R}$.

Якщо змінна x набуває будь-яких дійсних значень, то її квадрат буде невід'ємним, а тому $f(x) = x^2 + 1 \geq 1$.

Навпаки, нехай існує число y , яке не менше від 1. Тоді рівняння $x^2 + 1 = y$ можна розв'язати відносно змінної x : $x = \pm\sqrt{y-1}$.

Отже, множина значень функції: $E(f) = [1; +\infty)$.

Обчислимо $f(2)$: $f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$.

Якщо $f(x) = 3$, то $x^2 + 1 = 3$, $x = \pm\sqrt{3-1}$, $x = \pm\sqrt{2}$.

Відповідь. 5; $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$.

Означення. Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

- 8.** На рисунку зображено графік залежності швидкості велосипедиста від часу його руху. Користуючись ним, установіть:
- скільки часу рухався велосипедист;
 - якого найбільшого значення досягала його швидкість;
 - упродовж якого проміжку часу швидкість велосипедиста була сталою?

Розв'язання. Швидкість на початку і наприкінці руху дорівнює 0, отже велосипедист рухався від моменту 0 с до моменту 16 с і витратив на весь шлях 16 с.

На проміжку часу від 6 с до 14 с швидкість була сталою і це значення швидкості (ордината точки на графіку) було найбільшим, а саме: 5 м/с.



Відповідь. 16 с; 5 м/с; від 6 с до 14 с.

Способи задання функції

Функцію можна задати способами:

- описовим;
- табличним;
- графічним, а також формулою.

Розглянемо табличний спосіб задання функції (див. таблицю). Із таблиці можна безпосередньо знайти значення функції, але тільки для скінченного набору значень аргументу.

Час t , год	9	10	11	12	13	14	15
Атмосферний тиск p , мм. рт. ст.	754	755	757	755	754	753	754

Область визначення функції утворюють числа 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, тобто числа першого рядка таблиці, а множину значень: 753, 754, 755, 757 — числа другого рядка таблиці.

Задання функції формулою є найважливішим, адже дає змогу для довільного значення аргументу з області визначення функції обчислити відповідне значення функції та в багатьох випадках виконати обернену задачу.

Наприклад: $y = x^2 - 2x + 3$, $y = \frac{x-2}{x+1}$, $y = 3 - \sqrt{x}$, $E_k = 25v^2$ — функції задано формулами.

При заданні функції аналітичним способом часто під областю визначення, якщо інше не сказано в умові, мають на увазі область допустимих значень відповідної формули (**природну область визначення**).

Ілюстративні приклади

9. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{x^2 + 1}{3x^2 - 2x - 1}$.

Розв'язання. Знайдемо (природну) область визначення даної функції. Для цього розглянемо множину чисел, що входять в ОДЗ формули $\frac{x^2 + 1}{3x^2 - 2x - 1}$.

Знаменник дробу має бути відмінним від нуля, тому $3x^2 - 2x - 1 \neq 0$.

Знайдемо корені рівняння $3x^2 - 2x - 1 = 0$: $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{3}$.

Таким чином, до ОДЗ входять усі дійсні числа, відмінні від 1 та $-\frac{1}{3}$.

Отже, область визначення $D(y) = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

Відповідь. $D(y) = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

IV. Функція як модель реальних процесів

У реальному світі мають місце різноманітні процеси: зростання населення, рух об'єктів, зміна температури, витрати пального тощо. Але досліджувати їх достатньо складно. Набагато простіше розглядати функції, які наближено відповідають цим процесам. Таким чином, функції є потужним інструментом математичного моделювання. Вони допомагають описати стан систем та передбачити їхню подальшу поведінку, оптимізувати процеси та приймати обґрунтовані рішення.

Ілюстративні приклади

- 10.** Під час досліду вивчали швидкість розкладу перекису водню (H_2O_2) за наявності каталізатора. Вимірювали об'єм кисню, який виділяється з часом. Дані дослідження наведено в таблиці.

№ досліду	Час (у хвилинали)	Об'єм кисню (у мілілітрах)
1	0	0
2	1	12
3	2	22
4	3	28
5	4	31
6	5	32
7	6	32

Побудуйте графік залежності об'єму кисню від часу. Знайдіть середню швидкість реакції за перші 3 хвилини дослідження та за останні три хвилини. Знайдіть момент часу, коли реакція практично припинилася. Зробіть висновки.

Розв'язання. Відмітимо на координатній площині точки, абсциси яких відповідають часу, а ординати — об'єму кисню. З'єднаємо їх плавною кривою — отримаємо наближено графік функції, що відповідає реакції розкладу перекису водню та виділенню кисню з нього.

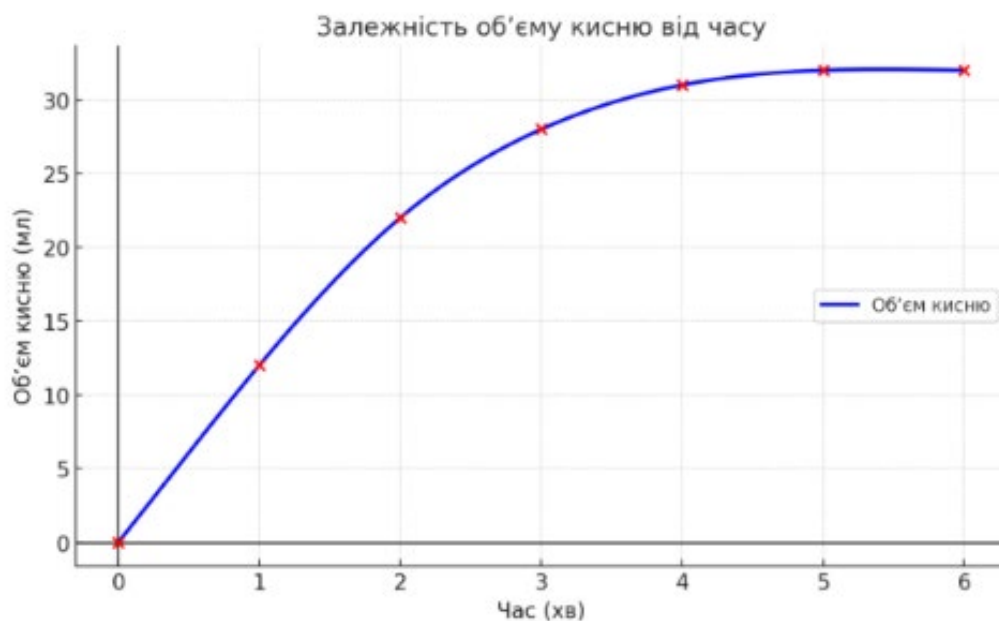
Знайдемо середню швидкість реакції за перші три хвилини як відношення приросту об'єму до витраченого часу:

$$v_1 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{28 - 0}{3 - 0} = 9 \frac{1}{3} \text{ (мл/хв)}.$$

Аналогічно, за останні три хвилини:

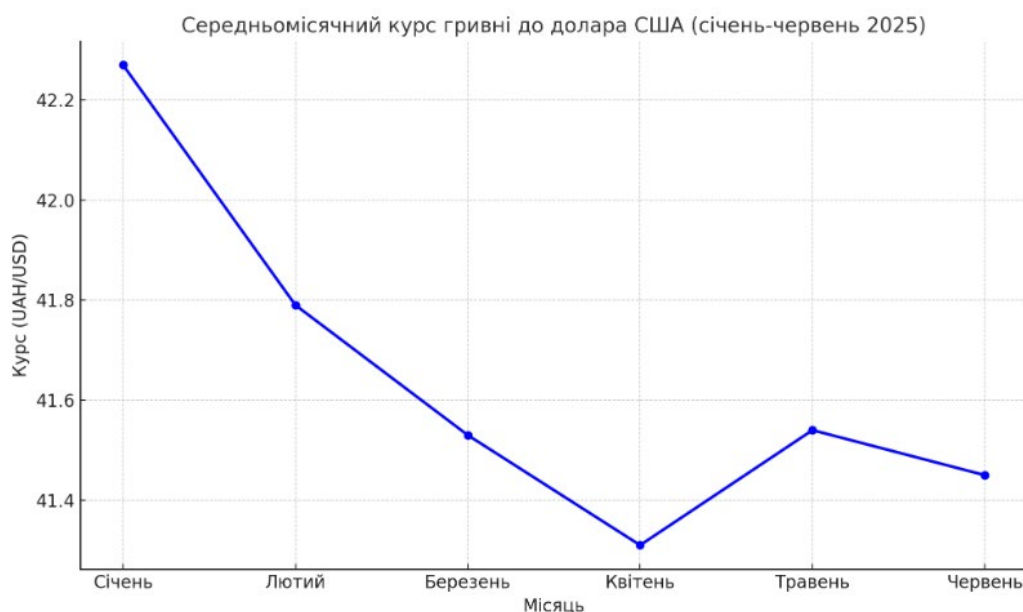
$$v_2 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{32 - 28}{6 - 3} = 1 \frac{1}{3} \text{ (мл/хв)}.$$

Висновок. Перші три хвилини вивільнення кисню відбувалося швидко, а після цього йшло дуже повільно, середня швидкість реакції зменшилася у 7 разів. Вимірювання були наближеними, але з них видно, що після 5 хвилин від початку реакції вона практично припинилася, і кількість вивільненого кисню дорівнює 32 мл.



Відповідь. $9\frac{1}{3}$ мл/хв; $1\frac{1}{3}$ мл/хв; через 5 хв.

- 11.** Проаналізуйте представлений графік середньомісячного курсу гривні до долара за перше півріччя 2025 року. Зробіть висновки й прогнози щодо подальшої зміни курсу.



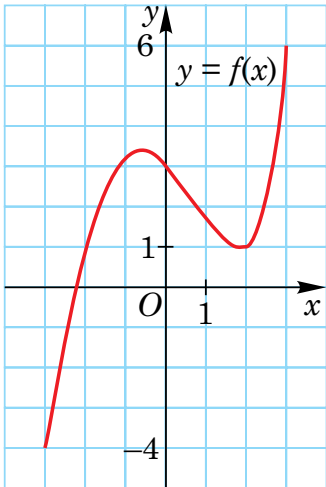
Розв'язання. З представленого графіка видно, що курс долара коливається приблизно від 41,3 грн/дол до 42,3 грн/дол. Видно тенденцію до поступового зміцнення гривні з невеликими коливаннями. Така тенденція може трохи сповільнити інфляційний тиск. З іншого боку, експортерам це може бути не вигідно — вони отримуватимуть менше гривень за свої товари, що продаються для закордонних покупців.

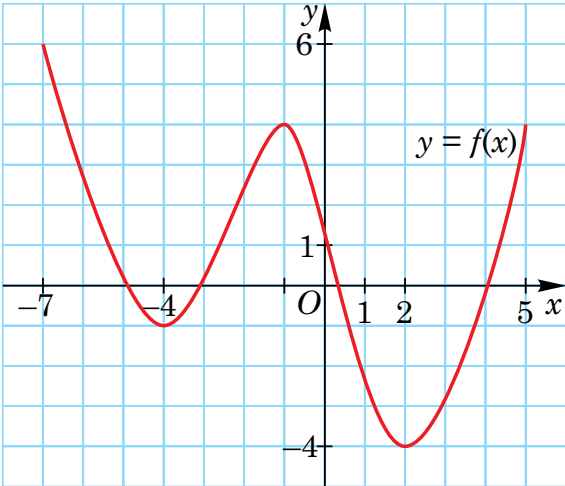
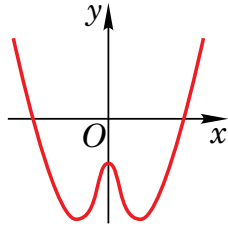
Відповідь. При збереженні тренду курс і надалі буде коливатися приблизно від 41 до 43 гривнів за 1 долар, стрімкої його зміни не передбачається.

V. Властивості функцій

При дослідженні функцій потрібно звернути увагу на їхні властивості. Їх можна проаналізувати як аналітично (за допомогою формул), так і з використанням графіка.

Основні властивості функцій

	Як визначити?	Приклад або графічне представлення
Область визначення	Знайти, при яких значеннях аргументу визначена дана функція.	$y = \frac{5-x}{x-4},$ ОДЗ: $x-4 \neq 0,$ $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty).$
Множина значень	Знайти, яких значень може набувати функція (аналітично або за допомогою графіка).	 $E(y) = [-4; 6].$
Нулі	Треба розв'язати рівняння $f(x) = 0$ і знайти значення аргументу, за яких функція перетворюється на нуль.	$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{5 - x},$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x - 5}{5 - x} = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 5, \\ x \neq 5. \end{cases}$ Нулі функції: $x = -1.$
Знакосталість	Треба знайти проміжки, на яких функція зберігає знак (є додатною або від'ємною). Для цього можна скористатися графіком або розв'язати нерівності $f(x) > 0$ та $f(x) < 0$.	$y(x) = \frac{5}{4-x},$ $y(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4-x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 4).$ $y(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4-x} < 0 \Leftrightarrow x \in (4; +\infty).$

	Як визначити?	Приклад або графічне представлення
Монотонність	Треба знайти проміжки, на яких функція зростає (більшому аргументу відповідає більше значення функції) або спадає (більшому аргументу відповідає менше значення функції).	 Функція $y = f(x)$ зростає на проміжках $[-4; -1]$ і $[2; 5]$. Функція $y = f(x)$ спадає на проміжках $[-7; -4]$ і $[-1; 2]$.
Найбільше та найменше значення	Треба знайти найбільше та найменше значення, яких набуває дана функція (аналітично або за допомогою графіка), або встановити, що таких немає.	$f(x) = x^2$. Оскільки $x^2 \geq 0$ за будь-яких значень аргументу, і при цьому $f(0) = 0$, то $\min_R f(x) = 0$. Функція $f(x) = x^2$ може набувати значень 4, 9, 16, ..., 1000000 ... Отже, вона не має найбільшого значення. Тому найбільшого значення функції не існує.
Парність та непарність	Треба встановити, чи для всіх аргументів x з області визначення $f(-x) = f(x)$ (функція парна, графік симетричний відносно осі Oy), або $f(-x) = -f(x)$ (функція непарна, графік симетричний відносно початку координат), або жодна з цих властивостей не має місця (функція загального виду).	 Графік симетричний відносно осі ординат, відповідна функція є парною.

Ілюстративні приклади

12. Дослідіть функцію $f(x) = |x - 5| - |x + 5|$ на парність.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина дійсних чисел, яка є симетричною відносно 0. Тож, кожному значенню аргументу x у ній відповідає значення $-x$, яке також належить до даної множини.

$$f(-x) = |-x - 5| - |-x + 5| = |-(x + 5)| - |-(x - 5)| = |x + 5| - |x - 5| = -(|x - 5| - |x + 5|) = -f(x).$$

Таким чином, дана функція є непарною, за означенням.

Відповідь. Функція є непарною.

13. Дослідіть функцію $f(x) = x^2 + 6x - 1$ на монотонність.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина дійсних чисел. Розглянемо два різних значення її аргументу $x_1 < x_2$ і порівняємо відповідні значення функції в них.

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= (x_1^2 + 6x_1 - 1) - (x_2^2 + 6x_2 - 1) = (x_1^2 - x_2^2) + 6(x_1 - x_2) = \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 6(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 6). \end{aligned}$$

Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_1 - x_2 < 0$.

Якщо $x_1 < x_2 \leq -3$, то $x_1 + x_2 + 6 < 0$, $f(x_1) - f(x_2) > 0$, $f(x_1) > f(x_2)$ — функція є спадною.

Якщо $-3 \leq x_1 < x_2$, то $x_1 + x_2 + 6 > 0$, $f(x_1) - f(x_2) < 0$, $f(x_1) < f(x_2)$ — функція є зростаючою.

Відповідь. Функція спадає на проміжку $(-\infty; -3]$ і зростає на проміжку $[-3; +\infty)$.

Висновок. Функція є одним із найважливіших понять математики. Дослідження властивостей функції, вміння читати та будувати її графік є неодмінним елементом математичної культури. Багато математичних моделей реальних процесів пов'язано із функціями та їхніми графіками.

VI. Розв'язання практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На уроці фізики учні й учениці досліджують, як змінюється тиск, з яким тисне людина з масою 60 кг на поверхню, якщо площа опори змінюється при незмінній силі (сила тиску орієнтовно дорівнює вазі тіла). Тиск визначається за формулою

$P = \frac{F}{S}$, де P — тиск (у Па), F — сила (у Н), S — площа опори (у м²). На скільки

зміниться тиск, з яким тисне людина на підлогу, коли вона змінює положення стоячи на положення лежачи? Зробіть висновок.

Розв'язання. Для розв'язання задачі потрібні дані, яких не вистачає в її умові. Площу ступні ноги не важко орієнтовно розрахувати, зробивши відповідні виміри.

Наприклад, ступня, довжиною 25 см і шириною приблизно 8 см, має площу

$S_{\text{ст.}} = 0,25 \cdot 0,08 = 0,02$ (м²), а площа двох ступень становить 0,04 м².

Площа тіла людини становить приблизно 1,8 м² (інформація з Вікіпедії).

Оскільки сила тиску орієнтовно дорівнює вазі тіла, то

$$F = mg, \quad F = 60 \cdot 10 = 600 \text{ (Н)}.$$

Обчислимо тиск на поверхню, який чинить людина стоячи:

$$P_1 = \frac{F}{S_1} = \frac{600}{0,04} = 15000 \text{ (Па)}.$$

Обчислимо тиск на поверхню, який чинить людина, якщо лежить:

$$P_2 = \frac{F}{S_2} = \frac{600}{1,8} \approx 333 \text{ (Па)}.$$

Зміна тиску становить $15000 - 333 = 14667$ (Па).

Отже, площа опори і тиск обернено пропорційні. Чим більша площа опори, тим менший тиск.

Відповідь. Зменшиться приблизно на 14667 Па.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$;

б) $f(x) = 45 - \frac{1}{5x}$;

в) $g(x) = 3x^2 - 11x + 15$.

2. Знайдіть множину значень функції:

а) $y = -2x^4$;

б) $f(x) = \sqrt{x - 5}$;

в) $h(x) = \frac{2x - 10}{5 - x}$.

3. Визначте нулі функції:

а) $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{2x - 5}}$;

б) $f(x) = (2x^2 + x - 3)(3x^2 - x + 2)$;

в) $h(t) = t^4 - 2t^2 + 1$.

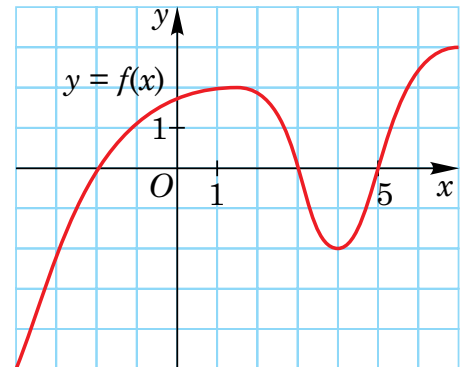
4. Дослідіть функцію на парність:

а) $y = 4x^4 - 2x^2$;

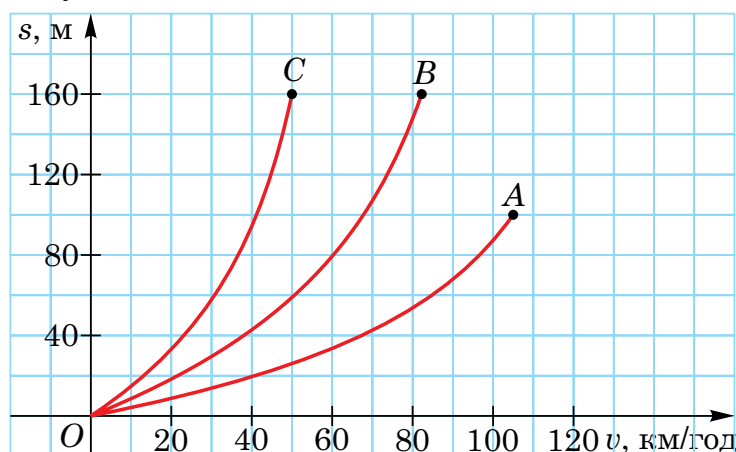
б) $y = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$;

в) $y = 3x^3 - 2x^2$.

5. Користуючись наведеним графіком функції $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $[-4; 7]$, визначте: а) проміжки знакосталості; б) проміжки монотонності; в) найбільше та найменше значення.



6. На рисунку зображено графіки залежності гальмівного шляху автомобіля від його швидкості під час руху на сухому асфальті (крива OA), на мокрому асфальті (крива OB), при ожеледиці (крива OC). Чому дорівнює гальмівний шлях автомобіля при швидкості 50 км/год у кожному випадку? Якою має бути швидкість автомобіля для кожної ситуації задля того, щоб гальмівний шлях не перевищував 60 м?



Рівень В

- 1.** Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

а) $y = \frac{3}{x - 2\sqrt{x}}$; б) $f(x) = \frac{|x - 5|}{|x - 3| - |x - 4|}$; в) $g(x) = \frac{1}{1 - \frac{2}{1 + \frac{1}{x}}}$.

- 2.** Знайдіть множину значень функції:

а) $y = -2x^2 + 3x - 1$; б) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 4}$; в) $h(x) = \frac{10}{5 - x}$.

- 3.** Дано рівнобедрений трикутник із кутом x° . Задайте формулами функції, що дозволяють знайти інші кути цього трикутника. Для кожної з них визначте область визначення та множину значень для випадків: а) даний кут є прилеглим до основи; б) даний кут є протилежним до основи трикутника.

- 4.** Визначте нулі функції:

а) $y = \frac{x^3 - 6x^2 + 6x - 1}{1 - x}$; б) $f(x) = \begin{cases} 2, & x < -4, \\ |x^2 - 4|x| + 3|, & -4 \leq x \leq 4, \\ 3 - (x - 4)^2, & x > 4; \end{cases}$

в) $h(x) = ax^2 - 2x + a$.

- 5.** Знайдіть проміжки знакосталості функції:

а) $y = \frac{1 - 2x}{x^2 + 4x + 4}$; б) $y = \frac{3x^3 - 81}{||x| - 1|}$; в) $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2x}$.

- 6.** Установіть, на яких проміжках функція зростає, а на яких — спадає:

а) $y = -\frac{3}{2x - 5}$; б) $y = \frac{21x - 9}{3x - 1}$; в) $y = \sqrt{x} - 2x^2$.

- 7.** Знайдіть найбільше значення функції, та при якому значенні аргументу воно досягається:

а) $y = 6 - |x - 6|$; б) $y = 2 - \sqrt{x^2 - 3x + 2}$; в) $y = -x^2 + 6x - 8 + \frac{x - 3}{|x - 3|}$.

- 8.** Знайдіть найменше значення функції, та при якому значенні аргументу воно досягається:

а) $y = 6 + 2\sqrt{x - 1}$; б) $y = -\frac{5}{|x + 1| + 1}$; в) $y = x^2 + 6x + 11, x \in [-4; 2]$.

- 9.** Дослідіть функцію на парність:

а) $y = (2 - 3x)^3 + (2 + 3x)^3$; б) $y = \frac{|x - 6|}{x + 1} + \frac{|x + 6|}{x - 1}$; в) $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$.

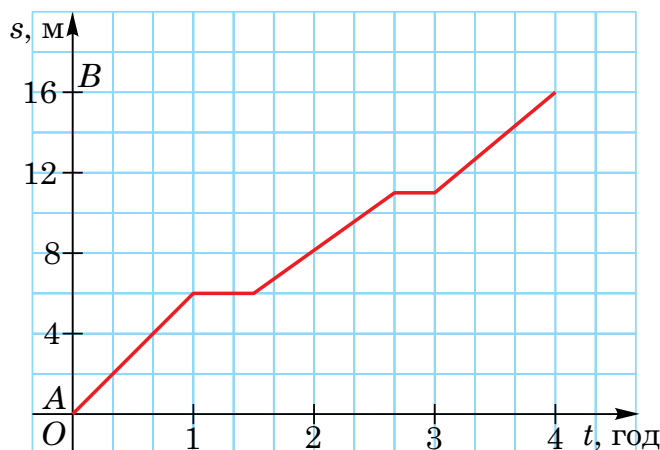
- 10.** Використовуючи наведені означення, побудуйте графіки функцій:

а) цілої частини $y = [x]$ — найбільше ціле число, що не перевищує числа x ;

б) дробової частини $y = \{x\} = x - [x]$;

в) знака числа $y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

- 11.** Використовуючи монотонність функції, розв'яжіть:
- а) поліноміальне рівняння $x^5 + x^3 = 2$;
 - б) ірраціональне рівняння $2\sqrt{x} + \sqrt{x-9} = 6$;
 - в) нерівність $x^3 + 3x \geq 7 - \sqrt{9x}$.
- 12.** Турист вийшов із туристичної бази A у напрямку залізничної станції B . На рисунку дано графік функції, що відповідає пройденому ним шляху в залежності від часу руху. Зробіть висновок про характер руху туриста. Скільки хвилин він відпочивав упродовж своєї подорожі? Побудуйте графік залежності швидкості туриста від часу його руху вздовж маршруту від A до B .



Рівень С

- 1.** Функція задана формулою $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 1}$. Знайдіть:
- а) значення функції $f(\sqrt{2} + 1)$;
 - б) корені рівняння $f(x - 1) = 1$.
- 2.** Розгляньте функцію Діріхле $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
- 1) Наведіть приклади аргументів функції, для яких функція Діріхле дорівнює 0; 1.
 - 2) Спробуйте побудувати графік функції у зошиті чи за допомогою будь-якої комп'ютерної програми.
 - 3) Доведіть, що функція Діріхле не є монотонною на жодному проміжку.
 - 4) Розгляньте функцію $y = (D(x) - 0,5)^2$ та побудуйте її графік.
- 3.** Знайдіть усі значення параметра a , при яких дана функція є монотонною на всій області визначення:
- а) $y = (x - 1)(x + a)^2$;
 - б) $y = -x \cdot |x - a|$;
 - в) $y = x^2 + ax + 11, x \in [-4; 2]$.
- 4.** Знайдіть усі функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняють рівняння $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$, для будь-яких дійсних x і y . Зверніть увагу, що відносно функції f дана рівність є *функційним рівнянням*, а відносно параметрів x і y — тотожністю, яка справджується для всіх їхніх значень.

- 5.** Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на множині дійсних чисел і є зростаючими. Доведіть, що:
- рівняння $f(x) = -g(x)$ має не більше одного розв'язку;
 - функція $h(x) = f(g(x))$ є зростаючою;
 - функція $s(x) = f(x) \cdot g(x)$ може не бути монотонною.
- 6.** Середня ціна преміального бензину в Україні змінилася з 50 грн/л до 60 грн/л за 12 місяців. Використайте дві моделі для прогнозування зростання ціни:
- лінійна модель $y(x) = ax + b$; б) квадратична модель $y(x) = ax^2 + b$.
- Побудуйте у будь-якому програмному середовищі (GeoGebra, WolframAlpha тощо) графіки залежності ціни бензину від зміни часу. Спрогнозуйте, через який час ціна преміального бензину досягне 65 грн/л. Порівняйте між собою прогнози, отримані в різних моделях. Зробіть висновки.

VIII. Рефлексія (2 хв)

- | | | | | |
|-----------|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я розумію поняття функції, аргументу функції, значення функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю схему знаходження області визначення та множини значень функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю, як знаходити нулі функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію, як визначити проміжки монотонності та проміжки знакосталості функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю, як досліджувати функцію на парність. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я розумію, як використовувати вивчену тему при розв'язуванні задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- Застосування функцій у природничих науках.
- Застосування функцій в економіці.
- Системи координат на площині та їхні застосування.
- Узагальніть задачу 12 рівня В.
- Узагальніть задачу 6 рівня С. Створіть комп'ютерну програму для візуалізації описаної ситуації та унаочнення відповіді.