

10

Тема 8. Нерівності

Урок 5. Нерівності з двома змінними. Задачі лінійного програмування

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

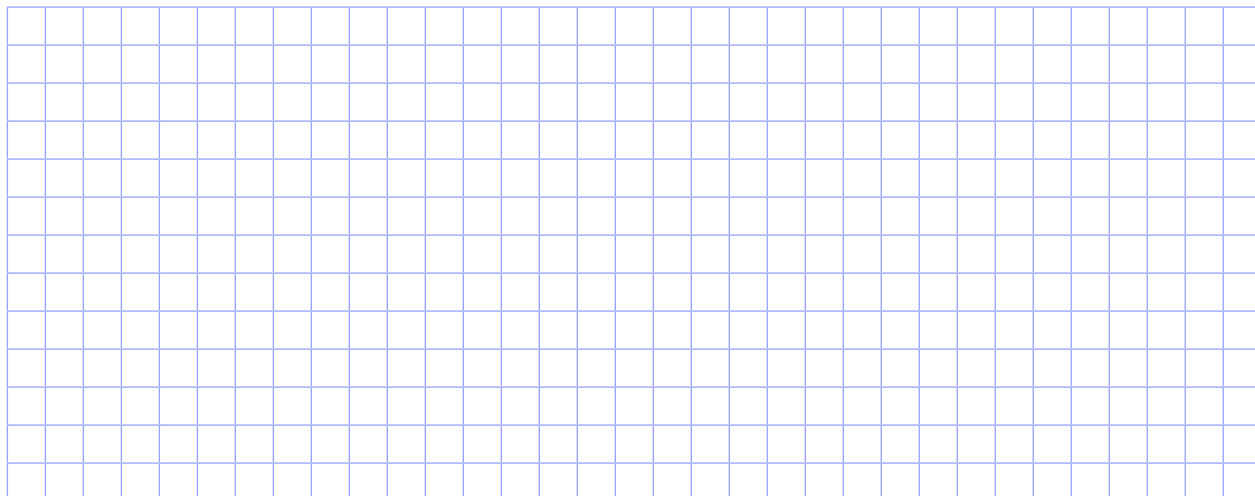
На уроці ви:

- 1) навчитеся розв'язувати лінійні нерівності з двома змінними;
- 2) навчитеся будувати ГМТ, що задовольняють системи чи сукупності лінійних нерівностей із двома змінними;
- 3) познайомитеся з методами розв'язування нелінійних нерівностей із двома змінними;
- 4) зрозумієте, в чому полягають задачі лінійного програмування та їхню важливість для оптимізації процесів;
- 5) навчитеся будувати математичні моделі та розв'язувати їх за допомогою аналітичних, графічних та комп'ютерних методів;
- 6) зможете використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

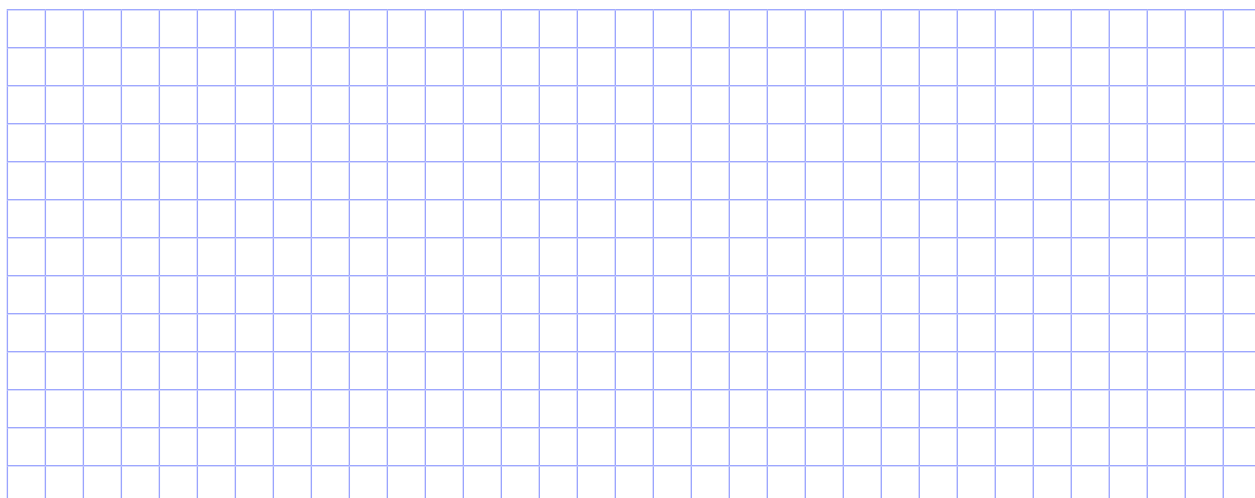
II. Лінійні нерівності з двома змінними, їхні системи та сукупності

Зазвичай, в алгебрі інформацію подають аналітично (у вигляді формул) або графічно (графіки функцій, спеціальні рисунки з умовними позначеннями тощо). Так, при розв'язанні лінійних нерівностей з однією змінною комбінують аналітичний метод (перетворення нерівностей) та графічний (умовне зображення на числовій прямій). Аналогічно, при розв'язуванні квадратичних нерівностей комбінують аналітичний метод (дослідження квадратичної функції) та графічний (побудова ескізу графіка). Тому важливо використовувати аналогічну комбінацію аналітичного та графічного методів до лінійних (першого степеня) нерівностей із двома змінними. Однак, на відміну від ситуації з однією змінною, графічне представлення інформації знадобиться нам не тільки для розв'язання, а й для представлення результату.

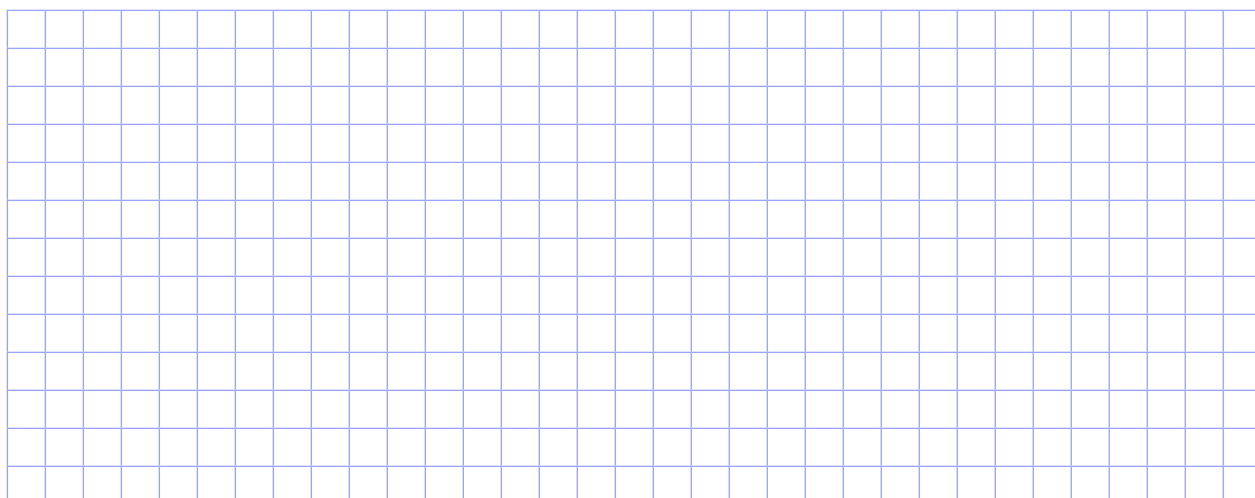
Приклад 1. Розв'яжіть нерівність $2x + y > 3$. Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, для яких дана нерівність виконується.



Приклад 2. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 2x + y > 3; \\ 2y - 3x \leq 5. \end{cases}$ Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, для яких обидві нерівності системи виконуються.



Приклад 3. Розв'яжіть сукупність нерівностей $\begin{cases} 2x + y > 3; \\ 2y - 3x \leq 5. \end{cases}$ Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, для яких хоча б одна з двох нерівностей сукупності виконується.

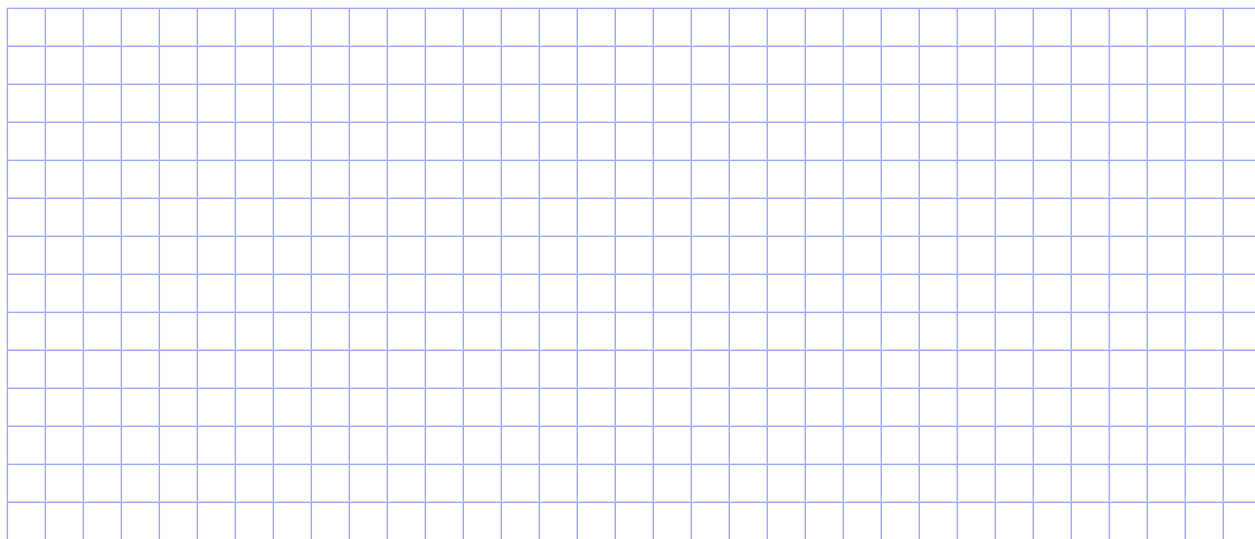


III. Нелінійні нерівності з двома змінними

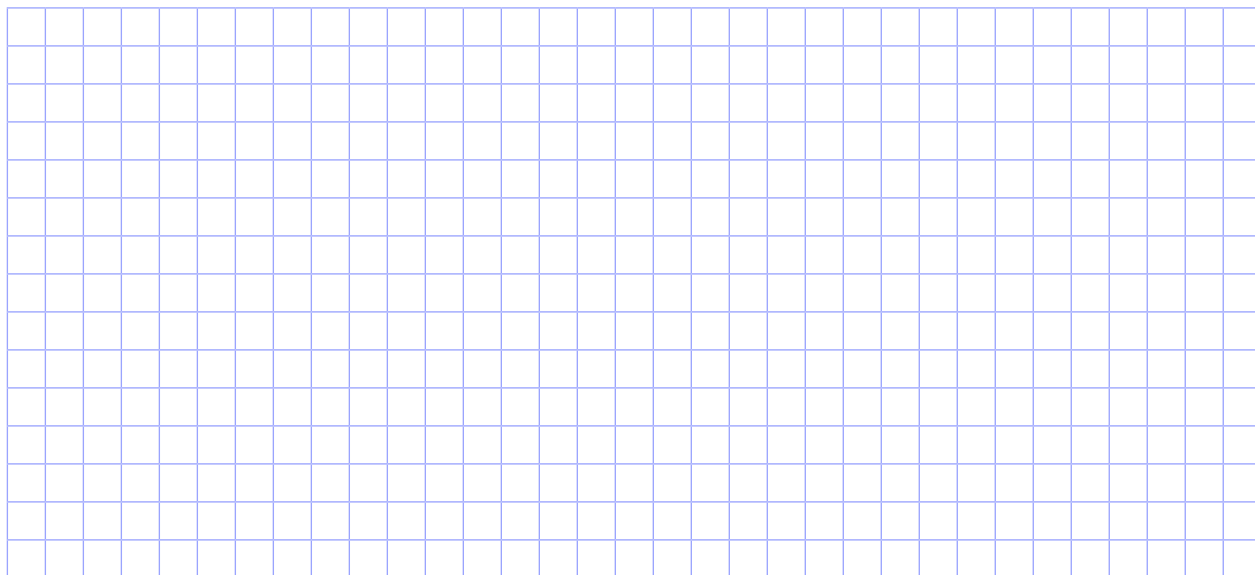
Аналогічно до лінійних нерівностей, для розв'язування нелінійних нерівностей із двома змінними доцільно поєднувати аналітичний та графічний методи. При цьому, крім властивостей функцій та їхніх графіків, потрібно згадати формули відстані між двома точками та рівняння кола.

1. Відстань між двома точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ на площині обчислюють за формулою $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
2. Рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де $R > 0$, є рівнянням кола з центром у точці $A(a; b)$ і з радіусом R .
3. Якщо центр кола збігається з початком координат, то рівняння такого кола має вигляд: $x^2 + y^2 = R^2$.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність $y > x^2 + 1$. Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, для яких нерівність справджується.



Приклад 5. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють нерівність $4|x| + 6|y| - x^2 - y^2 \leq 12$.



IV. Задачі лінійного програмування

Одним з найвідоміших застосувань систем лінійних нерівностей є розв'язання задач пошуку оптимальних планів у виробництві. Таке планування (програмування) економічних процесів було розроблено впродовж XX ст. кількома вченими. У 1975 році математик Леонід Канторович та економіст Тяллінг Чарльз Купманс отримали Нобелівську премію з економіки за розвиток теорії оптимального розподілу ресурсів.

При великій кількості параметрів відповідні задачі доцільніше розв'язувати за допомогою спеціальних програм на комп'ютері. Отже, термін «лінійне програмування» для таких задач набув нового змісту. Для випадку двох змінних відповідні задачі можна розв'язати за допомогою відомих нам ідей. Ви вже знаєте, як будувати множину розв'язків систем лінійних нерівностей. Це допоможе розв'язувати актуальні практичні задачі з економічним змістом за допомогою алгоритму задач лінійного програмування.

Алгоритм для розв'язання задач лінійного програмування:

- 1) опишіть змінні;
- 2) задайте обмеження у вигляді системи лінійних нерівностей;
- 3) задайте цільову лінійну функцію, для якої треба знайти найбільше чи найменше значення;
- 4) знайдіть вершини області, яка відповідає обмеженням;
- 5) знайдіть, у якій вершині (або вершинах) цільова функція набуває найбільшого (або найменшого) значень;
- 6) створіть оптимальний план (оптимальні плани) та проаналізуйте їхню кількість.

Приклад 6. Учень готується до іспитів з математики та з біології. Він планує приділити щонайменше 4 години на вивчення біології та щонайменше 2 години на вивчення математики впродовж тижня. При цьому на біологію йому потрібно витратити хоча б на одну годину менше, ніж на математику. Усього учень планує витратити не більше 15 годин на підготовку. Відомо, що кожна година підготовки з біології покращує загальний результат на 2 бали, а з математики — на 3 бали. Як розподілити час на підготовку до іспитів, щоби загальний бал був максимальним?

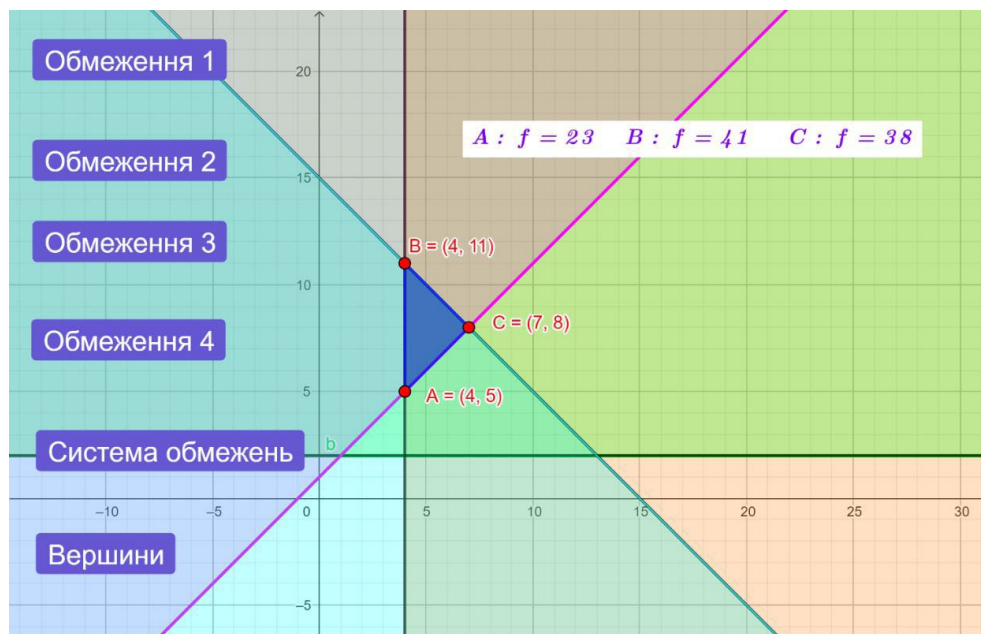
Посилання на аплет:

<https://www.geogebra.org/m/ng3wprfb>



Вказівка. Складіть систему нерівностей
$$\begin{cases} x \geq 4; \\ y \geq 2; \\ x + y \leq 15; \\ x \leq y - 1. \end{cases}$$

Складіть цільову функцію $f(x; y) = 2x + 3y$.



V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Посилання на аплет:

<https://www.geogebra.org/m/jq9syctv>



Задача. Алі-Баба зайшов до печери, в якій зберігаються золото, діаманти та скриня, в якій можна нести весь скарб. Повна скриня золота важить 200 кг, повна скриня діамантів — 40 кг. За 1 кг золота можна отримати 20 динарів, а за 1 кг діамантів — 60 динарів. Алі-Баба може підняти та винести з печери скриню, вміст якої важить не більше за 100 кг. Яку найбільшу суму грошей він може отримати за скарби, які він зможе винести за один раз?

Вказівка. Вказівка. Складіть систему нерівностей

$$\begin{cases} x \geq 0; \\ y \geq 0; \\ x + y \leq 100; \\ \frac{x}{200} + \frac{y}{40} \leq 1. \end{cases}$$

Цільова функція $f(x; y) = 20x + 60y = 20 \cdot (x + 3y)$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Зобразіть графічно множину розв'язків нерівності:

а) $x + y < 5$;

б) $2x - y \leq 3$;

в) $x + 2y \leq 5$.

- 2.** Побудуйте в одній системі координат множину розв'язків системи нерівностей:
- а) $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 1, \\ x + y \leq 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y \geq 3, \\ x + 2y \geq 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - y \leq 5, \\ y \leq 2x + 5. \end{cases}$
- 3.** Знайдіть ГМТ, що задовольняє дані умови:
- а) $\begin{cases} x - y \geq 0, \\ 4x + 3y < 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \leq 3, \\ x + 2y \geq 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - y \leq 5, \\ y \leq 2x + 5. \end{cases}$
- 4.** Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють нерівність:
- а) $y \leq \frac{1}{x}$; б) $y \geq -\sqrt{-x}$; в) $x^2 + (y - 3)^2 \leq 4$.
- 5.** Із поля на овочеву базу перевозять овочі вантажівками вантажністю 5 т і 10 т. За одну годину на базі можуть розвантажити не більш як 10 вантажівок, причому не більше 8 машин по 5 т і не більше 6 машин по 10 т. Скільки і яких вантажівок треба відправити з поля на базу, щоби перевезти за годину щонайбільшу кількість овочів?
- 6.** Учениця готується до іспитів з математики та географії. Вона планує щонайменше 4 години вивчати географію та щонайменше 2 години вивчати математику впродовж тижня. При цьому географію їй потрібно вивчати хоча б на одну годину більше, ніж математику. Учениця планує витратити не більше 15 годин на підготовку. Відомо, що кожна година підготовки з географії покращує загальний результат на 2 бали, а з математики — на 3 бали. Як розподілити час на підготовку, щоб загальний бал був максимальним?

Рівень В

- 1.** Зобразіть графічно множину розв'язків нерівності:
- а) $2x + 3y < 5$; б) $1, 2x - y \leq 3$; в) $\frac{x}{3} - \frac{2y}{5} \leq 1$.
- 2.** Побудуйте в одній системі координат множину розв'язків системи нерівностей:
- а) $\begin{cases} y - 3x + 4 \geq 0, \\ 2y - 6x - 5 \leq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y - 6x + 9 \leq 0, \\ 4y - 8x - 7 \geq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 2y + 5 \leq 0, \\ 2x - y + 1 \geq 0. \end{cases}$
- 3.** Знайдіть ГМТ, що задовольняє умови:
- а) $\begin{cases} 4x - 3y \geq 1, \\ 4x + 3y < 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 3 + x^2 + y^2, \\ x + 2y \geq 1; \end{cases}$
- в) $\begin{cases} (x - y)^2 \geq 4, \\ (x + y)^2 \leq 1. \end{cases}$
- 4.** Побудуйте в одній системі координат багатокутник, заданий системою нерівностей:
- а) $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + 2y \leq 6, \\ x - 3 \leq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y - x \geq 0, \\ y + x \geq 0, \\ y \leq \frac{1}{3}x + 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} -1 \leq y - x \leq 1, \\ -1 \leq y + x \leq 1. \end{cases}$
- Знайдіть площу багатокутника.

5. Побудуйте багатокутник із даними вершинами та задайте його системою нерівностей:
- $A(0; 0), B(4; 4), C(8; 0);$
 - $A(0; 1), B(0; 2), C(2; 0), D(1; 0);$
 - $A(2; 4), B(3; 7), C(6; 6), D(5; 3).$
6. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють нерівність:
- $x^2 + y^2 - 2|x| + 4y + 1 \leq 0;$
 - $y > x^2 - 4|x| + 3;$
 - $x^2 - (y - 3)^2 \leq 0.$
7. За яких значень параметрів k та b множиною точок координатної площини, що задається системою нерівностей $\begin{cases} y \leq 3x + 1, \\ y \geq kx + b, \end{cases}$ є:
- смуга;
 - плоский кут;
 - порожня множина?
8. На двох шахтах видобувають руду. На першій шахті щоденно добувають 100 т руди, а на другій — 200 т. Руду можна переробляти на двох заводах, причому вартість перевезення 1 т руди з першої шахти на перший завод становить 5 ум. од., а на другий завод — 4 ум. од. Вартість перевезення 1 т руди з другої шахти на перший завод становить 7 ум. од., а на другий завод — 5 ум. од. Кожний завод може переробляти не більше 250 т руди на день. Складіть оптимальний план перевезень усієї видобутої за день руди з шахт на заводи.
9. Відомо, що при правильному харчуванні людині потрібно щодня не менш як 20 одиниць вітаміну А та не менш як 15 одиниць вітаміну В. Вміст кожного з цих вітамінів у продуктах П1 та П2 та їхню вартість задано в таблиці.

	Вітамін А, одиниць	Вітамін В, одиниць	Вартість однієї одиниці продукту
Продукт П1	4	5	25
Продукт П2	5	3	30

Складіть найдешевший раціон харчування із застосуванням норм щодо споживання вітамінів А та В. Скільки одиниць кожного продукту варто придбати із розрахунку на 13 днів?

10. Із залізничних станцій А і В треба перевезти вантаж на склади №1, №2 та №3. На станції А весь вантаж можна завантажити на 80 вантажівок, на станції В — на 100 вантажівок. Склади можуть прийняти: №1 — 50 вантажівок, №2 — 70 вантажівок, №3 — 60 вантажівок. Кількість пального (в літрах), що витрачає одна машина на пробіг від станції до складу, задано в таблиці.

	Склад №1	Склад №2	Склад №3
Станція А	2	4	5
Станція В	4	5	3

Складіть план перевезень, при якому загальні витрати пального будуть найменшими.

- 11.** Розробник планує випустити два види комп'ютерних ігор: стратегію та симулятор. На розробку однієї стратегії потрібно 100 годин програмування та 50 годин тестування, а на розробку одного симулятора — 60 годин програмування та 40 годин тестування. Загальний доступний ресурс складає 800 годин програмування та 400 годин тестування. Прибуток від однієї стратегії становить 20 000 000 грн, а від одного симулятора — 15 000 000 грн. Скільки ігор кожного виду потрібно розробити, щоб максимізувати прибуток?
- 12.** У цілодобовому комп'ютерному клубі є два типи комп'ютерів: ігрові та офісні. Ігрові комп'ютери приносять дохід 100 гривень за годину, офісні — 50 гривень за годину. У клубі встановлено 10 ігрових та 15 офісних комп'ютерів. Загальний час роботи всіх комп'ютерів не повинен перевищувати 300 годин на добу через певні обмеження. Вважаємо, що всі офісні комп'ютери працюють однаковий час, і всі ігрові — також працюють однаковий час. Потрібно максимізувати дохід клубу. Складіть бізнес-план його роботи.

Розв'яжіть задачу класичним методом, тобто на папері, а також:

- за допомогою програми для створення динамічних креслень (наприклад, GeoGebra);
- за допомогою штучного інтелекту (наприклад, ChatGpt);
- за допомогою математичного пакета (наприклад, WolframAlpha).

Порівняйте отримані відповіді. Зробіть висновки про переваги та недоліки кожного розв'язання. Оформіть їх у вигляді таблиці.

	Відповідь	Переваги	Недоліки
Метод «на папері»			
Використання динамічних креслень			
Використання ШІ			
Використання математичного пакета			

Рівень С

- 1.** Розв'яжіть графічно нерівність:
- а) $|3x + 2y| \leq 5$; б) $2|x| + 3|y| \leq 5$; в) $|x| + |y| + |x - y| \leq 2$.
- 2.** Побудуйте в одній системі координат множину розв'язків системи нерівностей:
- а) $\begin{cases} |3y - x| \leq 4, \\ |2x - y| \geq 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x - 1| + |y - 1| \geq 1, \\ |x - 2| + |y - 2| \leq 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \geq |y - 2|, \\ y \geq |x|. \end{cases}$
- 3.** Дослідіть, за яких значень параметра k фігура, задана системою нерівностей, буде трикутником:
- а) $\begin{cases} 2y - x \geq 2, \\ y - x \leq 2, \\ y \geq kx - 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + 2 \leq 0, \\ y - 2 \geq 0, \\ y - kx \geq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \geq |y + 3|, \\ y \leq kx. \end{cases}$

- 4.** Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють умови:

a) $x + \frac{1}{x} \leq y + \frac{1}{y}$;

$$6) \begin{cases} y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ x \leq \sqrt{1-y^2}; \end{cases}$$

B) $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2} \leq 5$.

5. Відділу кадрів підприємства потрібно прийняти на роботу не менше двох співробітників, при цьому співробітників вищої категорії потрібно прийняти максимум на два більше, ніж співробітників першої категорії. Щоб не порушувати антимонопольне законодавство, продуктивність праці найнятих співробітників має становити: першої категорії — 2 одиниці продукції на день, вищої категорії — 3 одиниці продукції на день. Проте, разом вони мають виготовляти не більше за 21 одиницю продукції на день. Відомо, що співробітники першої категорії за 9 днів мають виготовляти максимум на 72 одиниці продукції більше, ніж працівники вищої категорії за 4 дні. Кожен співробітник вищої категорії приносить підприємству за день прибутку на 4000 грн, а першої — на 2500 грн. Скільки і яких працівників потрібно прийняти кадровому відділу підприємства, щоби прибуток підприємства максимально збільшився? Знайдіть два оптимальні плани розширення підприємства та доведіть, що інших не існує.
6. Задано задачу лінійного програмування. Знайдіть найбільше (найменше) значення цільової функції $f(x; y) = kx + y$, за умови виконання системи обмежень:

$$\begin{cases} y \leq x, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 6. \end{cases}$$

Знайдіть усі значення параметра k , за яких оптимальний план існує лише один і досягається у точці:

- a) $A(0; 0)$, б) $B(3; 3)$, в) $C(6; 0)$.

Знайдіть усі значення параметра k , за яких оптимальних планів існує безліч. Скільки з цих планів мають цілочисельні значення для x та y ?

Рефлексія

- | | | | |
|-----------|--|------------------------|----|
| 1. | Я розумію, як розв'язувати графічно лінійні нерівності з двома змінними. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю, як будувати ГМТ, що задовольняють систему або сукупність лінійних нерівностей із двома змінними. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я розумію, як розв'язувати графічно нелінійні нерівності з двома змінними. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

- 4.** Я знаю, як користуватися алгоритмом розв'язування задач лінійного програмування.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 5.** Я вмію розв'язувати задачі лінійного програмування з двома змінними.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|
- 6.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.
- | | | |
|-----|------------------------|----|
| Так | Ще треба потренуватися | Ні |
|-----|------------------------|----|

Можливі теми проєктів

- 1.** Завдання з 8-го по 12-е з рівня В.
- 2.** Завдання 5 і 6 з рівня С.
- 3.** Дослідження спеціальних програмних засобів для розв'язування задач лінійного програмування та візуалізації процесу розв'язання. Порівняння їх за ефективністю, доступністю та іншими чинниками.
- 4.** Розробіть програму розв'язування задач лінійного програмування з двома змінними будь-якою мовою програмування. Протестуйте її на відповідних вправах рівнів А, В та С.
- 5.** Розробіть умову прикладної задачі на метод лінійного програмування з трьома змінними. Дослідіть її аналітично та з використанням програми для створення 3D динамічних креслень (наприклад, GeoGebra).

