

10

Тема 8. Нерівності

Урок 3. Квадратичні нерівності

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте базову схему розв'язання квадратичних нерівностей з однією змінною;
- 2) пригадаєте схему розв'язання систем квадратичних нерівностей;
- 3) познайомитеся із ідеєю розв'язання сукупностей квадратичних нерівностей;
- 4) зможете використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач з алгебри, фізики, біології, програмування тощо.

II. Повторення

1. Скільки коренів має рівняння $2x^2 - 3x - 11 = 0$?

А	Б	В	Г	Д
жодного	один	два	три	безліч

2. Укажіть рівняння, яке має один корінь (два корені, що збігаються).

А	Б	В	Г	Д
$2x^2 + x - 11 = 0$	$2x^2 + x + 11 = 0$	$2x^2 + 8x - 8 = 0$	$2x^2 + 8x + 8 = 0$	$x^2 + 8x + 8 = 0$

3. Укажіть рівняння, яке має корені 3 та -5.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 + 2x - 15 = 0$	$3x^2 + 2x - 15 = 0$	$x^2 - 2x - 15 = 0$	$x^2 - 2x + 15 = 0$	$x^2 + 2x + 15 = 0$

4. Оберіть функцію, графіком якої є парабола з вітками, напрямленими вгору.

А	Б	В	Г	Д
$y = -x^2 + 2x - 15$	$y = -3x^2 + 2x - 15$	$y = -(x - 3)^2 - 2$	$y = x^2 - 2x + 15$	$y = 2x - x^2 + 15$

5. Оберіть функцію, яка задає параболу з вершиною на осі абсцис.

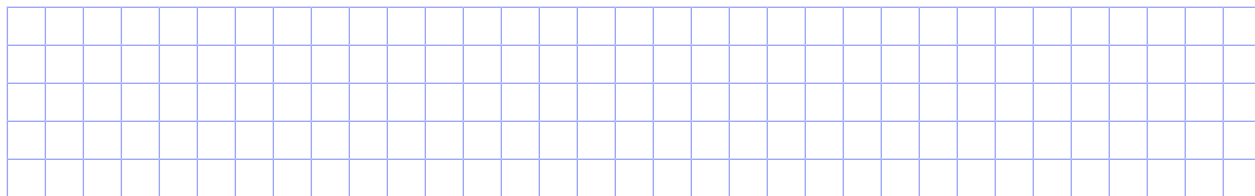
А	Б	В	Г	Д
$y = -x^2 + 2x - 15$	$y = -3x^2 + 2x - 15$	$y = -(x - 3)^2 - 2$	$y = 3(x - 1)^2 + 2$	$y = 2x^2 + 8x + 8$

III. Квадратичні нерівності

При багатьох застосуваннях квадратичної функції виникає необхідність порівняти її значення з конкретним числом. Зокрема знайти інтервали знакосталості квадратичної функції — означає відшукати, за яких значень аргументу функція набуває додатних (від'ємних) значень. Оскільки ви вже повторили основні властивості квадратичної функції та її графіка, варто скористатися відповідними фактами для розв'язування нерівностей.

Означення. *Квадратичною нерівністю з однією змінною* називають нерівність виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де a, b, c — деякі числа, $a \neq 0$, x — змінна.

Приклад 1. Доведіть, що графік функції $y = x^2 - 2x + 3$ розташований в одній півплощині відносно осі абсцис.



IV. Розв'язування квадратичних нерівностей графічним методом

Якщо знати розташування графіка квадратичної функції відносно осі абсцис, то легко встановити проміжки аргументу, для яких виконується відповідна квадратична нерівність.

Розташування графіка квадратичної функції відносно осі Ox

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$		
$D = 0$		

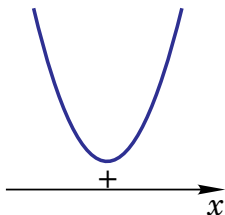
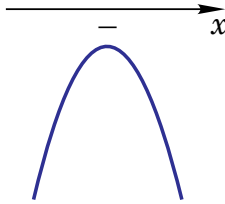
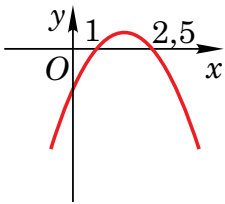
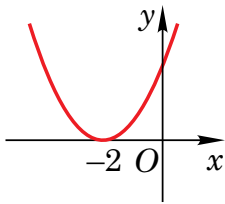
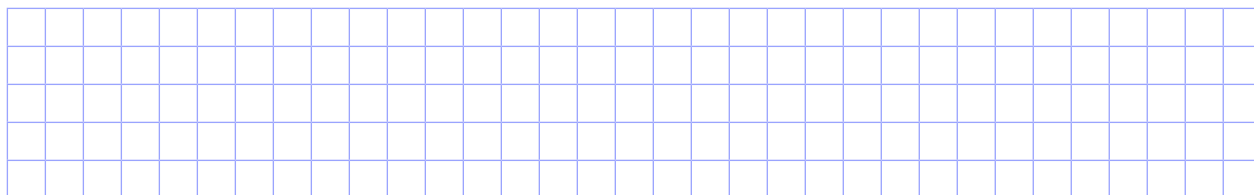
	$a > 0$	$a < 0$
$D < 0$		

Схема розв'язування квадратичних нерівностей

Етапи розв'язання	Приклади застосування	
	$-2x^2 + 7x - 5 \geq 0$	$2x^2 + 8x + 8 > 0$
1) Розв'язати відповідне квадратне рівняння.	$-2x^2 + 7x - 5 = 0$ $2x^2 - 7x + 5 = 0$ $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2,5. \end{cases}$	$2x^2 + 8x + 8 = 0$ $x^2 + 4x + 4 = 0$ $x = -2$
2) Побудувати схематично графік відповідної квадратичної функції, відмітити точки його перетину з віссю Ox (за наявності) – зафарбованими для нестрогих нерівностей та виколотими для строгих.	$y = -2x^2 + 7x - 5$ 	$y = 2x^2 + 8x + 8$ 
3) Знайти на осі Ox проміжки, які відповідають потрібному розташуванню частини графіка.	$1 \leq x \leq 2,5$	$\begin{cases} x < -2, \\ x > -2 \end{cases}$
4) Записати відповідь.	Відповідь. $[1; 2,5]$.	Відповідь. $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

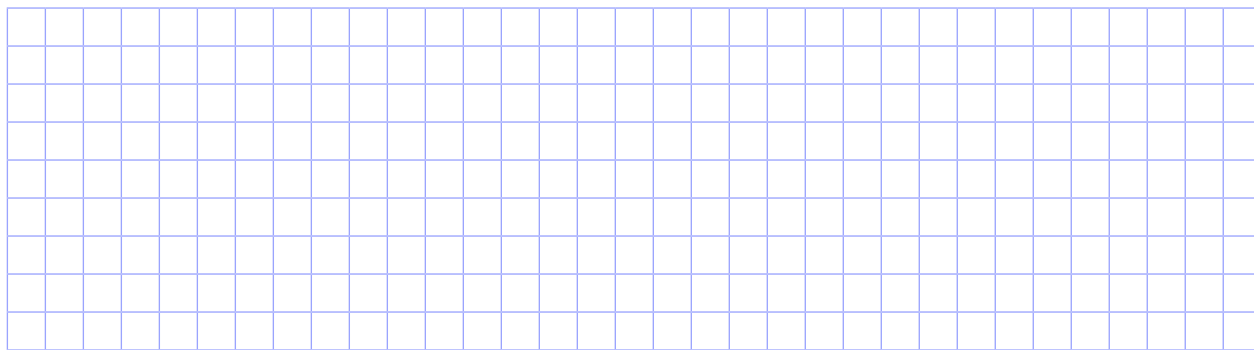
Приклад 2. Розв'яжіть нерівність $2x^2 + x + 7 \geq 0$.



V. Системи квадратичних нерівностей

Системи чи сукупності квадратичних нерівностей розв'язують аналогічно до ситуації з лінійними нерівностями. Треба розв'язати кожен нерівність окремо, а далі знайти перетин множин їхніх розв'язків для системи або об'єднання — для сукупності.

Приклад 3. Розв'яжіть систему квадратичних нерівностей $\begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0, \\ x^2 + x - 2 \geq 0. \end{cases}$



Висновок. Квадратичну нерівність з однією змінною нескладно розв'язати, якщо застосувати графік відповідної квадратичної функції. Так само, як і квадратні рівняння, квадратичні нерівності та системи таких нерівностей застосовуються і при розв'язанні суто алгебричних задач, і при розв'язанні практичних завдань з фізики, біології, економіки тощо. Отже, можна успішно використати свої знання для розв'язання як тренувальних завдань, так і практичних проблем.

VI. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Чисельність риби у ставку залежить від температури води T згідно з формулою: $N(T) = -2(T - t_0)^2 + N_0$, де параметри t_0 та N_0 означають відповідно оптимальну температуру у градусах Цельсія та кількість риби у ставку при оптимальній температурі. Знайдіть: а) для яких T чисельність риби у ставку впаде нижче від 60, за умови $t_0 = 20$, $N_0 = 100$; б) відсоток від N_0 , нижче якого не повинна зменшуватися чисельність риби при інтервалі температур у 8 градусів.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність:

а) $x^2 + 5x + 6 \geq 0$;

б) $-x^2 - 5x + 6 > 0$;

в) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$.

2. Розв'яжіть нерівність:

а) $2x^2 + 3x - 5 \leq 0$;

б) $-3x^2 + 7x + 10 < 0$;

в) $3x^2 - 12x + 12 < 0$.

3. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0, \\ x^2 - x - 6 \leq 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - 3x - 18 \leq 0, \\ x^2 > 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 7x^2 \leq 4x, \\ x^2 - 49 \leq 0. \end{cases}$

4. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 15}$;

б) $y = \frac{2x - 5}{\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}$;

в) $y = \sqrt{x^2 - 6x - 7} + \frac{1}{x - 8}$.

5. Тіло кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 20$ м/с. Його висота $h(t)$ в метрах через t секунд визначається формулою: $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, де $g = 10$ м/с² — прискорення вільного падіння. Впродовж якого часу тіло перебуватиме на висоті не менше від 15 метрів?
6. Підприємець виробляє та продає товар. Його прибуток (у тис. грн) від продажу x одиниць товару на день описується формулою: $R(x) = -2x^2 + 40x$, а витрати на виробництво та збут (у тис. грн) описуються формулою: $C(x) = 8x + 510$. При якій кількості виробленої та збутої продукції підприємство працює з чистим прибутком?

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність:
 а) $2x^2 + 13x + 21 \geq 0$; б) $-2x^2 + 12x - 18 < 0$; в) $3x^2 + 5x + 21 \geq 0$.
2. Знайдіть множину розв'язків нерівності:
 а) $5x^2 + 3x - 17 \leq 0$; б) $-3x^2 + 42x - 147 < 0$; в) $5x^2 + x + 2025 \leq 0$.
3. Розв'яжіть систему нерівностей:
 а) $\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0, \\ x^2 + x - 6 \leq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + 3x - 18 \leq 0, \\ |x| \leq 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7x^2 - 4x + 5 \geq 0, \\ -2x^2 + x - 49 \geq 0. \end{cases}$
4. Розв'яжіть сукупність нерівностей:
 а) $\begin{cases} 3x^2 - 7x + 4 < 0, \\ x^2 - 4 \leq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 6x - 27 > 0, \\ 4x^2 + 31x + 60 \leq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x^2 + 7x - 15 \leq 0, \\ 20x^2 - 23x - 21 < 0. \end{cases}$
5. Знайдіть:
 а) область допустимих значень виразу $\sqrt{60x - 25x^2 - 36}$; б) область визначення функції $y = \sqrt{3x + 4} - \frac{5x}{\sqrt{-2x^2 - 5x - 2}}$; в) множину розв'язків подвійної нерівності $x^2 - x \leq (2x - 1)^2 \leq x^2 + x + 2$.
6. Розв'яжіть нерівність:
 а) $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$; б) $x^4 - 2x^2 - 15 \geq 0$; в) $16x^4 - 24x^2 + 9 \leq 0$.
7. Знайдіть множину розв'язків нерівності в залежності від значень параметра a :
 а) $x^2 - ax + 3 \leq 0$; б) $ax^2 + 3x - 4 \geq 0$; в) $x^2 - 2ax + 2a^2 - 2a + 1 \leq 0$.
8. Знайдіть, при яких значеннях параметра a :
 а) нерівність $ax^2 + 4x + a + 3 \geq 0$ справджується при всіх дійсних x ;
 б) нерівність $ax^2 + 4ax + 5 \leq 0$ не має дійсних розв'язків;
 в) нерівність $9x^2 + 12ax + 5a^2 \leq 4a - 4$ має єдиний розв'язок?
9. В арифметичній прогресії перший член дорівнює 111, а різниця прогресії дорівнює -6 . Яку найменшу кількість членів цієї прогресії, починаючи з першого, треба взяти для того, щоб їхня сума була від'ємною?
10. У наведеній нижче програмі, написаній мовою програмування Python, програміст мав реалізувати загальну схему розв'язання квадратичних нерівностей, але зробив це неправильно. У чому полягають помилки? Як їх виправити?

```

import math

def solve_quadratic_inequality(a, b, c, sign):
    if a == 0:
        raise ValueError(«Це не квадратний вираз
            (a не може бути 0)»)

    D = b**2 - 4*a*c # дискримінант

    if D < 0:
        if (sign == '>=' or sign == '>'):
            if a > 0:
                return «Розв'язків немає» if sign == '>' else «Всі x»
            else:
                return «Всі x» if sign == '>' else «Розв'язків немає»
        else:
            if a > 0:
                return «Всі x» if sign == '<' else «Розв'язків немає»
            else:
                return «Розв'язків немає» if sign == '<' else «Всі x»
    else:
        x1 = (-b - math.sqrt(D)) / (2*a)
        x2 = (-b + math.sqrt(D)) / (2*a)
        x1, x2 = sorted([x1, x2]) # упорядкувати корені

        if sign == '>=':
            if a > 0:
                return f'x ≤ {x1:.2f} або x ≥ {x2:.2f}'
            else:
                return f'{x1:.2f} ≤ x ≤ {x2:.2f}'
        elif sign == '>':
            if a > 0:
                return f'x < {x1:.2f} або x > {x2:.2f}'
            else:
                return f'{x1:.2f} < x < {x2:.2f}'
        elif sign == '<=':
            if a > 0:
                return f'{x1:.2f} ≤ x ≤ {x2:.2f}'
            else:
                return f'x ≤ {x1:.2f} або x ≥ {x2:.2f}'
        elif sign == '<':
            if a > 0:
                return f'{x1:.2f} < x < {x2:.2f}'
            else:
                return f'x < {x1:.2f} або x > {x2:.2f}'
        else:
            return «Невідомий знак»

```

- 11.** Під час виверження вулкану один із каменів вилетів вертикально вгору з початковою швидкістю 80 м/с з висоти 300 м над рівнем моря (висота кратера). У зв'язку з небезпекою для туристичних гелікоптерів було визначено зону польоту не нижче ніж 600 м над рівнем моря. На яких проміжках часу після виверження камінь перебуватиме в цій зоні і становитиме небезпеку?
- 12.** Чисельність популяції мікробів на початку дослідження описується формулою $N(t) = -2t^2 + 16t + 50$, де t – час у годинах. Упродовж якого часу кількість мікробів у популяції становить не менш як 50% від максимальної їхньої чисельності?

Рівень С

- 1.** Графік квадратичної функції має певні властивості. Відповідно до них визначте:
- при яких значеннях x функція набуває значень не менших від 11, якщо відповідна парабола проходить через точки $(0; 6)$, $(2; 2)$ та $(3; 3)$;
 - при яких значеннях x функція набуває значень не більших за 5, якщо точка $M(-1; -7)$ є вершиною параболи, яка перетинає вісь ординат у точці $(0; -4)$;
 - при яких значеннях x функція набуває значень більших за 5, якщо парабола перетинає вісь Ox у точках з абсцисами 5 та 9 і має найвищу точку з ординатою 6.
- 2.** Розв'яжіть нерівність:
- $x^2 - 5|x| + 6 < 0$;
 - $7|x| - x^2 - 12 \leq 0$;
 - $x^2 - 2x + 1 < 2 \cdot |x - 1|$.
- 3.** Знайдіть усі значення параметра a , при яких:
- нерівність $3 - x - x^2 < a$ справджується при всіх дійсних значеннях x ;
 - множиною розв'язків нерівності $x^2 - (a^2 - 2a - 3)x + a^2 + 2 \leq 0$ є відрізок $[2; 3]$;
 - множиною розв'язків нерівності $x^2 + (a^2 - 7)x + a^2 + 2a + 6 > 0$ є $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$.
- 4.** Під час тренування легкоатлет кидає спис з висоти 2 метри під кутом 45° до горизонту з початковою швидкістю 20 м/с. У полі на відстані від 25 до 30 метрів від атлета стоїть рекламний щит, який має висоту 3 м. Чи гарантовано спис не зачепить рекламний щит? Уважайте $g = 10$ м/с². Опором повітря знехтуйте.
- 5.** Розгляньте таблицю відповідей до квадратичної нерівності при $a > 0$. Проаналізуйте, як отримана кожна з них. Запропонуйте спосіб, як можна скористатися цією ж таблицею, за умови $a < 0$. Розробіть блок-схему алгоритму розв'язування квадратичних нерівностей у загальному вигляді.

Знак D	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$
$D > 0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$D = 0$	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
$D < 0$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Знак D	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$D > 0$	$(x_1; x_2)$	$[x_1; x_2]$
$D = 0$	$\emptyset$	$x = x_1$
$D < 0$	$\emptyset$	$\emptyset$

6. Декілька факультетів університету вирішили провести змагання, поділивши витрати порівну. Перед змаганнями виявилось, що команди чотирьох факультетів знялися зі змагань. Тому іншим факультетам довелося додатково внести по 4 тис. гривень. Знайдіть загальний обсяг витрат S тис. грн, якщо $20 < S < 30$.

Рефлексія

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
.....
.....
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
.....
.....
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
.....
.....
- 4) Найскладнішим для мене було
.....
.....
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
.....
.....
- 6) Найбільше мені сподобалося
.....
.....

Можливі теми проєктів

1. Квадратичні нерівності та їхні системи, що містять параметр.
2. Застосування квадратичних нерівностей в економіці.
3. Застосування квадратичних нерівностей у фізиці.
4. Узагальніть задачі 9, 11, 12 рівня В.
5. Узагальніть задачу 4 рівня С. Створіть комп'ютерну програму для візуалізації описаної ситуації та унаочнення відповіді.

