

10

Тема 8. Нерівності

Урок 4. Метод інтервалів та його застосування

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте базову схему розв'язання нерівностей з однією змінною методом інтервалів;
- 2) повторите застосування методу інтервалів для розв'язування різних нерівностей та їхніх систем;
- 3) повторите розв'язування квадратичних нерівностей та їхнє застосування як елемент синтетичного розв'язання більш складних нерівностей;
- 4) зможете використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач з алгебри, фізики, інформатики тощо.

II. Схема методу інтервалів

Часто при розв'язанні тих чи інших задач з'являється необхідність звернутися до нерівностей, що не обов'язково є лінійними чи квадратичними. У таких випадках варто скористатися загальним методом розв'язування нерівностей, що отримав назву «метод інтервалів».

Етапи розв'язання	Приклад $\frac{x^2 + 2x + 1}{(x - 1)(2x - 3)} \leq 0$.
1. Зведіть нерівність до вигляду, коли ліва частина розкладена на множники, а правою частиною є число нуль. У випадку дробово-раціонального виразу треба перетворити ліву частину на дріб, чисельник та знаменник якого розкладені на множники.	$\frac{(x + 1)^2}{(x - 1)(2x - 3)} \leq 0$.

V. Розв'язання практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Бітова швидкість, або бітрейт, — це швидкість проходження бітів інформації за секунду. Бітову швидкість прийнято використовувати для вимірювання ефективної швидкості передачі інформації по каналу, тобто швидкості передачі «корисної інформації». Зокрема для музичних файлів чим вищий бітрейт, тим краща якість, але розмір файлу при цьому стає більшим. При стисканні таких файлів якість звучання описується формулою $Q(b) = \frac{kb}{b^2 - c}$, де b — бітрейт у кбіт/с. Тут k — коефіцієнт, що показує швидкість зростання якості при збільшенні бітрейта, а рівень c відповідає порогу втрати якості. За умови $k = 247$, $c = 13689$, треба знайти можливі значення бітрейта, при яких рівень якості буде не менший від 10.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

а) $(x-2)(x-5) \geq 0$; б) $\frac{2-x}{x-3} \leq 0$; в) $-2(x+5)(x-7) \geq 0$.

2. Розв'яжіть нерівність:

а) $(1-x)(2x+4)(3x-12) \leq 0$; б) $\frac{(2x+3)(3x-2)}{4-x} \leq 0$;
в) $\frac{(x-5)^2(x+2)}{5-x} < 0$.

3. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} (x-6)(x+4) \geq 0, \\ x^2 - 9 \leq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x+5}{5x-2} \leq 0, \\ x^2 > 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 \leq 4x, \\ \frac{x^2-49}{x} \leq 0. \end{cases}$

4. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{x(x^2-4)}$; б) $y = \frac{2x-5}{\sqrt{x^3-9x}}$; в) $y = \sqrt{\frac{x+9}{x-7}} + \frac{1}{x-8}$.

5. Розв'яжіть нерівність:

а) $\frac{1}{x} \leq 2$; б) $\frac{2}{x-1} > \frac{3}{x+1}$; в) $\frac{x^2-5x-6}{x+3} \leq 0$.

6. Довжина прямокутника на 3 см більша за ширину. Якої довжини має бути прямокутник для того, щоб його площа була меншою від 28 см²?

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

а) $(x-2)(x-5)^2 \geq 0$; б) $\frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} \leq 0$; в) $-2(2x+5)^3 \left(\frac{x}{2} - 7 \right)^4 < 0$.

2. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

а) $(1-x)(2x+4)^2(3x^2+5x-8) > 0$; б) $\frac{2x^2+3x-5}{3x^2+x-2} \leq 0$;

в) $\frac{2x^3-x^4+3x^2}{x^2+x+6} \geq 0$.

3. Розв'яжіть нерівність:

а) $3-x \geq \frac{1}{2-x}$; б) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x+2}$; в) $\frac{5-4x}{3x^2-x-4} < 4$.

4. Розв'яжіть нерівність:

а) $\frac{2x^2+3x+4}{(x-1)^2 \cdot (2x+5)^3} \leq 0$; б) $\frac{2x-5-3x^2}{x-1} \geq \frac{2x-5-3x^2}{(x+2)(1-x)}$;

в) $\frac{5-4x}{3x^2-x+4} < 4$.

5. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} x^2-14x+45 < 0, \\ x^2-11x+30 > 0, \\ \frac{2x-3}{x^2-x+2} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2-x}{x+1} \geq 1, \\ \frac{2-x}{x+1} \leq 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2(x-1)-3(x-4) > x+5, \\ \frac{3x-4}{x^2+4x+4} \geq 0. \end{cases}$

6. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

а) $\begin{cases} x^2+16x+15 \geq 0, \\ \frac{2x-1}{x+1} \geq 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 9x^2-4x-5 < 0; \\ \frac{5x-2}{3-2x} \leq 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{3}{3-2x-x^2} \leq 1; \\ 11x-x^2 > 28. \end{cases}$

7. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{20-x-x^2} + \frac{x-2}{\sqrt{x+5}}$; б) $y = \sqrt{(x-2)^3 \cdot (x+1)^4} - \frac{5x}{\sqrt{-2x^2-5x-2}}$;

в) $\sqrt{\frac{x^2+x+2}{(x-1)(5-3x)}}$.

8. Розв'яжіть нерівність:

а) $\frac{x^2-13|x|+36}{x-1} \leq 0$; б) $\frac{|x-4| \cdot (x-5)}{2x^2+5x-7} \geq 0$; в) $\frac{(x-5)^3 \cdot (x^2+8x+7)^4}{|2x-9|} \leq 0$.

9. Знайдіть множину розв'язків нерівності в залежності від значень параметра a :

а) $\frac{x(x-a)}{x+3} \leq 0$; б) $\frac{x(x-3)}{x-a} \geq 0$; в) $\frac{x^2-(a-3)x-3a}{x^2-4} \leq 0$.

10. Розв'яжіть нерівність:

а) $(x+1)(x-4)\sqrt{16-x^2} \geq 0$; б) $\frac{(x-4)\sqrt{x^2+x-2}}{x+5} \leq 0$; в) $\frac{2x^2+3x-5}{\sqrt{x^2-5x+4}} \leq 0$.

11. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

а) $x^3+x^2-4x-4 > 0$; б) $x^4+2x^3-x-2 \leq 0$; в) $x^3+3x^2-6x-8 \geq 0$.

12. Планер має пролетіти 60 км за напрямком вітру і повернутися назад не пізніше ніж за 5 годин. При якій швидкості вітру це можливо, якщо власна швидкість планера 25 км/год?

- 13.** Наведена нижче програма, написана III мовою програмування Pascal, має розв'язувати нерівність $\frac{x-a}{x-b} \geq 0$. На жаль, програма містить багато помилок. У чому вони полягають? Як їх виправити?

```
program NerivnistRationalna;

uses crt;

var
    a, b: real;

begin
    clrscr;
    writeln('Розв'язання нерівності (x - a)/(x - b) >= 0');
    write('Введіть a: '); readln(a);
    write('Введіть b: '); readln(b);

    if a = b then
    begin
        writeln('Нерівність не має змісту: знаменник стає нульовим
        при x = ', b:0:2);
    end
    else if a > b then
    begin
        writeln('Розв'язком є: x <= ', b:0:2, ' або x >= ', a:0:2);
    end
    else (* a < b *)
    begin
        writeln('Розв'язком є: ', a:0:2, ' <= x < ', b:0:2);
    end;

    readln;
end.
```

- 14.** Ширина прямокутного паралелепіпеда на 5 см менша від висоти, а довжина на 4 см більша за висоту. При яких значеннях довжини паралелепіпед має об'єм не менший від 154 см^3 ? Розв'яжіть задачу двома способами: 1) з використанням методу інтервалів для розв'язування нерівностей; 2) використовуючи монотонність функції $y(x) = x(x - 5)(x + 4)$ при $x > 5$.

Рівень С

1. Розв'яжіть нерівність:

а) $\frac{x^2 - 8x + 15}{(x^2 - 6x + 5)^2 \cdot (3x^2 - 5x + 2)} \leq 0$; б) $\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \right| \leq 1$;

в) $\frac{|x + 3| + x}{x + 2} \geq 1$.

2. Розв'яжіть нерівність у залежності від значень параметра a :

а) $|x - a| \cdot (5x^2 - 2x - 3) < 0$; б) $\frac{|x - a|}{5x^2 + x - 6} \leq 0$;

в) $|x - 1| \cdot (x^2 - (a + 3)x + 3a) \leq 0$.

3. Знайдіть усі значення параметра a , при яких нерівність виконується за будь-яких значень змінної x :

а) $\frac{x^2 - 8x + 20}{ax^2 + 2(a + 1)x + 9a + 4} < 0$; б) $\frac{x^2 + ax - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$;

в) $\frac{x^2 - ax - 2}{x^2 - 3x - 4} > -1$.

4. При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння $a^2x^2 + ax - 2 = 0$ має модуль менший від 1, а другий — більший за 1? Доведіть, що задача рівносильна наступній: знайти значення a , при яких функція $y = a^2x^2 + ax - 2$ набуває різних за знаком значень на кінцях проміжку $[-1; 1]$. Розв'яжіть відповідну нерівність $y(1) \cdot y(-1) < 0$, використовуючи метод інтервалів.

5. Цілою частиною дійсного числа x називають найбільше ціле число $[x]$, що не перевищує числа x . Дробовою частиною $\{x\}$ числа x називають $x - [x]$. Обґрунтуйте, що $0 \leq \{x\} < 1$ та знайдіть обидва корені рівняння $\{x\} = \frac{[x] - 5}{1 - [x]}$.

6. Рівняння Менделєєва-Клапейрона, що описує стан ідеального газу, має вигляд: $pV = \nu RT$. Ван-дер-Ваальс створив більш точне рівняння $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \nu RT$

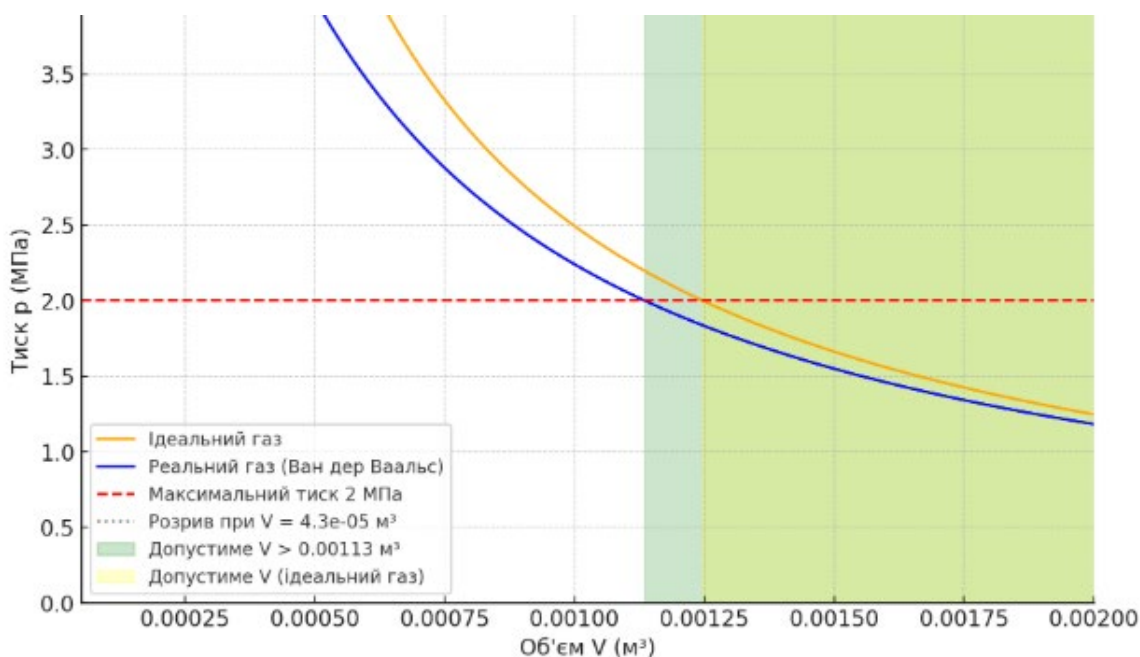
для реального газу і був у 1910 році нагороджений Нобелівською премією з фізики. У цих формулах p — тиск, V — об'єм газу, n — кількість речовини у молях, $R = 8,314$ Дж/моль·К — універсальна газова стала, T — термодинамічна температура. Для одного моля вуглекислого газу (CO_2), за температури $T = 300$ К, потрібно визначити, при яких об'ємах тиск не перевищує 2 МПа.

а) Розв'яжіть задачу, використовуючи рівняння для ідеального газу.

б) Розв'яжіть задачу для реального газу (CO_2) при $a = 0,364$ Па · м⁶ · моль⁻², $b = 4,27 \cdot 10^{-5}$ м³ · моль⁻¹. При використанні методу інтервалів скористайтеся програмним середовищем wolframalpha.com для отримання нулів лівої частини нерівності.

в) Порівняйте отримані результати. Чи відповідають вони наведеному нижче графіку? Зробіть висновки.

Графік тиску CO_2 — ідеальний та реальний гази



Рефлексія

- Я розумію схему розв'язування нерівностей методом інтервалів.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я вмію використовувати метод інтервалів для розв'язування нескладних нерівностей.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я вмію застосовувати метод інтервалів для розв'язування нерівностей, що містять множники в різних степенях, знак модуля, квадратного кореня.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я розумію ідею застосування методу інтервалів для знаходження області визначення функції.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я вмію розв'язувати системи нерівностей методом інтервалів у нескладних випадках.
Так Ще треба потренуватися Ні
- Я розумію, як використовувати вивчену тему при розв'язуванні задач практичного змісту.
Так Ще треба потренуватися Ні

Можливі теми проєктів

1. Нерівності та їхні системи, що містять параметр.
2. Застосування нерівностей в економіці.
3. Застосування нерівностей у фізиці.
4. Розташування коренів квадратного тричлена відносно даних чисел.
5. Узагальніть задачу 6 рівня С. Створіть комп'ютерну програму для візуалізації описаної ситуації та унаочнення відповіді.

