

10

Тема 8. Нерівності

Урок 4. Метод інтервалів та його застосування

Тип уроку: урок повторення та систематизації знань.

План уроку

1. Схема методу інтервалів.
2. Застосування методу інтервалів.
3. Синтетичні методи розв'язування нерівностей на основі методу інтервалів.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

сприймає інформацію математичного змісту в декількох формах [12 МАО 2.1.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

досліджує специфічну проблемну ситуацію, використовуючи різноманітні інформаційні джерела [12 МАО 1.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Запропонуйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово з поясненням матеріалу.
- 2) Сформулюйте практичну задачу, розв'язати яку надайте можливість учням/ученицям наприкінці уроку.
- 3) Теорію подавайте стисло, акцентуйте увагу (коли можливо) на її практичному застосуванні.
- 4) До кожної частини уроку наведено кілька ілюстративних прикладів. Обирайте ілюстративні приклади на свій розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Обов'язково сплануйте виконання останніх блоків уроку, а саме: розв'язування практичної задачі та тренувальних вправ як важливі компоненти формування практичних навиків і навчання учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

7) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) За яким алгоритмом можна розв'язати будь-яку лінійну нерівність із однією змінною?
- 2) Як можна застосувати графік квадратичної функції для розв'язання нерівностей?
- 3) Чи будь-який квадратний тричлен можна розкласти на лінійні множники?
- 4) Яка формула для розкладання квадратного тричлена на множники?
- 5) Як знайти ОДЗ дробово-раціонального виразу?

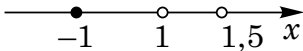
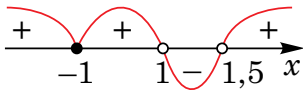
Як я вирішую певну проблему?

Задача. Бітова швидкість, або бітрейт, — це швидкість проходження бітів інформації за секунду. Бітову швидкість прийнято використовувати для вимірювання ефективної швидкості передачі інформації по каналу, тобто швидкості передачі «корисної інформації». Зокрема для музичних файлів чим вищий бітрейт, тим краща якість, але розмір файлу при цьому стає більшим. При стисканні таких файлів якість звучання описується формулою $Q(b) = \frac{kb}{b^2 - c}$, де b — бітрейт у кбіт/с. Тут k — коефіцієнт, що показує швидкість зростання якості при збільшенні бітрейта, а рівень c відповідає порогу втрати якості. За умови $k = 247$, $c = 13689$, треба знайти можливі значення бітрейта, при яких рівень якості буде не менший від 10.

II. Схема методу інтервалів

Часто при розв'язанні тих чи інших задач з'являється необхідність звернутися до нерівностей, що не обов'язково є лінійними чи квадратичними. У таких випадках варто скористатися загальним методом розв'язування нерівностей, що отримав назву «метод інтервалів».

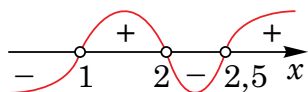
Етапи розв'язання	Приклад $\frac{x^2 + 2x + 1}{(x - 1)(2x - 3)} \leq 0$.
1. Зведіть нерівність до вигляду, коли ліва частина розкладена на множники, а правою частиною є число нуль. У випадку дробово-раціонального виразу треба перетворити ліву частину на дріб, чисельник та знаменник якого розкладені на множники.	$\frac{(x + 1)^2}{(x - 1)(2x - 3)} \leq 0$.

Етапи розв'язання	Приклад $\frac{x^2 + 2x + 1}{(x-1)(2x-3)} \leq 0.$
2. Позначте на числовій прямій точки, що відповідають значенням змінної, за яких ліва частина нерівності перетворюється на нуль (жирними точками для нестрогої нерівності та проколотими – для строгої). Позначте проколотими точками значення аргументу, що не входять до ОДЗ (за наявності).	
3. Визначте знак кожного множника і всієї лівої частини нерівності на одному з утворених інтервалів.	При $x > 1,5$ кожний множник чисельника та знаменника є додатним. Отже, на проміжку $(1,5; +\infty)$ ліва частина нерівності набуває тільки додатних значень.
4. Визначте знак лівої частини нерівності на кожному інтервалі, враховуючи степінь кожного лінійного множника. При «переході» через точку, що відповідає лінійному множнику в непарному степені, знак змінюється. При «переході» через точку, що відповідає лінійному множнику в парному степені, знак не змінюється.	
5. Запишіть у відповідь проміжки, на яких ліва частина нерівності має потрібний знак. Урахуйте, що жирні точки також входять до остаточної відповіді, а виколоті – ні.	Відповідь. $(1; 1,5) \cup \{-1\}$.

Ілюстративні приклади

1. Розв'яжіть методом інтервалів нерівність $(x-1)(x-2)(2x-5) > 0$.

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння $(x-1)(x-2)(2x-5) = 0$ і отримаємо $x = 1$, $x = 2$, $x = 2,5$. Позначимо відповідні точки на числовій прямій. Вони будуть проколотими, оскільки нерівність є строгою. При $x > 2,5$ усі множники є додатними, тож, додатним буде і їхній добуток. Оскільки всі лінійні множники лівої частини нерівності є в непарному степені 1, то при переході через усі позначені точки знак лівої частини буде змінюватися.



Відповідь. $(1; 2) \cup (2,5; +\infty)$.

2. Розв'яжіть нерівність $\frac{(2x^2 + x - 3)(x-1)}{x^2 - 6x + 8} \geq 0$.

Розв'язання. Розкладемо квадратні тричлени у чисельнику та знаменнику дробу на лінійні множники.

$$2x^2 + x - 3 = 0; x_1 = 1; x_2 = -1,5; 2x^2 + x - 3 = 2(x-1)(x+1,5).$$

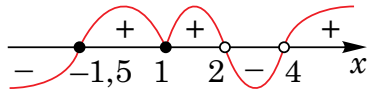
Аналогічно, $x^2 - 6x + 8 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$.

Тепер перетворимо ліву частину даної нерівності:

$$\frac{(2x^2 + x - 3)(x - 1)}{x^2 - 6x + 8} = \frac{2(x - 1)(x + 1,5)(x - 1)}{(x - 2)(x - 4)} = \frac{2(x - 1)^2(x + 1,5)}{(x - 2)(x - 4)}.$$

Розв'яжемо нерівність $\frac{2(x - 1)^2(x + 1,5)}{(x - 2)(x - 4)} \geq 0$. Позначимо на числовій прямій точки,

що відповідають нулям чисельника та знаменника: 1; -1,5; 2 та 4. Нулі чисельника позначимо жирними точками (нерівність – нестрога), а нулі знаменника – проколотими, адже вони не входять в ОДЗ. При $x > 4$ всі множники чисельника та знаменника є додатними, отже, дріб набуває на відповідному проміжку лише додатних значень. Якщо лінійні множники лівої частини нерівності є в непарному степені 1, то при переході через усі відповідні точки знак дробу буде змінюватися. Оскільки множник $x - 1$ у парному степені 2, то при переході через точку 1 знак дробу не зміниться.



Відповідь. $[-1,5; 2) \cup (4; +\infty)$.

III. Застосування методу інтервалів

При розв'язуванні більш складних нерівностей варто перенести всі доданки в один бік (в ліву частину нерівності) та врахувати ОДЗ всіх дробів, коренів і т. ін.

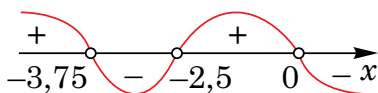
Ілюстративні приклади

3. Розв'яжіть нерівність: $\frac{2}{2x + 5} < \frac{3}{x}$.

Розв'язання. Виконаємо рівносильні перетворення:

$$\frac{2}{2x + 5} < \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{2x + 5} - \frac{3}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 3(2x + 5)}{(2x + 5)x} < 0 \Leftrightarrow \frac{-4x - 15}{(2x + 5)x} < 0.$$

Позначимо на числовій прямій точки, що відповідають нулям чисельника та знаменника: 0; -2,5; $-\frac{15}{4}$. Нулі чисельника позначимо проколотими точками (нерівність — строга), нулі знаменника – також проколотими, адже вони не входять в ОДЗ. При $x > 0$ всі множники знаменника є додатними, а чисельник – від'ємний, отже, дріб набуває на відповідному проміжку лише від'ємних значень. Оскільки всі лінійні множники лівої частини нерівності є в непарному степені 1, то при переході через усі позначені точки знак лівої частини буде змінюватися.

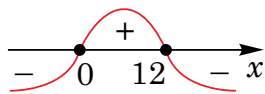


Відповідь. $(-3,75; -2,5) \cup (0; +\infty)$.

4. Знайдіть найбільше ціле число, що задовольняє нерівність

$$(x-3)(x-13)\sqrt{12x-x^2} > 0.$$

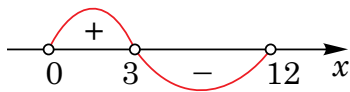
Розв'язання. Знайдемо ОДЗ, а для цього розв'яжемо відповідну нерівність методом інтервалів: $12x - x^2 \geq 0$; $x(12-x) \geq 0$.



Будемо тепер розв'язувати дану в умові нерівність на множині $[0; 12]$.

Розв'яжемо рівняння $(x-3)(x-13)\sqrt{12x-x^2} = 0$ і отримаємо $x = 3$, $x = 0$, $x = 12$, $x = 13$.

Позначимо відповідні точки на числовій прямій. Вони будуть проколотими, оскільки нерівність є строгою. При $x \in (0; 3)$ перші два множники є від'ємними, а третій – додатним, отже, додатним буде і їхній добуток. Оскільки множник $x - 3$ в непарному степені 1, то при переході через 3 знак лівої частини зміниться.



Таким чином, нерівність задовольняють числа на інтервалі $(0; 3)$, з яких найбільшим цілим числом є 2.

Відповідь. 2.

IV. Синтетичні методи розв'язування нерівностей на основі методу інтервалів

Метод інтервалів можна ефективно поєднувати з іншими методами розв'язування нерівностей. Зокрема використовувати графічний метод для розв'язання квадратичних нерівностей у поєднанні з методом інтервалів для неквадратичних нерівностей.

Ілюстративні приклади

5. Розв'яжіть нерівність $\frac{(2x^2 + x + 3)(x-1)}{(2+x)(2x-x^2+8)} \geq 0$.

Розв'язання. Розглянемо спочатку квадратний тричлен $2x^2 + x + 3$. Оскільки його перший коефіцієнт 2 є додатним числом, а дискримінант $D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -23$ від'ємний, то парабола – графік квадратичної функції $y = 2x^2 + x + 3$ — розташована над віссю абсцис. Отже, квадратний тричлен $2x^2 + x + 3$ набуває лише додатних значень при будь-яких значеннях змінної x .

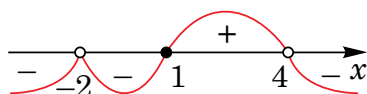
Розкладемо тепер квадратний тричлен у знаменнику дробу на лінійні множники. $-x^2 + 2x + 8 = 0$; $x_1 = -2$; $x_2 = 4$; $-x^2 + 2x + 8 = -(x+2)(x-4)$.

Виконаємо рівносильні перетворення даної в умові нерівності:

$$\frac{(2x^2 + x + 3)(x-1)}{(2+x)(2x-x^2+8)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x^2 + x + 3)(x-1)}{(2+x) \cdot (-(x+2)(x-4))} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x^2 + x + 3)(x-1)}{-(2+x)^2 \cdot (x-4)} \geq 0.$$

Позначимо на числовій прямій точки, що відповідають нулям чисельника та знаменника: 1; -2; 4. Нулі чисельника позначимо жирними точками (нерівність —

нестрога), а нулі знаменника — проколотими, адже вони не входять в ОДЗ. При $x > 4$ чисельник набуває додатних значень, а знаменник — від'ємних, отже, дріб набуває на відповідному проміжку лише від'ємних значень. Якщо лінійні множники лівої частини нерівності є в непарному степені 1, то при переході через усі відповідні точки знак дробу буде змінюватися. Оскільки множник $2 + x$ є у парному степені 2, то при переході через точку -2 знак дробу не зміниться. Також врахуємо, що перший множник чисельника завжди більший за 0.

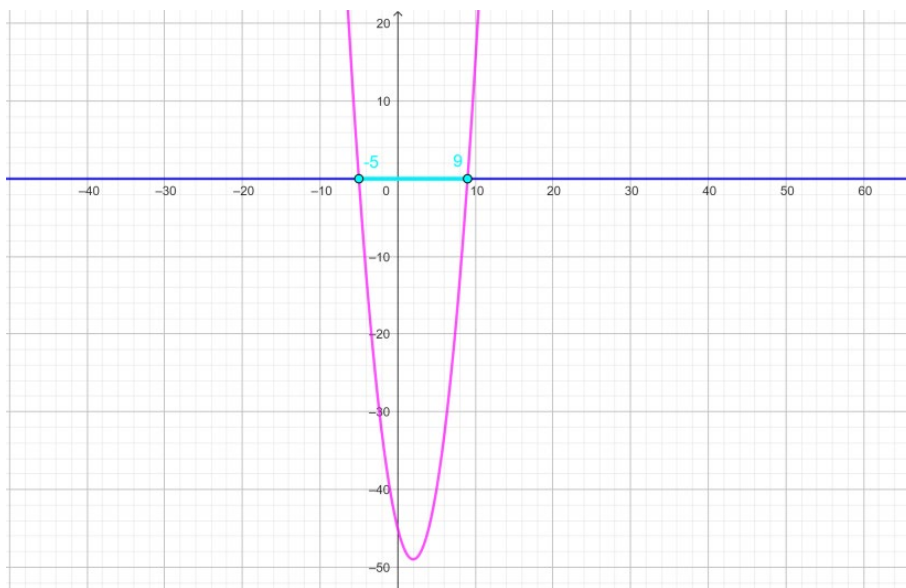


Відповідь. $[1; 4)$.

6. Розв'яжіть систему нерівностей
$$\begin{cases} x^2 - 4x - 45 \leq 0, \\ \frac{2x - 3}{x^2 - x - 2} > 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку квадратичну нерівність системи графічним методом: $x^2 - 4x - 45 = 0$, звідси $x_1 = -5$, $x_2 = 9$.

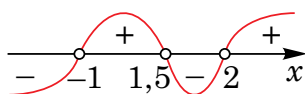
Будуємо схематичний графік квадратичної функції $y = x^2 - 4x - 45$. Відмічаємо на осі Ox проміжок, на якому дана функція набуває недодатних значень.



Отримуємо, що множиною розв'язків першої нерівності системи є $[-5; 9]$.

Розв'яжемо тепер другу нерівність системи методом інтервалів.

$$\frac{2x - 3}{x^2 - x - 2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 3}{(x + 1)(x - 2)} > 0.$$



Отримуємо, що множиною розв'язків другої нерівності системи є $(-1; 1,5) \cup (2; +\infty)$.

Знайдемо перетин множин розв'язків першої та другої нерівностей.



Відповідь. $(-1; 1,5) \cup (2; 9)$.

Висновок. Метод інтервалів є загальним методом розв'язування нерівностей. Особливо ефективним він є в ситуації, коли вдається нерівність звести до вигляду, в якому ліва частина розкладена на множники, а права дорівнює нулю. У поєднанні з графічним методом розв'язування квадратичних нерівностей метод інтервалів є ефективним інструментом для дослідження нерівностей різного типу. При подальшому вивченні алгебри та початків аналізу неодноразово доведеться користуватися методом інтервалів.

V. Розв'язання практичної задачі. Групова активність

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Бітова швидкість, або бітрейт, — це швидкість проходження бітів інформації за секунду. Бітову швидкість прийнято використовувати для вимірювання ефективної швидкості передачі інформації по каналу, тобто швидкості передачі «корисної інформації». Зокрема для музичних файлів чим вищий бітрейт, тим краща якість, але розмір файлу при цьому стає більшим. При стисканні таких файлів якість звучання описується формулою $Q(b) = \frac{kb}{b^2 - c}$, де b — бітрейт у кбіт/с. Тут k — коефіцієнт, що показує швидкість зростання якості при збільшенні бітрейта, а рівень c відповідає порогу втрати якості. За умови $k = 247$, $c = 13689$, треба знайти можливі значення бітрейта, при яких рівень якості буде не менший від 10.

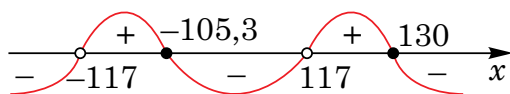
Розв'язання. Відповідно до умови задачі, розглянемо нерівність:

$$Q(b) = \frac{247b}{b^2 - 13689} \geq 10.$$

Виконаємо рівносильні перетворення:

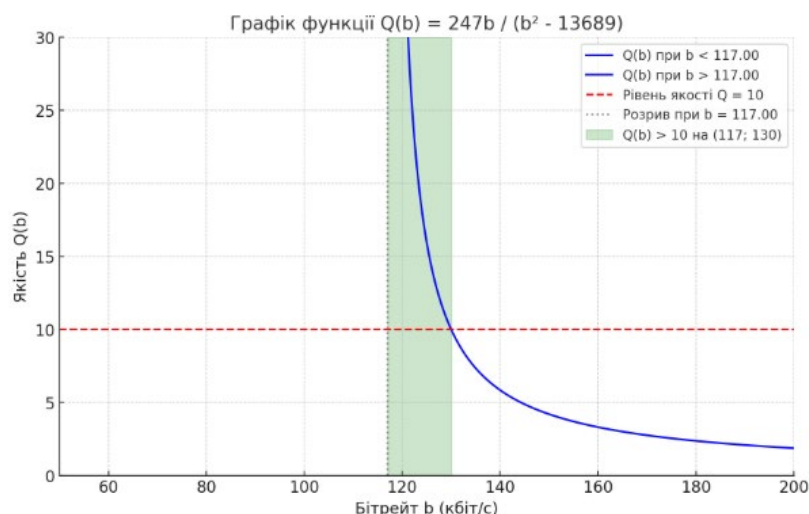
$$\frac{247b}{b^2 - 13689} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{247b - 10b^2 + 136890}{b^2 - 13689} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-10(b - 130)(b + 105,3)}{(b - 117)(b + 117)} \geq 0.$$

Розв'яжемо отриману нерівність методом інтервалів відповідно до рисунка нижче.



Таким чином, відповіддю до нерівності буде об'єднання проміжків $(-117; -105,3] \cup (117; 130]$.

Ураховуючи, що бітова швидкість має бути додатною, отримаємо множину можливих значень бітрейта $(117; 130]$. Наочно отриману відповідь можна побачити на графіку нижче.



Зауважимо, що при заданих параметрах відносно високу якість стиснутого файлу можна отримати лише для випадку не занадто високої якості вихідного музичного файлу. Так, бітрейт 128 кбіт/с відповідає середній якості файлів, наприклад, у форматі MP3. Отже, при заданих параметрах стискання можна отримати непогану відносну якість лише для вихідних файлів середньої якості, наприклад, 128 кбіт/с. Для більш якісних музичних файлів треба застосувати інші параметри стискання для отримання високої відносної якості стиснутого файлу.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

а) $(x-2)(x-5) \geq 0$; б) $\frac{2-x}{x-3} \leq 0$; в) $-2(x+5)(x-7) \geq 0$.

2. Розв'яжіть нерівність:

а) $(1-x)(2x+4)(3x-12) \leq 0$; б) $\frac{(2x+3)(3x-2)}{4-x} \leq 0$;

в) $\frac{(x-5)^2(x+2)}{5-x} < 0$.

3. Розв'яжіть систему нерівностей:

а) $\begin{cases} (x-6)(x+4) \geq 0, \\ x^2 - 9 \leq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x+5}{5x-2} \leq 0, \\ x^2 > 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 \leq 4x, \\ \frac{x^2-49}{x} \leq 0. \end{cases}$

4. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \sqrt{x(x^2-4)}$; б) $y = \frac{2x-5}{\sqrt{x^3-9x}}$; в) $y = \sqrt{\frac{x+9}{x-7}} + \frac{1}{x-8}$.

5. Розв'яжіть нерівність:

а) $\frac{1}{x} \leq 2$; б) $\frac{2}{x-1} > \frac{3}{x+1}$; в) $\frac{x^2-5x-6}{x+3} \leq 0$.

6. Довжина прямокутника на 3 см більша за ширину. Якої довжини має бути прямокутник для того, щоб його площа була меншою від 28 см^2 ?

Рівень В

1. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

$$\text{а) } (x-2)(x-5)^2 \geq 0; \quad \text{б) } \frac{(2-x)^3}{(x-3)^2} \leq 0; \quad \text{в) } -2(2x+5)^3 \left(\frac{x}{2} - 7 \right)^4 < 0.$$

2. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

$$\text{а) } (1-x)(2x+4)^2(3x^2+5x-8) > 0; \quad \text{б) } \frac{2x^2+3x-5}{3x^2+x-2} \leq 0;$$

$$\text{в) } \frac{2x^3-x^4+3x^2}{x^2+x+6} \geq 0.$$

3. Розв'яжіть нерівність:

$$\text{а) } 3-x \geq \frac{1}{2-x}; \quad \text{б) } \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x+2}; \quad \text{в) } \frac{5-4x}{3x^2-x-4} < 4.$$

4. Розв'яжіть нерівність:

$$\text{а) } \frac{2x^2+3x+4}{(x-1)^2 \cdot (2x+5)^3} \leq 0; \quad \text{б) } \frac{2x-5-3x^2}{x-1} \geq \frac{2x-5-3x^2}{(x+2)(1-x)};$$

$$\text{в) } \frac{5-4x}{3x^2-x+4} < 4.$$

5. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2-14x+45 < 0, \\ x^2-11x+30 > 0, \\ \frac{2x-3}{x^2-x+2} > 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{2-x}{x+1} \geq 1, \\ \frac{2-x}{x+1} \leq 2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2(x-1)-3(x-4) > x+5, \\ \frac{3x-4}{x^2+4x+4} \geq 0. \end{cases}$$

6. Розв'яжіть сукупність нерівностей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2+16x+15 \geq 0, \\ \frac{2x-1}{x+1} \geq 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 9x^2-4x-5 < 0; \\ \frac{5x-2}{3-2x} \leq 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \frac{3}{3-2x-x^2} \leq 1; \\ 11x-x^2 > 28. \end{cases}$$

7. Знайдіть область визначення функції:

$$\text{а) } y = \sqrt{20-x-x^2} + \frac{x-2}{\sqrt{x+5}}; \quad \text{б) } y = \sqrt{(x-2)^3 \cdot (x+1)^4} - \frac{5x}{\sqrt{-2x^2-5x-2}};$$

$$\text{в) } \sqrt{\frac{x^2+x+2}{(x-1)(5-3x)}}.$$

8. Розв'яжіть нерівність:

$$\text{а) } \frac{x^2-13|x|+36}{x-1} \leq 0; \quad \text{б) } \frac{|x-4| \cdot (x-5)}{2x^2+5x-7} \geq 0; \quad \text{в) } \frac{(x-5)^3 \cdot (x^2+8x+7)^4}{|2x-9|} \leq 0.$$

9. Знайдіть множину розв'язків нерівності в залежності від значень параметра a :

$$\text{а) } \frac{x(x-a)}{x+3} \leq 0; \quad \text{б) } \frac{x(x-3)}{x-a} \geq 0; \quad \text{в) } \frac{x^2-(a-3)x-3a}{x^2-4} \leq 0.$$

10. Розв'яжіть нерівність:

а) $(x+1)(x-4)\sqrt{16-x^2} \geq 0$; б) $\frac{(x-4)\sqrt{x^2+x-2}}{x+5} \leq 0$; в) $\frac{2x^2+3x-5}{\sqrt{x^2-5x+4}} \leq 0$.

11. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

а) $x^3 + x^2 - 4x - 4 > 0$; б) $x^4 + 2x^3 - x - 2 \leq 0$; в) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \geq 0$.

12. Планер має пролетіти 60 км за напрямком вітру і повернутися назад не пізніше ніж за 5 годин. При якій швидкості вітру це можливо, якщо власна швидкість планера 25 км/год?

13. Наведена нижче програма, написана III мовою програмування Pascal, має розв'язувати нерівність $\frac{x-a}{x-b} \geq 0$. На жаль, програма містить багато помилок. У чому вони полягають? Як їх виправити?

```
program NerivnistRationalna;

uses crt;

var
    a, b: real;

begin
    clrscr;
    writeln('Розв'язання нерівності (x - a)/(x - b) >= 0');
    write('Введіть a: '); readln(a);
    write('Введіть b: '); readln(b);

    if a = b then
    begin
        writeln('Нерівність не має змісту: знаменник стає нульовим
        при x = ', b:0:2);
    end
    else if a > b then
    begin
        writeln('Розв'язком є: x <= ', b:0:2, ' або x >= ', a:0:2);
    end
    else (* a < b *)
    begin
        writeln('Розв'язком є: ', a:0:2, ' <= x < ', b:0:2);
    end;

    readln;
end.
```

- 14.** Ширина прямокутного паралелепіпеда на 5 см менша від висоти, а довжина на 4 см більша за висоту. При яких значеннях довжини паралелепіпед має об'єм не менший від 154 см^3 ? Розв'яжіть задачу двома способами: 1) з використанням методу інтервалів для розв'язування нерівностей; 2) використовуючи монотонність функції $y(x) = x(x-5)(x+4)$ при $x > 5$.

Рівень С

- 1.** Розв'яжіть нерівність:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{x^2 - 8x + 15}{(x^2 - 6x + 5)^2 \cdot (3x^2 - 5x + 2)} &\leq 0; & \text{б) } \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \right| &\leq 1; \\ \text{в) } \frac{|x+3| + x}{x+2} &\geq 1. \end{aligned}$$

- 2.** Розв'яжіть нерівність у залежності від значень параметра a :

$$\begin{aligned} \text{а) } |x-a| \cdot (5x^2 - 2x - 3) &< 0; & \text{б) } \frac{|x-a|}{5x^2 + x - 6} &\leq 0; \\ \text{в) } |x-1| \cdot (x^2 - (a+3)x + 3a) &\leq 0. \end{aligned}$$

- 3.** Знайдіть усі значення параметра a , при яких нерівність виконується за будь-яких значень змінної x :

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{x^2 - 8x + 20}{ax^2 + 2(a+1)x + 9a + 4} &< 0; & \text{б) } \frac{x^2 + ax - 1}{2x^2 - 2x + 3} &< 1; \\ \text{в) } \frac{x^2 - ax - 2}{x^2 - 3x - 4} &> -1. \end{aligned}$$

- 4.** При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння $a^2x^2 + ax - 2 = 0$ має модуль менший від 1, а другий — більший за 1? Доведіть, що задача рівносильна наступній: знайти значення a , при яких функція $y = a^2x^2 + ax - 2$ набуває різних за знаком значень на кінцях проміжку $[-1; 1]$. Розв'яжіть відповідну нерівність $y(1) \cdot y(-1) < 0$, використовуючи метод інтервалів.

- 5.** Цілою частиною дійсного числа x називають найбільше ціле число $[x]$, що не перевищує числа x . Дробовою частиною $\{x\}$ числа x називають $x - [x]$. Обґрунтуйте,

що $0 \leq \{x\} < 1$ та знайдіть обидва корені рівняння $\{x\} = \frac{[x] - 5}{1 - [x]}$.

- 6.** Рівняння Менделєєва-Клапейрона, що описує стан ідеального газу, має вигляд:

$$pV = \nu RT. \text{ Ван-дер-Ваальс створив більш точне рівняння } \left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \nu RT$$

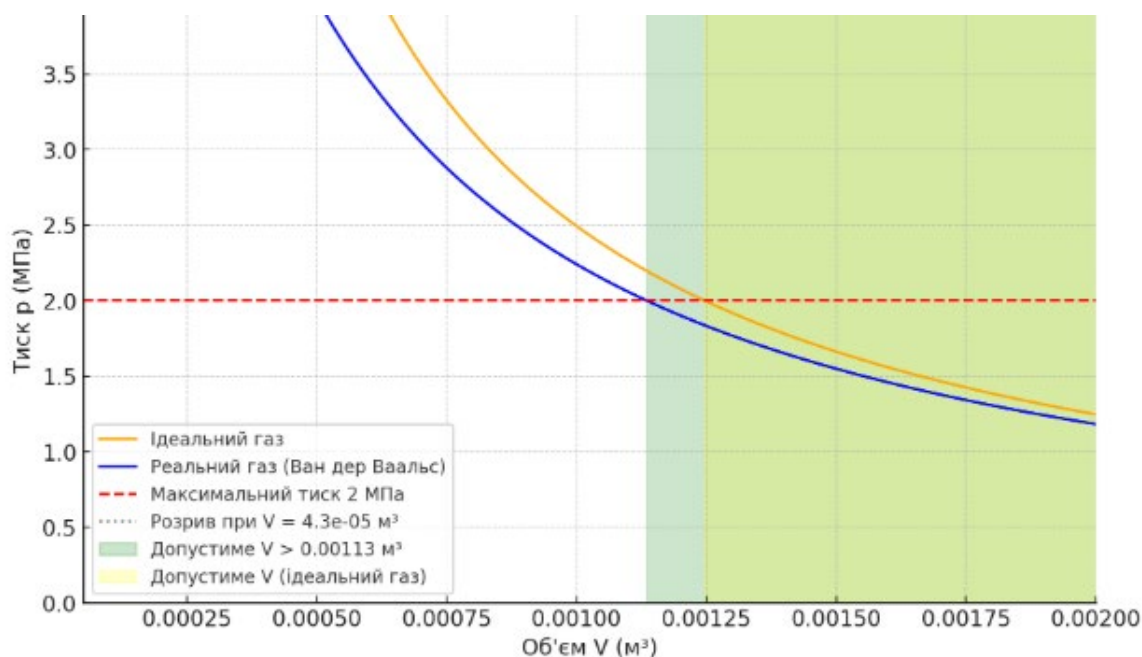
для реального газу і був у 1910 році нагороджений Нобелівською премією з фізики. У цих формулах p — тиск, V — об'єм газу, ν — кількість речовини у молях, $R = 8,314 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$ — універсальна газова стала, T — термодинамічна температура. Для одного моля вуглекислого газу (CO_2), за температури $T = 300 \text{ К}$, потрібно визначити, при яких об'ємах тиск не перевищує 2 МПа .

- а) Розв'яжіть задачу, використовуючи рівняння для ідеального газу.
б) Розв'яжіть задачу для реального газу (CO_2) при $a = 0,364 \text{ Па} \cdot \text{м}^6 \cdot \text{моль}^{-2}$, $b = 4,27 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 \cdot \text{моль}^{-1}$. При використанні методу інтервалів скористайтесь про-

грамним середовищем wolframalpha.com для отримання нулів лівої частини нерівності.

в) Порівняйте отримані результати. Чи відповідають вони наведеному нижче графіку? Зробіть висновки.

Графік тиску CO_2 — ідеальний та реальний газ



VII. Рефлексія (2 хв)

1. Я розумію схему розв'язування нерівностей методом інтервалів.

Так
Ще треба потренуватися
Ні
2. Я вмію використовувати метод інтервалів для розв'язування нескладних нерівностей.

Так
Ще треба потренуватися
Ні
3. Я вмію застосовувати метод інтервалів для розв'язування нерівностей, що містять множники в різних степенях, знак модуля, квадратного кореня.

Так
Ще треба потренуватися
Ні
4. Я розумію ідею застосування методу інтервалів для знаходження області визначення функції.

Так
Ще треба потренуватися
Ні
5. Я вмію розв'язувати системи нерівностей методом інтервалів у нескладних випадках.

Так
Ще треба потренуватися
Ні

6. Я розумію, як використовувати вивчену тему при розв'язуванні задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

1. Нерівності та їхні системи, що містять параметр.
2. Застосування нерівностей в економіці.
3. Застосування нерівностей у фізиці.
4. Розташування коренів квадратного тричлена відносно даних чисел.
5. Узагальніть задачу 6 рівня С. Створіть комп'ютерну програму для візуалізації описаної ситуації та унаочнення відповіді.