10

Тема 6. Функції, графіки функцій. Застосування функцій на практиці. Графіки рівнянь

Урок 3. Елементарні функції та їхні графіки. Перетворення графіків

Тип уроку: урок повторення та систематизації знань.

План уроку

1. Обернена пропорційність.
2. Деякі випадки степеневої функції: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.
3. Перетворення графіків функцій. Побудова графіків функцій:
   1) $f(x) + a$; 2) $f(x + a)$; 3) $kf(x)$; 4) $f(kx)$; 5) $-f(x)$; 6) $f(-x)$; 7) $|f(x)|$; 8) $f|(x)|$.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

використовує різні форми подання математичних об’єктів відповідно до специфіки проблемної ситуації [12 МАО 4.2.2–2 П];

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

використовує математичні поняття, факти і процедури, пояснює їхнє застосування, наводить аргументи [12 МАО 4.3.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово з поясненням матеріалу.

2) Повторіть основні поняття попереднього уроку, розв’яжіть приклади на повторення.

3) Сформулюйте практичну задачу, розв’язати яку надайте можливість учням/ученицям наприкінці уроку.

4) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.

5) До кожної частини уроку наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.

6) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.

7) Обов'язково включаємо в урок задачі практичного змісту та тренувальні вправи, як важливий компонент формування практичних навичок і навчання учнів самостійної роботи над завданнями.

8) Історичний матеріал подавайте, за можливості, з урахуванням часу уроку.

9) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Яку функцію називають прямою пропорційністю; оберненою пропорційністю?

2) Як називають графік оберненої пропорційності?

3) Які ви знаєте приклади парних функцій; непарних функцій?

4) Назвіть декілька функцій, область визначення яких — множина невід'ємних чисел.

5) Які фізичні величини пов'язані степеневою залежністю?

II. Повторення (2–3 хв)

1. Відомо, що $y = \frac{5}{x}$. Виразіть аргумент даної функції.

А	Б	В	Г	Д
$x = 5y$	$x = \frac{y}{5}$	$x = \frac{5}{y}$	$x \neq 0$	неможливо виразити

2. Функція задана формулою $y = x^2$. Оберіть точку, яка належить графіку даної функції.

А	Б	В	Г	Д
(25; –5)	(–5; 25)	(25; 5)	(–25; 5)	(–25; –5)

3. Знайдіть значення виразу $100 \cdot \sqrt{0{,}16}$.

А	Б	В	Г	Д
400	40	0,04	16	±40

4. Знайдіть розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} y = x^3, \\ x + y = 10. \end{cases}$

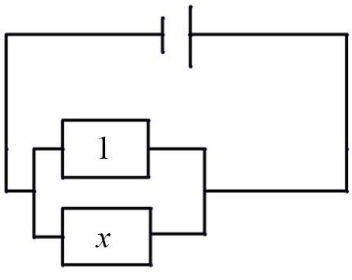
А	Б	В	Г	Д
(2; 8)	(8; 2)	(5; 5)	$(\sqrt{2}\,;\, 2\sqrt{2})$	система не має розв'язків

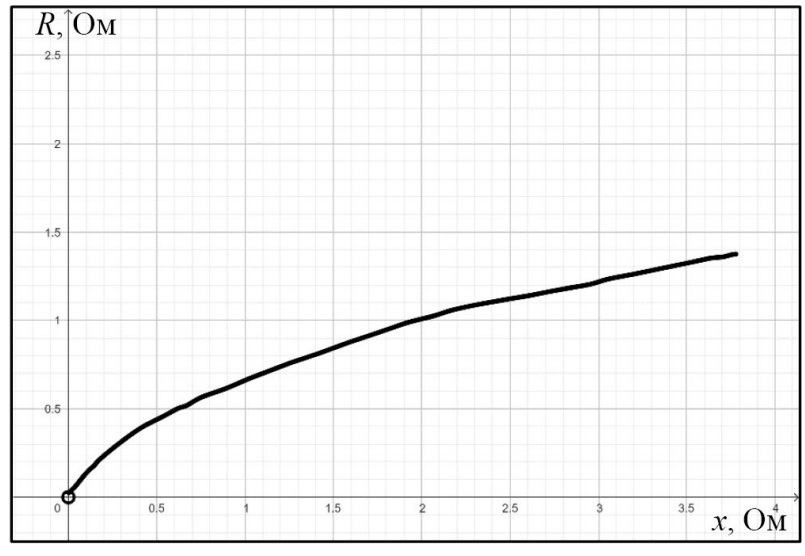
5. Пішохід іде рівномірно і пройшов шлях S км. Яка функція відповідає витраченому пішоходом часу в залежності від сталої швидкості v км/год?

А	Б	В	Г	Д
$t(v) = S \cdot v$	$t(v) = \dfrac{S}{v}$	$t(v) = S + v$	$t(v) = S - v$	неможливо визначити

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На олімпіаді з фізики учням та ученицям запропонували задачу. У ланцюгу постійного струму присутні два паралельно підключені резистори — з опором 1 Ом та з невідомим опором x Ом. Треба побудувати графік залежності загального опору в залежності від x. Іванка вирішила, що при x, близьких до 0, загальний опір буде мало відрізнятися від 0 Ом, а далі буде зростати при збільшенні x. Тож, вона намалювала рисунок. Але вчитель Петро Васильович, член журі, помітив суттєву помилку на цьому графіку. У чому вона полягає?



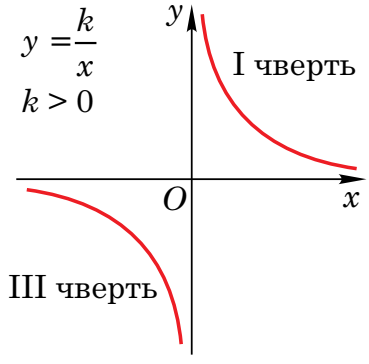
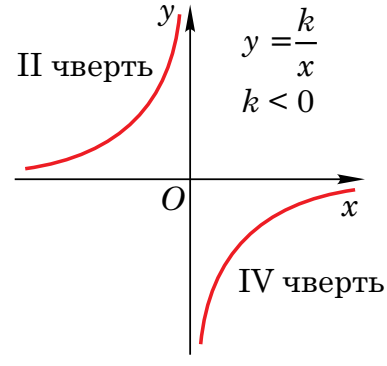


III. Обернена пропорційність

Нещодавно ви повторювали частковий випадок лінійної функції – пряму пропорційність $y = kx$, $k \neq 0$. Легко побачити, що, за умови $k > 0$, збільшенню додатного аргументу x у декілька разів відповідає збільшення відповідного значення функції y в таку ж саму кількість разів. Тобто за таких умов величини x та y будуть прямо пропорційними. Якщо ж збільшенню додатного x відповідає зменшення у таку саму кількість разів відповідного значення y, то величини x та y є обернено пропорційними, і даній ситуації відповідає функція $y = \frac{k}{x}$, за умови $k > 0$. Але таку функцію варто розглянути й за інших значень аргументу та параметра k.

Означення. Оберненою пропорційністю називають функцію, що може бути задана формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де x — незалежна змінна, $k \neq 0$ — деяке число.

Властивості оберненої пропорційності

Функція	Властивості	Графік
Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$	1. $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. 2. $E(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. 3. Нулі: немає нулів функції. 4. Найбільшого та найменшого значень функції не існує. 5. Функція є непарною.	Графік називають ***гіперболою***.
	$k > 0$ 6. Функція спадає на кожному з проміжків $(-\infty;0);(0;+\infty)$. 7. Проміжки знакосталості: $y > 0 \Leftrightarrow x > 0$; $y < 0 \Leftrightarrow x < 0$.	
	$k < 0$ 6. Функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty;0);(0;+\infty)$. 7. Проміжки знакосталості: $y > 0 \Leftrightarrow x < 0$; $y < 0 \Leftrightarrow x > 0$.	

Ілюстративні приклади

6. Знайдіть обернену пропорційність, графік якої проходить через точку $A(4;\ 3)$.

Розв'язання. Нехай шукана функція задається формулою $y = \frac{k}{x}$. Підставимо замість x та y відповідні координати точки A. Отримаємо рівняння: $3 = \frac{k}{4}$, звідки $k = 12$.

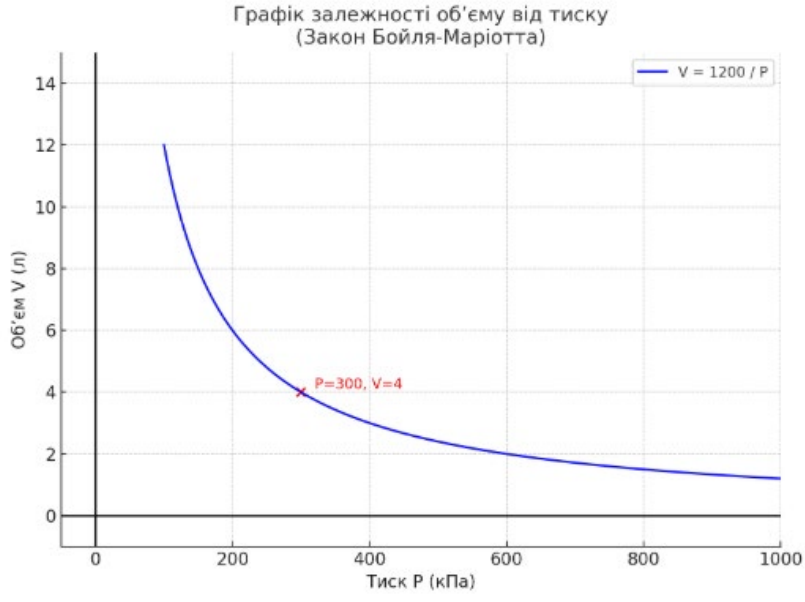
Отже, $y = \frac{12}{x}$.

Відповідь. $y = \frac{12}{x}$.

7. За законом Бойля-Маріотта при ізотермічному процесі в газах (температура не змінюється) тиск та об'єм є обернено пропорційними величинами (див. http://bit.ly/4jV7sIB) Побудуйте графік відповідної залежності, за умови, що газ займає об'єм 4 л при тиску 300 кПа.

Розв'язання. Нехай шукана залежність виражається функцією $V(P) = \frac{k}{P}$, де об'єм вимірюється в літрах, а тиск — в кілопаскалях. Оскільки $V(300) = \frac{k}{300} = 4$, то $k = 1200$. Побудуємо відповідний графік при $P > 0$. Маємо отримати одну вітку гіперболи. Для уточнення форми попередньо створимо таблицю значень функції у деяких точках.

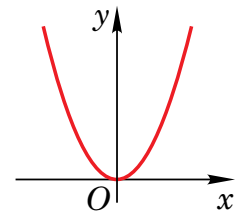
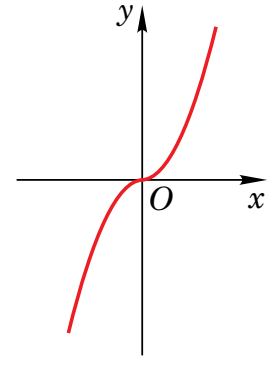
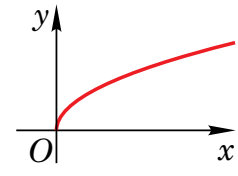
P	V
100	12
200	6
300	4
400	3
600	2
800	1,5



IV. Деякі випадки степеневої функції: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

В алгебричних завданнях та й у прикладних проблемах часто використовується степенева функція $y = x^{\alpha}$. Зокрема, при $\alpha = 2;\ 3;\ \frac{1}{2}$ отримуємо випадки найбільш уживаних функцій цього виду: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

Властивості степеневої функції у часткових випадках

Функція	Властивості	Графік
$y = x^2$	1. $D(y) = \mathbb{R}$. 2. $E(y) = [0; +\infty)$. 3. Нулі: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$. 4. Найбільшого значення функції не існує, найменше дорівнює 0. 5. Функція є парною. 6. Функція спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ та зростає на проміжку $[0; +\infty)$. 7.Проміжки знакосталості: $y > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.	Графік називають ***параболою***. 
$y = x^3$	1. $D(y) = \mathbb{R}$. 2. $E(y) = \mathbb{R}$. 3. Нулі: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$. 4. Найбільшого і найменшого значень функції не існує. 5. Функція є непарною. 6. Функція зростає. 7. Проміжки знакосталості: $y > 0 \Leftrightarrow x > 0$, $y < 0 \Leftrightarrow x < 0$.	Графік називають ***кубічною параболою***. 
$y = \sqrt{x}$	1. $D(y) = [0; +\infty)$. 2. $E(y) = [0; +\infty)$. 3. Нулі: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$. 4. Найбільшого значення функції не існує, найменше дорівнює 0. 5. Функція не є ані парною, ані непарною. 6. Функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. 7. Проміжки знакосталості: $y > 0 \Leftrightarrow x > 0$.	Графік представляє собою одну вітку параболи. 

Ілюстративні приклади

8. Сталевий кубик із ребром 1 см має масу 7,8 г. Запишіть формулу функції, яка описує залежність маси сталевого кубика від його ребра.

Розв'язання. Будемо вважати густину кубика незмінною. Тоді має місце формула: $m(V) = \rho \cdot V$, де V — об'єм, ρ — густина матеріалу.

Об'єм кубика з ребром 1 см дорівнює 1 см^3. Тоді $m(1) = 7{,}8 = \rho \cdot 1$, звідки густина сталі, з якої зроблено кубик, дорівнює 7,8 г/см^3.

З іншої сторони, об'єм кубика з ребром x см дорівнює x^3 см^3. Таким чином, отримуємо формулу для функції маси кубика: $m(x) = 7{,}8 \cdot x^3$, де маса m (у грамах), довжина ребра x (у сантиметрах).

Відповідь. $m(x) = 7{,}8 \cdot x^3$.

9. Нехай задано функції $f(x) = x^4$ та $g(x) = \sqrt{x}$. Побудуйте графік функції $h(x) = f\big(g(x)\big)$.

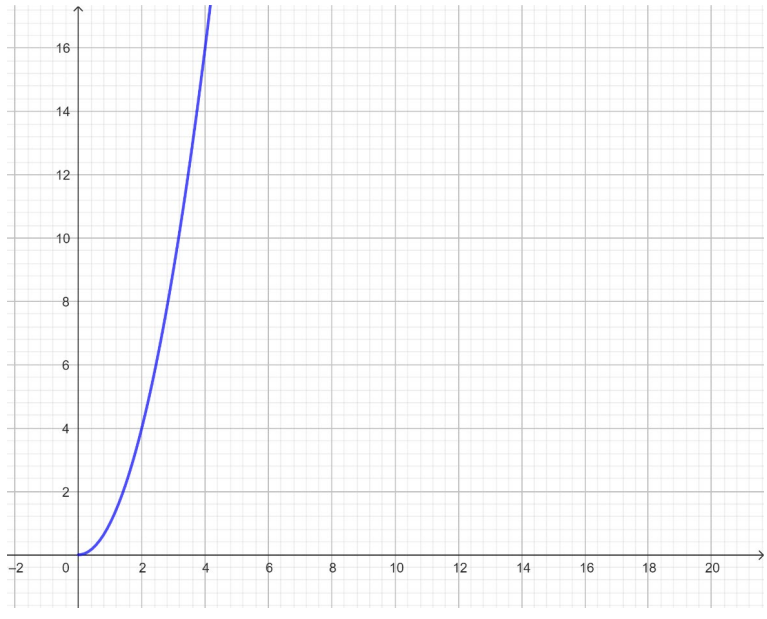
Розв'язання. Зробимо аналітичні перетворення.

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = \left(\sqrt{x}\right)^4 = \left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2 = x^2.$$

Ураховуючи природну область визначення функції $g(x) = \sqrt{x}$, маємо, що $D(h) = \big[0; +\infty\big)$.

Отже, графіком функції $y = h(x)$ буде одна вітка параболи. Для уточнення форми попередньо створимо таблицю значень функції у деяких точках.

x	y
0	0
0,5	0,25
1	1
2	4
3	9
4	16

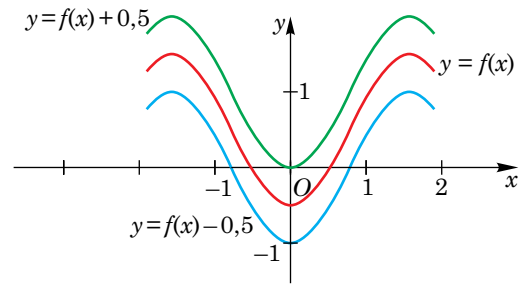
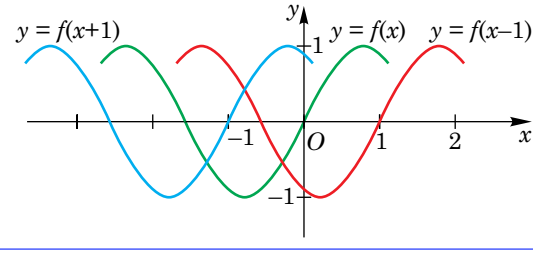
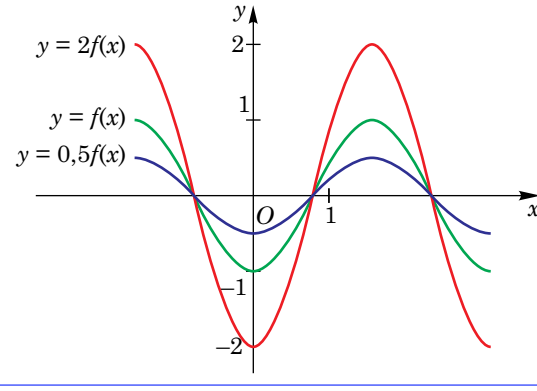
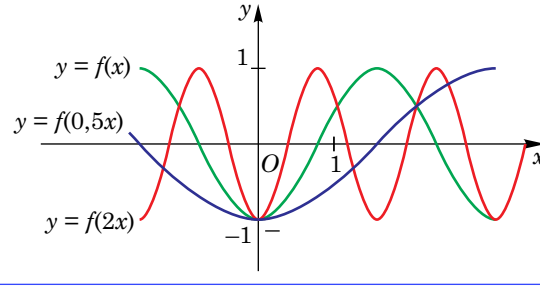
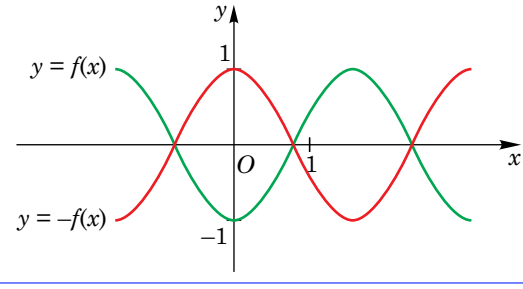


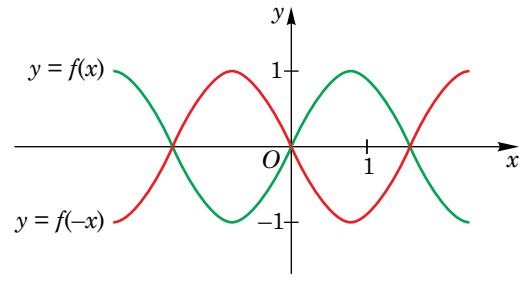
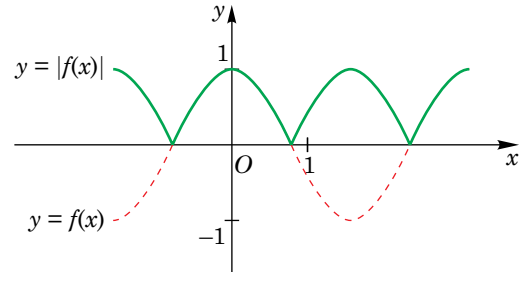
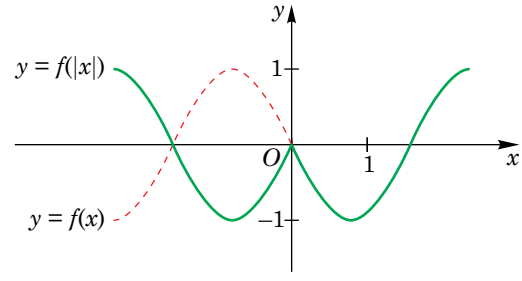
V. Перетворення графіків функцій. Побудова графіків функцій:

1) $f(x) + a$; 2) $f(x + a)$; 3) $kf(x)$; 4) $f(kx)$; 5) $-f(x)$; 6) $f(-x)$; 7) $|f(x)|$; 8) $f|(x)|$.

На основі відомих графіків елементарних функцій: лінійної, оберненої пропорційності, степеневої та інших можна встановити форму та розташування набагато складніших графіків. Для цього треба зрозуміти, які саме перетворення і в якому порядку треба зробити з базовими графіками.

Елементарні перетворення графіків функцій

Вид перетворення для формули, що задає функцію	Правило для перетворення графіка функції $y = f(x)$	Приклади побудови графіків
$y = f(x) + a$	Виконайте паралельне перенесення графіка на вектор $(\overrightarrow{0;\ a})$, тобто на a одиниць угору при $a > 0$ або на $\lvert a\rvert$ одиниць униз при $a < 0$.	
$y = f(x + a)$	Виконайте паралельне перенесення графіка на вектор $(\overrightarrow{-a;\ 0})$, тобто на a одиниць ліворуч при $a > 0$ або на $\lvert a\rvert$ одиниць праворуч при $a < 0$.	
$y = kf(x),\ k > 0$	1) При $k > 1$ розтягніть графік у k разів від осі Ox. 2) При $0 < k < 1$ стисніть графік у $\frac{1}{k}$ разів до осі Ox.	
$y = f(kx),\ k > 0$	1) При $k > 1$ стисніть графік у k разів до осі Oy. 2) При $0 < k < 1$ розтягніть графік у $\frac{1}{k}$ разів від осі Oy.	
$y = -f(x)$	Відобразіть графік симетрично відносно осі Ox.	

Вид перетворення для формули, що задає функцію	Правило для перетворення графіка функції $y = f(x)$	Приклади побудови графіків
$y = f(-x)$	Відобразіть графік симетрично відносно осі Oy.	
$y = \lvert f(x)\rvert$	1) Частину графіка, що лежить під віссю Ox, відобразіть симетрично відносно цієї осі. 2) Частину графіка, що лежить над віссю Ox та на ній, залиште без змін.	
$y = f\lvert(x)\rvert$	1) Видаліть частину графіка, що лежить ліворуч від осі Oy. 2) Частину графіка, що лежить праворуч від осі Oy та на ній, залиште без змін. 3) Додайте до залишеної частини графіка її симетричне відображення відносно осі Oy.	

Алгоритм побудови графіка функції із застосуванням базових перетворень

1. Установити елементарну функцію, графік якої буде перетворено.
2. За необхідності виконати аналітичні перетворення формули, що задає функцію.
3. Записати проміжні функції у тому порядку, в якому треба будувати їхні графіки.
4. Для кожних двох функцій на «сусідніх» кроках визначити, яке саме перетворення треба виконати.
5. Побудувати графік елементарної функції, всі проміжні графіки, остаточний шуканий графік.

Ілюстративні приклади

10. Побудуйте графік функції $y = -3\sqrt{2x-5}+1$, використовуючи базові перетворення.

Розв'язання. Будемо будувати шуканий графік на основі відомого графіка функції $y = \sqrt{x}$.

Виконаємо попередньо необхідні перетворення: $y = -3\sqrt{2x-5}+1 = -3\sqrt{2(x-2{,}5)}+1$.

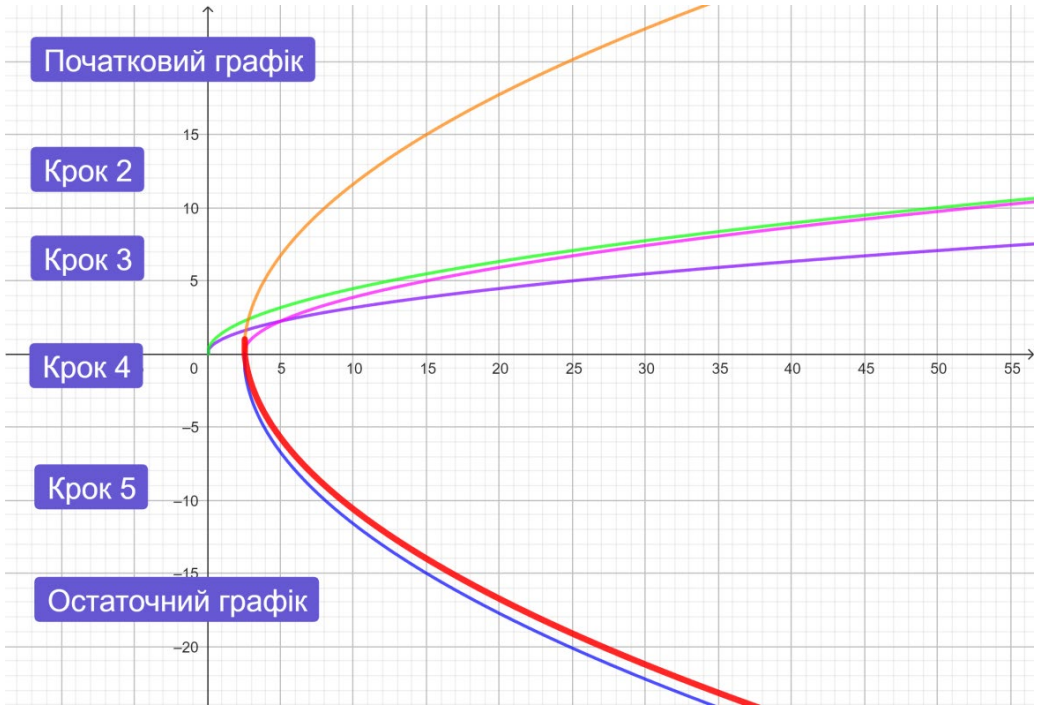
Будемо дотримуватися наступного плану побудови та відповідних перетворень:

$1) y=\sqrt{x} \to 2) y=\sqrt{2x} \to 3) y=\sqrt{2(x-2,5)} \to 4) y=3\sqrt{2(x-2,5)} \to 5) y=-3\sqrt{2(x-2,5)} \to$
$\to 6) y=-3\sqrt{2(x-2,5)}+1$

Зауважимо, що при виконанні даних кроків маємо виконати елементарні перетворення:

- стискання графіка у 2 рази до осі Oy;
- паралельне перенесення графіка праворуч на 2,5;
- розтягнення графіка в 3 рази від осі Ox;
- симетрія графіка відносно осі Ox;
- паралельне перенесення графіка вгору на 1.

Докладне виконання всіх кроків представлено на рисунку.



1) Рекомендуємо для кращої наочності використовувати GeoGebra-аплет, посилання на який наведено нижче.

2) Учні/учениці можуть відкрити цей додаток на мобільних пристроях за допомогою QR-коду.

https://www.geogebra.org/m/xtpwegst

11. Установіть графічним методом кількість розв'язків рівняння $\left|\left||x|-1\right|^3-2\right|=a$ в залежності від значень параметра a.

Розв'язання. Побудуємо спочатку графік функції $y=\left|\left||x|-1\right|^3-2\right|$, а потім установимо кількість точок перетину цього графіка з прямою, що задана рівнянням $y=a$.

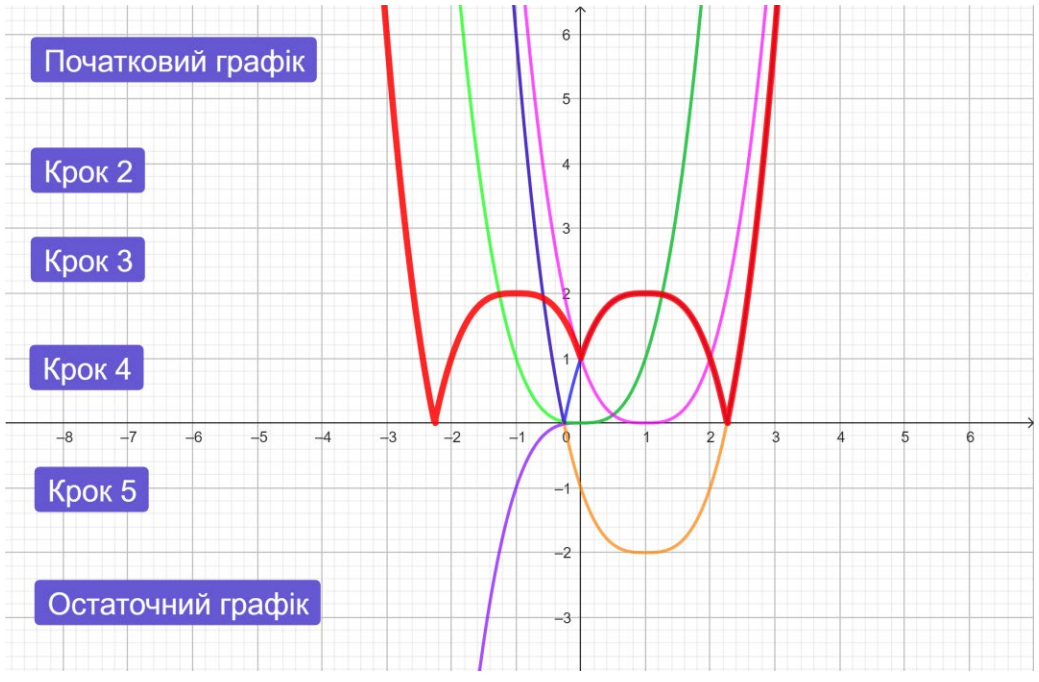
Будемо будувати відповідний графік на основі відомого графіка функції $y=x^3$, дотримуючись наступного плану побудови та відповідних перетворень:

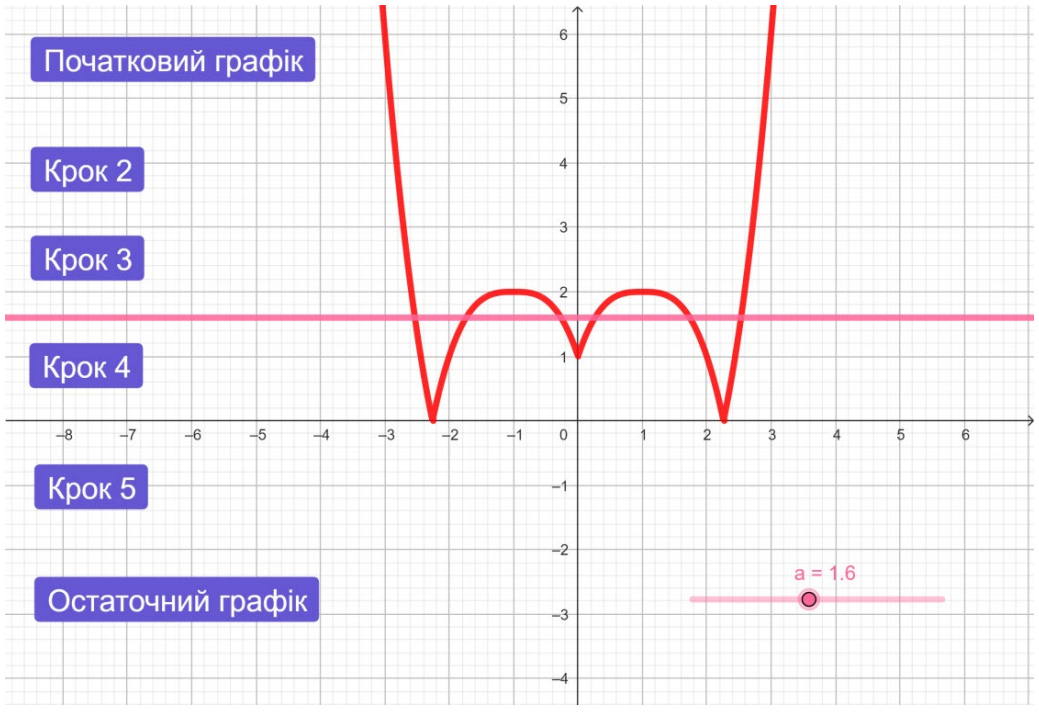
$1)\, y = x^3 \to 2)\, y = |x|^3 \to 3)\, y = |x-1|^3 \to 4)\, y = |x-1|^3 - 2 \to 5)\, y = \left||x-1|^3 - 2\right| \to$

$\to 6)\, y = \left|\left||x|-1\right|^3 - 2\right|$

Зауважимо, що при виконанні даних кроків маємо виконати елементарні перетворення:

- модуль на аргумент;
- паралельне перенесення графіка праворуч на 1;
- паралельне перенесення графіка вниз на 2;
- модуль на функцію;
- модуль на аргумент.





Докладне виконання всіх кроків розв'язання задачі представлено на рисунках.
Відповідь. При $a < 0$ рівняння не має розв'язків; при $a = 0$ або $a > 2$ рівняння має два розв'язки; при $a = 1$ рівняння має п'ять розв'язків; при $a = 2$ або при $0 < a < 1$ рівняння має чотири розв'язки; при $1 < a < 2$ рівняння має шість розв'язків.

Примітка. Рекомендуємо для кращої наочності використовувати GeoGebra-аплет, посилання на який наведено нижче. Учні/учениці можуть відкрити цей додаток на мобільних пристроях за допомогою QR-коду.

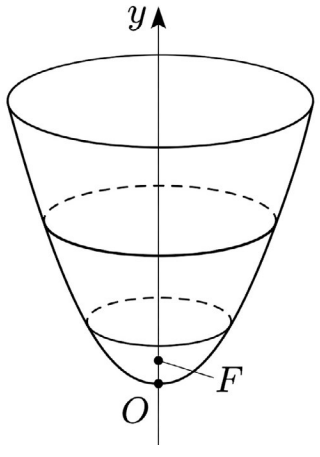
https://www.geogebra.org/m/ahrgnwf7

Історичні відомості

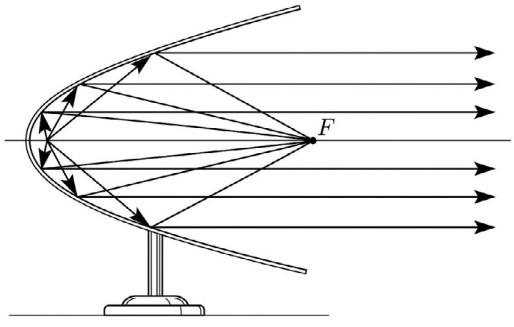
Хоча залежності між різними величинами вчені досліджували з давніх-давен, до сучасного означення функції та її графіка дійшли далеко не одразу. У формуванні цих понять видатну роль зіграли видатні математики 17 століття – Рене Декарт, П'єр Ферма, Ґотфрід Вільгельм Ляйбніц, Йоганн Бернуллі, Ісаак Ньютон; 18 століття – Жан д'Аламбер та Леонард Ойлер; 19 століття – Петер Густав Лежен Діріхле, Юліус Вільгельм Ріхард Дедекінд, Джузеппе Пеано та інші.

Однак криві, які є графіками елементарних функцій, досліджували з геометричних міркувань ще у часи Стародавньої Греції. Цим пояснюється той факт, що назви цих кривих мають іншомовне походження.

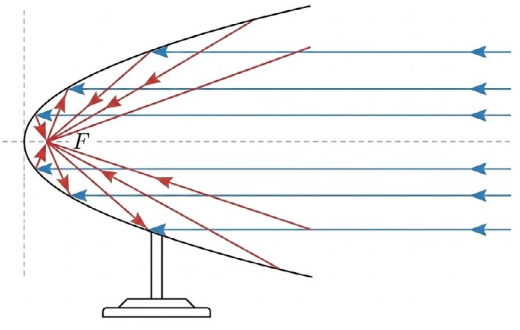
Так, слово «парабола» у перекладі з давньогрецької означає *наближення*, слово «гіпербола» — *перебільшення*. Давні греки вивчали також і пропорції, але слово «пропорційність» прийшло до нас з латини та означає *сумірність*, *співвідношення*.



Саме слово «функція» також має латинське походження і означає *здійснення*, *виконання*. Для відповідного математичного поняття його запропонував у 1673 році видатний німецький математик Ляйбніц.



Деякі властивості графіків елементарних функцій стали важливою складовою фізики, техніки та астрономії. Так, для кожної параболи — графіка функції $y = kx^2$ — є важлива точка, так званий фокус. Для будь-якої точки параболи відстані до її фокуса F і до деякої прямої — директриси — є однаковими. При обертанні параболи навколо осі симетрії отримаємо параболоїд із тим самим фокусом. Якщо у фокус такого дзеркального параболоїда помістити джерело світла, то промені, віддзеркалившись від його поверхні, підуть пучком, паралельним до його осі. Таку властивість широко застосовують у конструкціях прожекторів, автомобільних фар, ліхтариків тощо.



Аналогічну властивість застосовують і у дзеркальних телескопах: світло від далекої зірки, що йде паралельним пучком, при правильному налаштуванні телескопа, віддзеркалившись від поверхні телескопа, збирається у його фокусі.

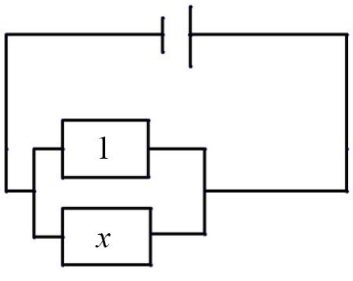
Саме ця властивість параболи та її фокуса широко використовується зараз для організації супутникового зв'язку.

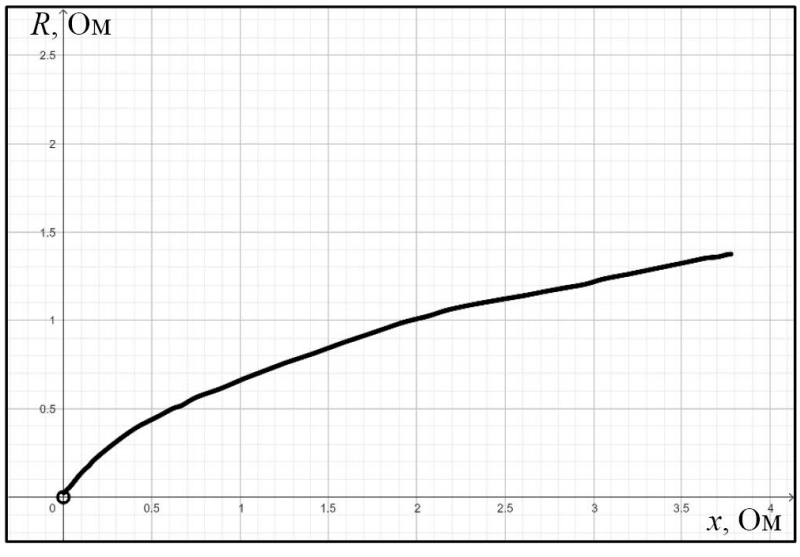
Висновок. У багатьох алгебричних та прикладних задачах використовуються такі елементарні функції, як обернена пропорційність та степенева функція. Їхні графіки та властивості є відправною точкою для дослідження більш складних ситуацій, які можна відтворити графічно за допомогою базових перетворень графіків.

VI. Розв'язання практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. На олімпіаді з фізики учням та ученицям запропонували задачу. У ланцюгу постійного струму присутні два паралельно підключені резистори — з опором 1 Ом та з невідомим опором x Ом. Треба побудувати графік залежності загального опору в залежності від x. Іванка вирішила, що при x, близьких до 0, загальний опір буде мало відрізнятися від 0 Ом, а далі буде зростати при збільшенні x. Тож, вона намалювала рисунок. Але вчитель Петро Васильович, член журі, помітив суттєву помилку на цьому графіку. У чому вона полягає?





Розв'язання. При паралельному підключенні резисторів загальний опір можна знайти з формули: $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.

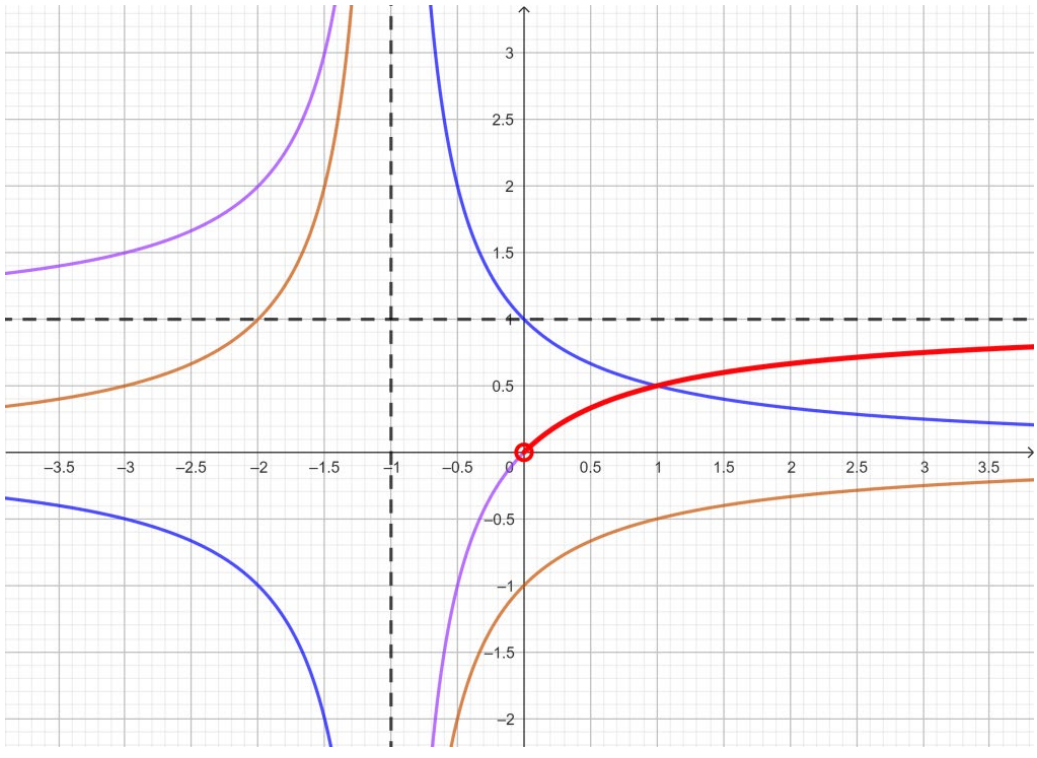
У даному випадку $R_1=x$, $R_2=1$, отже, $R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$, або $R(x)=\frac{x}{x+1}$ при $x>0$.

Перед побудовою графіка виконаємо перетворення: $R(x)=\frac{(x+1)-1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$.

Будемо будувати відповідний графік на основі відомого графіка функції $y=\frac{1}{x}$, дотримуючись наступного плану побудови та відповідних перетворень:

$1)\, y=\frac{1}{x} \to 2)\, y=\frac{1}{x+1} \to 3)\, y=-\frac{1}{x+1} \to 4)\, y=-\frac{1}{x+1}+1$.

Для остаточного графіка (на рисунку позначено червоним кольором) врахуємо, що $x>0$. Легко бачити, що цей графік лежить під прямою $y=1$. А для графіка, що намалювала Іванка, це зовсім не так.



Відповідь. Графік має лежати під прямою $y=1$.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C (8–10 хв)

Рівень А

1. Складіть таблицю значень та побудуйте графік функції:

а) $y=\frac{-4}{x}$; б) $y=x^2$; в) $y=x^3$.

2. Використовуючи базові перетворення, побудуйте графік функції на основі графіка оберненої пропорційності:

а) $y=\frac{2}{x-1}-3$; б) $y=\frac{1}{2x-3}+1$; в) $y=\left|\frac{1}{x+3}-1\right|$.

3. Перетворіть вираз для задання функції у зручний вид та побудуйте відповідний графік:

а) $y=x^2-4x$; б) $y=\frac{x+2}{x+1}$; в) $y=\left|x^3-3x^2+3x-1\right|$.

4. Розв'яжіть графічним методом систему рівнянь:

а) $\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=x^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y=\sqrt{-x}, \\ y=-x^3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} y=\dfrac{8}{x}, \\ y=\sqrt{x}. \end{cases}$

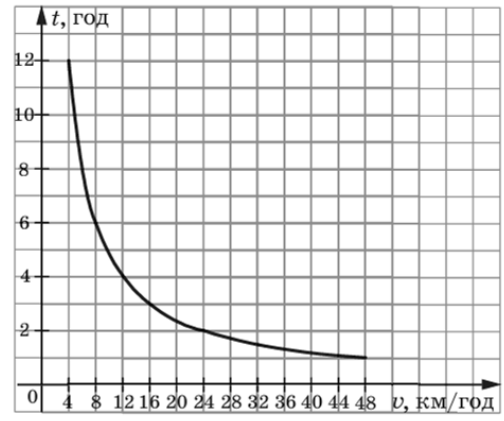
5. На рисунку зображено графік залежності часу t від швидкості руху v при подоланні відстані між двома містами.

а) Знайдіть характер даної залежності, запишіть її загальну формулу.

б) За який час подолає дану відстань пішохід зі швидкістю руху 4 км/год ? Автомобіль зі швидкістю руху 60 км/год?

в) З якою постійною швидкістю треба рухатися, щоби подолати відстань між даними містами за півгодини?

г) Чому дорівнює відстань між цими містами?

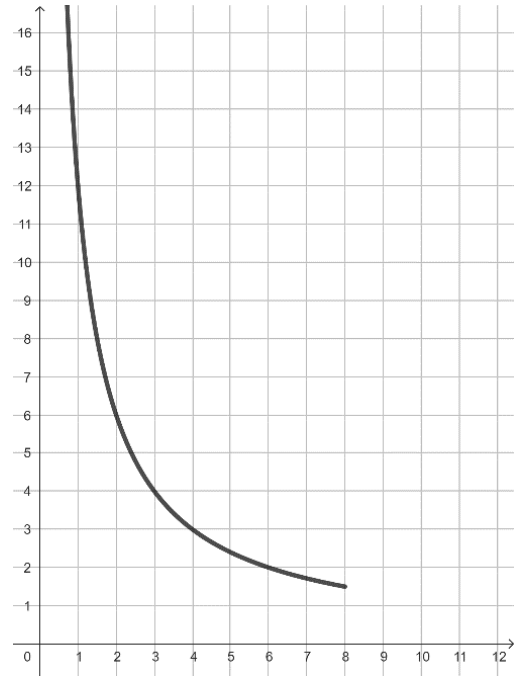


6. За законом Ома $I=\dfrac{U}{R}$ для ланцюга постійного струму та даним графіком, що відображає залежність сили струму від змінного опору реостата, знайдіть:

а) чому дорівнює сила струму, якщо повзунок реостата встановити у положення, що відповідає опору 3 Ом;

б) при якому значенні опору сила струму дорівнює 6 А;

в) скільки вольт становить напруга на кінцях реостата.



Рівень В

1. Побудуйте графік функції, використовуючи базові перетворення:

а) $y=2x^2-4x+6$; б) $y=0{,}5\sqrt{3x-6}-2$; в) $y=\dfrac{2x-5}{x-4}$.

2. Складіть алгоритм та побудуйте графік, за алгоритмом. Перевірте отримані результати, використовуючи відповідне програмне середовище (GeoGebra, WolframAlpha тощо).

а) $y=\left|x^2-6|x|+8\right|$; б) $y=\left|\sqrt{||x|-2|}-3\right|$; в) $y=\left|\dfrac{2|x|-5}{|x|-4}\right|$.

3. Побудуйте графік функції:

а) $y=\left|||x-1|-2|-3\right|$; б) $y=\left|\sqrt{2-|x|}-1\right|$; в) $y=\left|(|x|-3)^3+1\right|$.

Знайдіть, за побудованим графіком, проміжки монотонності функції.

4. Спростіть формулу, що задає функцію, та побудуйте відповідний графік:

а) $y = x \cdot \left(|x| - 4\right)$; б) $y = x \cdot |x - 4|$; в) $y = \left(2x + |x|\right)^3 + 1$.

5. Дано функцію $f(x) = x^2 - 4x$. Побудуйте графік функції:

а) $y = 1 - f(x)$; б) $y = |2f(x)|$; в) $y = f\left(|x - 1|\right)$.

6. Побудуйте графік кусково-заданої функції:

а) $y = \begin{cases} \dfrac{x+3}{1-x}, & x < 1, \\ 0{,}5x^2 - x + 1, & x \geq 1; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 3, & x \leq -4, \\ \left|x^2 - 4|x| + 3\right|, & -4 < x \leq 4, \\ 3 - \left(x - 4\right)^2, & x > 4; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} \left||2x - 6| - 1\right|, & x \in [-4; 4], \\ \left|2 - \sqrt{|x - 1|}\right|, & x \notin [-4; 4]. \end{cases}$

7. Розв'яжіть рівняння графічним методом:

а) $2\sqrt{x - 2} = \dfrac{9}{x} - 1$; б) $\sqrt{3 - x} = 1 - \dfrac{5}{x - 4}$; в) $2 - 2x - x^2 = \dfrac{6}{x + 3}$.

Скільки розв'язків має кожне з рівнянь? Як це пов'язано з властивостями відповідних функцій?

8. Використовуючи графічний метод, знайдіть кількість коренів рівняння в залежності від значень параметра a. Перевірте отримані результати, використовуючи відповідне програмне середовище (GeoGebra, WolframAlpha тощо).

а) $\left||x + 2| - 1\right| = a$; б) $\left|x^2 + 4|x| + 3\right| = a$; в) $\left|\sqrt{3 - |x|} - 2\right| - 1 = a$.

9. Спростіть вираз, що задає функцію, та побудуйте графік функції:

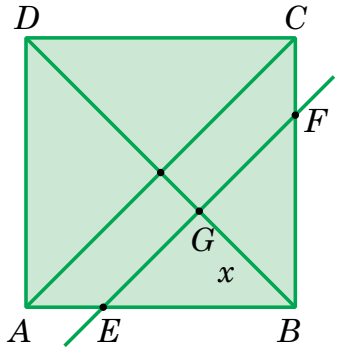
а) $y = \dfrac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$; б) $y = \dfrac{x^2 - 5x - 6}{8x - x^2 - 12}$; в) $y = \dfrac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}}$.

10. Побудуйте графік функції:

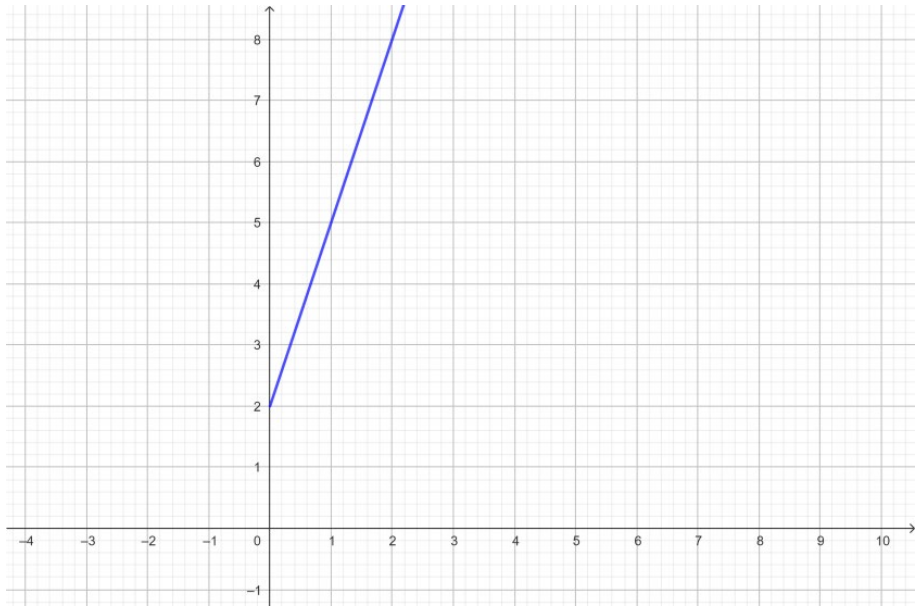
а) $y = \left|x^2 - 4x - 5\right|$; б) $y = \left|\dfrac{3 - x}{x - 5}\right|$; в) $y = \left(|x| - 1\right)^3$.

Дослідіть аналітично властивості функції: область визначення, множина значень, нулі, проміжки знакосталості, парність/непарність, найбільше та найменше значення, монотонність функції. Чи відповідають знайдені властивості функції властивостям побудованого графіка функції? Зробіть висновки.

11. Дано квадрат зі стороною 1. Пряма, паралельна до його діагоналі, ділить квадрат на дві фігури (див. рисунок). Задайте формулами залежність між площею кожної з них та довжиною меншого відрізка, що відсікає дана пряма від іншої діагоналі. Знайдіть область визначення та множину значень для обох відповідних функцій. Побудуйте їхні графіки.



12. При рівноприскореному прямолінійному русі відстань від точки старту визначається за формулою $S(t)=v_0t+\dfrac{at^2}{2}$. За даним графіком функції $v(t)=v_0+at$, знайдіть початкову швидкість, прискорення $(v_0;\,a)$. Побудуйте відповідний графік залежності відстані від точки старту від часу.



Рівень С

1. Розв'яжіть рівняння $\big||x+1|-2\big|=1-x$ графічним методом.

2. Розв'яжіть нерівність графічним методом:

а) $x^2\ge\sqrt{x}$; б) $\sqrt{x+2}\le\sqrt{2-x}$; в) $x^3+1\le|x-1|$.

3. Використовуючи графічний та аналітичний підходи, знайдіть кількість розв'язків системи рівнянь у залежності від значень параметра a. Перевірте отримані результати, використовуючи відповідне програмне середовище (GeoGebra, WolframAlpha тощо).

а) $\begin{cases}x+y=a,\\xy=9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x+y=a,\\y-x^2=1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}y+x=a,\\y-\sqrt{x}=1.\end{cases}$

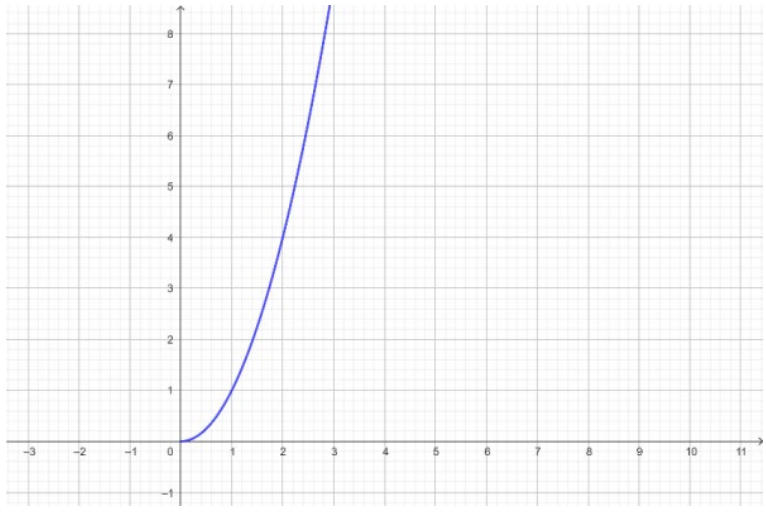
4. Побудуйте графік функції:

а) $y=\left[x^2\right]$; б) $y=\left\{\dfrac{2}{x}\right\}$; в) $y=\sqrt{5-\left[x\right]}$.

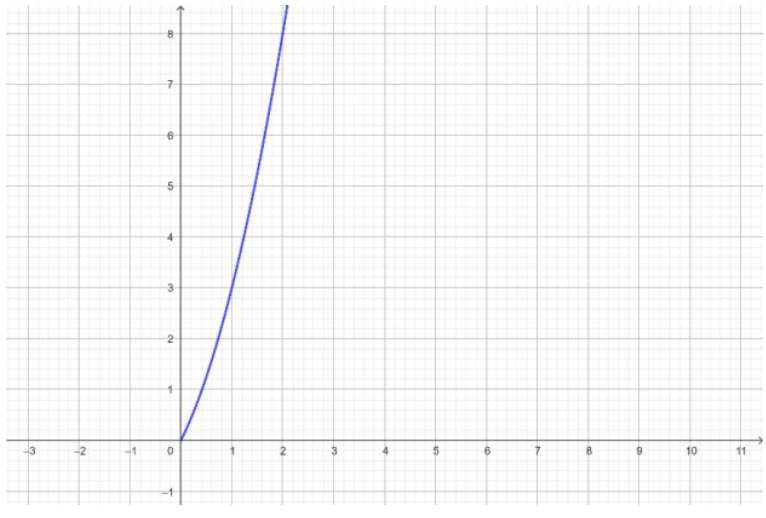
5. За графіками функцій $y=x^2$ та $y=x^3$, доведіть, що $x^2\ge x^3$ на проміжку $\left[-1;\,1\right]$. Використайте отриманий результат для розв'язання системи рівнянь $\begin{cases}x+y+z=1,\\x^2+y^2+z^2=1,\\x^3+y^3+z^3=1.\end{cases}$

6. При рівноприскореному прямолінійному русі відстань від початкової точки відліку визначається за формулою $S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$. За даними графіками функції $S(t)$, знайдіть для кожного випадку початкову відстань, початкову швидкість, прискорення (S_0; v_0; a). Побудуйте відповідні графіки залежності швидкості від часу.

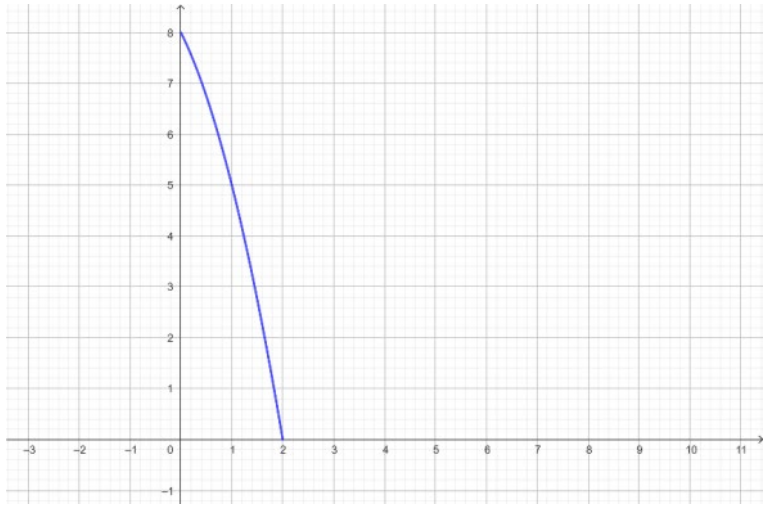
1)



2)



3)



VIII. Рефлексія (1–2 хв)

1. Я знаю означення оберненої пропорційності.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

2. Я вмію будувати гіперболу — графік оберненої пропорційності.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

3. Я знаю основні властивості функцій $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ та вид їхніх графіків.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

4. Я знаю геометричні перетворення, що відповідають зміні функції $y = f(x)$ на $y = f(x) + a$; $y = f(x + a)$; $y = kf(x)$; $y = f(kx)$; $y = -f(x)$; $y = f(-x)$; $y = |f(x)|$; $y = f|(x)|$.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

5. Я вмію застосовувати алгоритм побудови графіків із застосуванням базових перетворень.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему при розв'язуванні задач практичного змісту.

☐ Так ☐ Ще треба потренуватися ☐ Ні

Можливі теми проєктів

1. Застосування оберненої пропорційності в практичних задачах.

2. Застосування степеневої функції в практичних задачах.

3. Використання функції $y = \sqrt{x}$ у задачах про математичний та пружинний маятники.

4. Квадратична регресія та її застосування.

5. Узагальніть задачу 12 рівня B та задачу 6 рівня C.