

10

Тема 8. Нерівності

Урок 2. Лінійні нерівності

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте нерівності з однією змінною та їхні основні властивості;
- 2) з'ясуєте алгоритм розв'язання лінійних нерівностей з однією змінною;
- 3) пригадаєте схему розв'язання систем лінійних нерівностей;
- 4) познайомитеся зі схемою розв'язання сукупностей лінійних нерівностей;
- 5) пригадаєте методи розв'язання подвійних лінійних нерівностей;
- 6) зможете використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач з алгебри, геометрії, програмування тощо.

II. Лінійні нерівності

Серед усіх нерівностей зі змінними лінійні нерівності з однією змінною є найпростішими. Їхнє розв'язання подібне до розв'язання лінійних рівнянь, а саме, до виконання рівносильних перетворень, які спрощують нерівність, та ділення лівої та правої частин нерівності на одне і те саме число. Якщо у лінійних рівнянь, здебільшого, один розв'язок, то у лінійних нерівностей їх, як правило, – безліч. Тому варто пригадати не тільки те, як розв'язувати лінійні нерівності, але й повторити позначення множин розв'язків нерівностей на числових осях.

При розв'язанні нерівностей існує декілька суттєвих відмінностей, отож, звертайте увагу і на спільні риси, і на відмінності у розв'язанні рівнянь та нерівностей.

Сформулюємо кілька означень.

Означення. Розв'язком нерівності з однією змінною називають таке значення змінної, яке перетворює дану нерівність на правильну числову нерівність.

Означення. Розв'язати нерівність з однією змінною — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх не існує.

Означення. Дві нерівності називають **рівносильними**, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки, або обидві нерівності розв'язків не мають.

Практичні способи отримання рівносильних нерівностей

Перенесення доданка через знак нерівності з протилежним знаком (або додавання до обох частин нерівності одного й того самого числа)	$a + b \leq c - d,$ $a + d \leq c - b,$ $a \leq b \Leftrightarrow a + c \leq b + c.$	$4x - 3 \leq 3x - 4,$ $4x - 3x \leq 3 - 4,$ $x \leq -1.$
Множення (або ділення) обох частин нерівності на додатне число із збереженням знака нерівності	$a \leq b \Leftrightarrow ka \leq kb,$ $k > 0.$	$0,25x > 3, x > 12.$
Множення (або ділення) обох частин нерівності на від'ємне число із зміною знака нерівності	$a \leq b \Leftrightarrow ka \geq kb,$ $k < 0.$	$-5x \geq 3,2, x \leq -0,64.$

Означення. Лінійною нерівністю з однією змінною називають нерівність виду $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$, де a та b — деякі числа, x — змінна.

Схема розв'язування лінійних нерівностей, якщо $a > 0$

$ax > b$	$x > \frac{b}{a}$	$x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty \right)$
$ax \geq b$	$x \geq \frac{b}{a}$	$x \in \left[\frac{b}{a}; +\infty \right)$
$ax < b$	$x < \frac{b}{a}$	$x \in \left(-\infty; \frac{b}{a} \right)$
$ax \leq b$	$x \leq \frac{b}{a}$	$x \in \left(-\infty; \frac{b}{a} \right]$

Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $12x - 3 \geq 5x + 4$.

[illegible]

Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $2(5+2,5x) < 5(x-4)$.

[illegible]

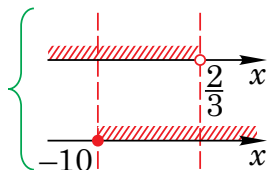
III. Системи лінійних нерівностей

Якщо потрібно розв'язати кілька нерівностей та отримати їхні спільні розв'язки, наприклад, $3x - 2 < 0$ та $x + 10 \geq 0$, то записують так:
$$\begin{cases} 3x - 2 < 0, \\ x + 10 \geq 0. \end{cases}$$

Тоді потрібно розв'язати кожен із двох нерівностей окремо та знайти спільні розв'язки обох нерівностей системи.

$$\text{Отримаємо: } \begin{cases} x < \frac{2}{3}, \\ x \geq -10. \end{cases}$$

Зобразимо графічно розв'язки обох нерівностей на числових прямих:



Отже, проміжок $\left[-10; \frac{2}{3}\right]$ — множина спільних розв'язків обох нерівностей.

Тобто, розв'язати систему нерівностей — означає знайти перетин множин розв'язків нерівностей, які утворюють систему.

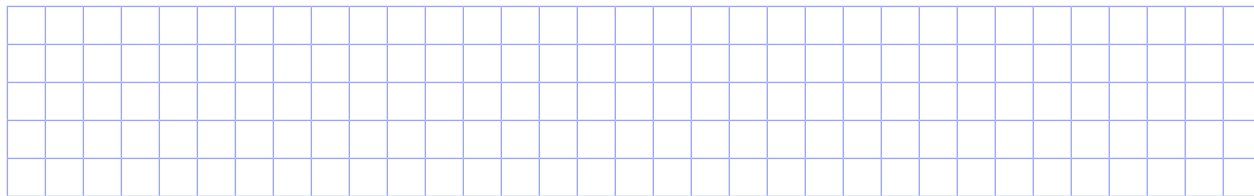
Схема розв'язування систем та сукупностей лінійних нерівностей

Етапи розв'язання	Система нерівностей	Сукупність нерівностей
	$\begin{cases} 10 \geq 6 + 2x, \\ 0,2x > -0,6. \end{cases}$	$\begin{cases} 10 \geq 6 + 2x, \\ 0,2x > -0,6. \end{cases}$
Розв'яжіть окремо кожен з нерівностей	$\begin{cases} -2x \geq 6 - 10, \\ x > -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x > -3. \end{cases}$	$\begin{cases} -2x \geq 6 - 10, \\ x > -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x > -3. \end{cases}$

IV. Подвійні лінійні нерівності

При розв'язанні подвійних лінійних нерівностей треба або робити рівносильні перетворення, або записати подвійну нерівність як систему лінійних нерівностей. Наведемо приклади.

Приклад 6. Розв'яжіть подвійну лінійну нерівність $3 \leq 1 - 5x < 6$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Туристична компанія планує запустити рекламу в інтернеті та виділити для цього бюджет від 15 000 до 25 000 гривень. Вартість однієї тисячі показів (CPM – cost per mille або cost per thousand impressions) становить 150 гривень. Скільки тисяч показів можна придбати, аби вкластися в бюджет?

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть лінійну нерівність:

1) $3x - 21 \geq x + 18$; 2) $3(x - 7) < 3x + 18$; 3) $3 - 2(x - 7) < 11 - 2x$.

2. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} 27 - 5x \geq 41 + 2x, \\ 4x + 10 > 7x - 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 32x - 20 \leq 48 - 2x, \\ 7x - 12 \geq 8 - 3x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2(x - 1) - 3(x - 2) < x, \\ 6x - 3 < 17 - (x - 5). \end{cases}$

3. Розв'яжіть подвійну нерівність:

1) $-3 < 4 - 2x \leq 6$; 2) $-14 < -2 - 3x < 4$; 3) $-1 \leq \frac{3x - 1}{4} \leq 2$.

4. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{\sqrt{2x - 1}} + \frac{2}{\sqrt{1 - x}}$; 2) $y = \sqrt{3x - 4} + \sqrt{2x - 5}$; 3) $y = \sqrt{2x - 6} + \frac{1}{x - 3}$.

5. Бригада робітників за 5 днів виготовила менше від 300 деталей, а за 10 днів – більше за 500 деталей. Визначте, скільки деталей виготовляв щодня кожний працівник, якщо у бригаді 8 працівників, а продуктивність роботи в усіх робітників однакова і становить ціле число деталей на день.

6. Із туристичної бази до міста, що знаходиться на відстані 24 км, вирушив турист зі швидкістю 4 км/год. Через дві години за ним із тієї ж бази вийшов другий турист. Із якою сталою швидкістю має рухатися другий турист, щоб наздогнати першого до моменту, як той прийде до міста?

Рівень В

1. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 5(x+2) - 9(x+1) - 3 < 1 - 4(x+3), \\ 7(3+5x) < 3x - 5(x-2); \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x - 3 > 3(x-2) - 1, \\ 2 - 3(2-x) < 5(2x-1), \\ 13 - \frac{x}{2} > 3(x+2) - 1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -1 < 3 - 5x < 0, \\ 2x - 1 \leq 4x + 3 \leq 3x + 7. \end{cases}$$

2. Знайдіть:

1) найменше ціле значення x , що задовольняє систему

$$\begin{cases} 13 - \frac{3-7x}{10} + \frac{x+1}{2} < 14 - \frac{7-8x}{2}, \\ 7(3x-5) + 4(17-x) > 18 - \frac{5(2x-6)}{2}; \end{cases}$$

2) найбільше ціле значення x , що задовольняє систему $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{3x-1}{6} < \frac{2-x}{12} - \frac{x+1}{2} + 3, \\ x > \frac{5x-4}{10} - \frac{3x-1}{5} - 2,5; \end{cases}$

3) середину проміжку, що є множиною розв'язків системи $\begin{cases} \frac{3x-13}{4} \leq \frac{x-1}{4} - \frac{7}{8}, \\ 2 \geq \frac{x}{4} + \frac{3-2x}{3}. \end{cases}$

3. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$1) \begin{cases} -1 < x < 2, \\ 2 \leq x < 5, \\ x \geq 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{3-x}{3} + 1 \leq \frac{2x-1}{5}, \\ -1 > 4x-4; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 3-6x < 15, \\ x < 15, \\ 2x > x+15. \end{cases}$$

4. Знайдіть:

1) область допустимих значень виразу $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} + \frac{1}{\sqrt{x^2-8x+16}}$;

2) множину значень параметра, за яких рівняння має два різних розв'язки:

$$4x^2 - (4a-1)x + a^2 - 5 = 0;$$

3) множину розв'язків нерівності залежно від значень параметра b :

$$b-1 \leq (3-4x)^2 \leq b+1.$$

5. Інтернет-провайдер пропонує два тарифи: один фіксований — 500 грн на місяць, а інший — 230 грн на місяць плюс 10 грн за кожний гігабайт трафіку. При якому обсязі споживання перший тариф стане вигіднішим за другий?

6. Підлітку рекомендується вживати від 1 г до 1,2 г білка на кожен кілограм маси тіла на добу. Крім того, він отримує білок лише з одного продукту, в 100 г якого міститься 20 г білка. Відомо, що вага підлітка — 60 кг. Скільки грамів продукту на день він може з'їдати, щоб норму було дотримано?

7. Марія — призерка олімпіади з програмування. Серед призерів понад 94% — юнаки. Обчисліть найменшу можливу кількість призерів.

8. У шкільній газеті повідомляється, що відсоток учнів 10-А класу, які підвищили у другому півріччі успішність, більший за 2,9% і менший від 3,1%. Знайдіть мінімальну можливу кількість учнів у цьому класі.
9. Дев'ять однакових книжок коштують більше за 11 євро, але менше від 12 євро. За 13 таких самих книжок заплатили 15 євро та декілька центів, але менше від 16 євро. Скільки коштує одна книжка?
10. У наведеній нижче програмі, написаній мовою програмування Python, програміст припустився помилки. Встановіть, що саме має робити програма. У чому полягає помилка? Як її виправити?

```
import math

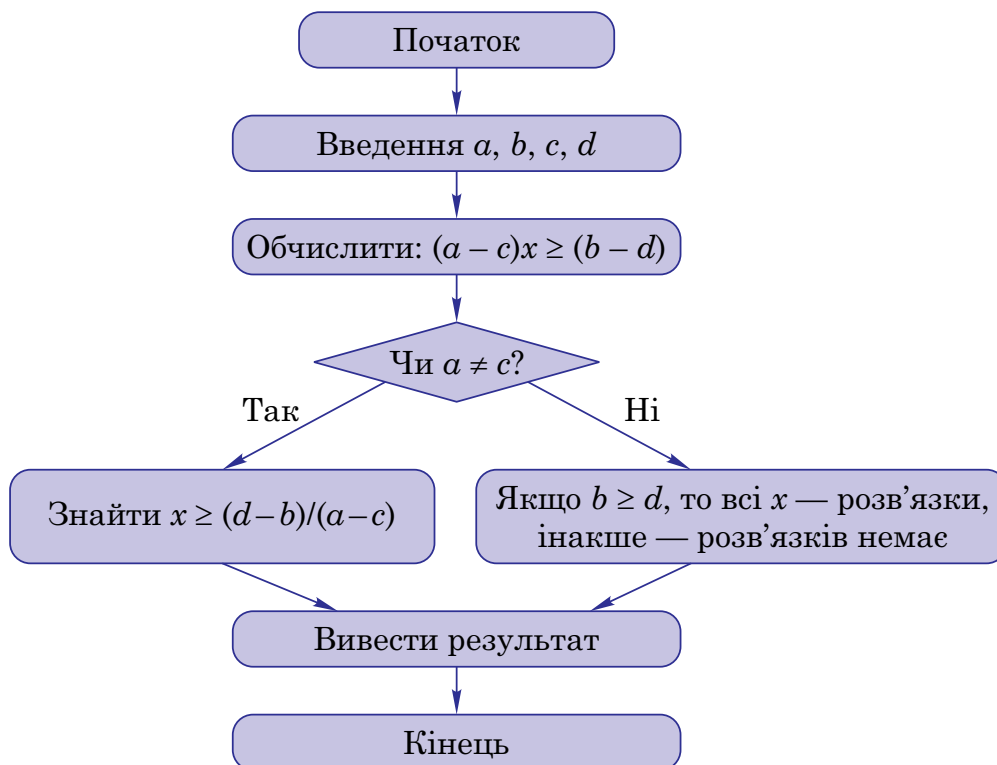
a = float(input («Уведіть коефіцієнт a (a ≠ 0): »))
b = float(input («Уведіть коефіцієнт b: »))
c = float(input («Уведіть коефіцієнт c: »))

if a != 0:
    print («Це не квадратне рівняння.
    Коефіцієнт a має не дорівнювати 0.»)
else:

    D = b**2 - 4*a*c

    if D > 0:
        print («Рівняння має 2 дійсні корені.»)
    elif D == 0:
        print («Рівняння має 1 дійсний корінь.»)
    else:
        print («Рівняння не має дійсних коренів.»)
```

11. За правилами перетину митного кордону України, без письмового декларування можна перевозити готівкову валюту та банківські метали на суму, що не перевищує в еквіваленті 10 000 євро. Галина Петрівна вирушила у подорож до Європи, взявши із собою готівкою 1500 польських злотих, 1200 чеських крон та 1400 швейцарських франків. Крім того, вона планує взяти декілька купюр по 100 євро. В день перетину кордону Галиною Петрівною курс Національного банку України був наступний: 11,0753 грн за 1 злотий, 1,8999 грн за 1 крону, 50,6758 грн за 1 франк, 47,5421 грн за 1 євро. Скільки купюр вона може взяти, щоб уникнути письмового декларування?



- 12.** Учні та учениці отримали завдання із складання алгоритму розв'язання нерівності $ax + b \geq cx + d$ та створені для алгоритму блок-схеми. Василько з Василюю поставили відповідне питання штучному інтелекту. На жаль, вони не помітили грубу помилку у розв'язанні III. Спробуйте знайти основну помилку у наведеній блок-схемі та виправити її. Які ще недоліки ви помітили у цій схемі від III ?

Рівень С

- 1.** З урахуванням відмінностей між системами та сукупностями, розв'яжіть:

$$1) \begin{cases} 2x + 3 \geq 5, \\ 3x + 2 > 6, \\ 5x - 1 < 19, \\ 4x + 1 \leq 7; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x + 3 \geq 5, \\ 3x + 2 > 6, \\ 5x - 1 < 19, \\ 4x + 1 \leq 7; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -5 \leq 2x + 1 < 7, \\ \begin{cases} 3x + 2 > 6, \\ 2x + 1 \geq 5, \end{cases} \\ \begin{cases} 5x - 1 < 19, \\ 3x + 5 > 14, \end{cases} \\ 4x + 1 \leq 7. \end{cases}$$

- 2.** Розв'яжіть нерівність:

$$1) (x - 1)(x - 2) > 0;$$

$$2) \frac{(x - 3)(x^2 - 5x + 6)}{x - 4} \geq 0;$$

$$3) 3x^4 - 6x^3 \leq 0.$$

- 3.** Розв'яжіть ірраціональну нерівність:

$$1) \sqrt{2x - 5} \leq 7;$$

$$2) \sqrt{69 - 4x^2} \geq 7;$$

$$3) \sqrt{2x + 5} + \sqrt{2x - 4} - \sqrt{7 - 3,5x} \leq \sqrt{x + 8}.$$

4. Ширина захвату самохідного комбайна для створення дорожнього покриття дорівнює 0,85 м. Кожна наступна смуга перекриває попередню не менш ніж на чверть її ширини. З якою постійною швидкістю має рухатися комбайн задля того, щоби двічі покрити ділянку шосе шириною 6,5 м та довжиною 750 м за час, що не перевищує 6 годин?
5. Потрібно за радіусами двох кіл та відстані між їхніми центрами встановити взаємне положення даних кіл. Знайдіть у програмі, написаною мовою програмування C++, поданій нижче, котрий із випадків пропущений. Виправіть недолік програми.

```
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

int main() {
    double R1, R2, d;

    cout << «Уведіть радіус першого кола: «;
    cin >> R1;
    cout << «Уведіть радіус другого кола: «;
    cin >> R2;
    cout << «Уведіть відстань між центрами кіл: «;
    cin >> d;

    double sum = R1 + R2;
    double diff = abs(R1 - R2);

    if (d == 0 && R1 == R2) {
        cout << «Кола збігаються.» << endl;
    } else if (d == sum) {
        cout << «Кола дотикаються зовні.» << endl;
    } else if (d == diff && d != 0) {
        cout << «Кола дотикаються зсередини.» << endl;
    } else {
        cout << «Кола не мають спільних точок.» << endl;
    }
    return 0;
}
```

6. Із пункту А в заданому напрямку з постійною швидкістю та через однакові проміжки часу вирушають автобуси, що їдуть до наступного міста без зупинок. Дорожній майстер пройшов 4 км, і за цей час повз нього проїхали 6 автобусів. Наступного разу він пройшов 7 км, і повз нього проїхали 8 автобусів. Утретє він пройшов 17 км. Знайдіть кількість автобусів, що обігнали майстра цього разу, якщо всі вони їхали з однаковою швидкістю. Скільки можливих розв'язків має задача?

Рефлексія

Оцініть розуміння теми уроку балами від 1 до 10.

Мої враження від уроку

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливі									Чудові

Назвіть дві речі, які вам сподобалися на уроці, й одну річ, яка вам не сподобалася, або у вас усе ще залишилися запитання.

1)

.

.

2)

.....

.....

?

Можливі теми проєктів

- 1.** Лінійні нерівності та їхні системи, що містять параметр.
- 2.** Застосування лінійних нерівностей в економіці.
- 3.** Ілюстративний приклад 8. Знайдіть усі можливі варіанти кількості файлів на флешці, узагальніть результати, отримані в розв'язанні задачі. Напишіть програму для розв'язування подібних задач у загальному випадку.
- 4.** Узагальніть задачу 9 рівня В.
- 5.** Узагальніть задачу 6 рівня С. Створіть комп'ютерну програму для візуалізації описаної ситуації та унаочнення відповіді.

