

**Урок 1. Повторення та систематизація вивченого
у першому семестрі****РОБОЧИЙ АРКУШ**

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) пригадаєте означення границі числової послідовності та навчитеся користуватися ним для доведення;
- 2) пригадаєте, що таке нескінченно малі послідовності та повторите їх основні властивості;
- 3) відновите у пам'яті теореми про арифметичні дії зі збіжними числовими послідовностями;
- 4) навчитеся обчислювати границі числових послідовностей;
- 5) навчитеся використовувати набуті знання щодо розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Розв'яжіть нерівність $|x - 1| < 3$.
2. Задайте формулою відстань між точками на числовій прямій, що відповідають числам a та b .
3. Задано послідовність $a_n = \frac{1}{2^n}$. Починаючи з якого члена послідовності усі інші члени послідовності менші за 0,01?
4. Підберіть одну з можливих формул n -го члена послідовності, першими членами якої є числа 0, 2, 0, 2, 0,
5. Обчисліть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q , якщо $b_1 = 24$, $q = \frac{3}{4}$.

III. Границя числової послідовності (5 хв)

Означення. Число a називають **границею послідовності** (a_n) , якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)|a_n - a| < \varepsilon.$$

Послідовність, яка має границю, називають **збіжною**.

Послідовність, яка не має границі, називають **розбіжною**.

Для кращого розуміння означення границі послідовності можна скористатися Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/hdVNRH8q>

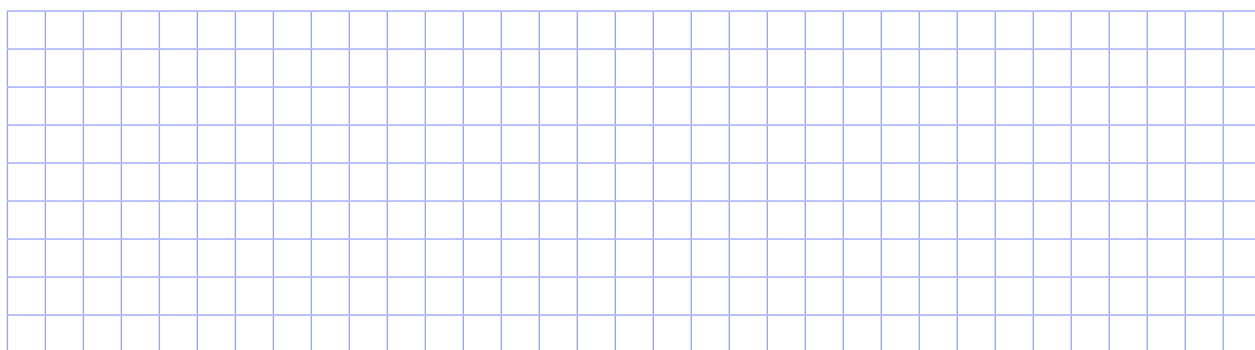


Властивості збіжних послідовностей

1. Числова послідовність може мати лише одну границю.
2. Збіжна послідовність є обмеженою. (Якщо послідовність не обмежена, то вона не збіжна).
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ і $a > b \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) a_n > b$;
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ і $a < b \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) a_n < b$.
4. $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \geq b_n)$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Rightarrow a \geq b$.
5. **Теорема про двох конвоїрів.** $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq c_n \leq b_n)$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Приклад 2. Доведіть, користуючись означенням границі послідовності, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) = 1.$$



IV. Нескінченно малі послідовності та їхні властивості

Означення. Послідовність a_n називають **нескінченно малою**, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Теорема. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow a_n = \alpha + \beta_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

Властивості нескінченно малих послідовностей

1. Добуток обмеженої і нескінченно малої послідовностей є нескінченно малою.
2. Добуток збіжної і нескінченно малої послідовностей є нескінченно малою.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0, a > 1.$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$, де $|q| < 1.$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, a_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = 0, k \in N, k > 1.$
8. Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.
9. Послідовність $|\alpha_n|$ є нескінченно малою тоді і тільки тоді коли послідовність α_n є нескінченно малою.

Приклад 3. Обчисліть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0,5}$.

[illegible]

Приклад 4. Обчисліть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)!}$.

[illegible]

Приклад 5. Доведіть, що послідовність $a_n = q^n$, де $|q| < 1$ нескінченно мала.

Доведення. Якщо $q = 0$, то $a_n = 0$ і $\lim a_n = 0$. Нехай $q \neq 0$. Тоді $0 < |q| < 1$ і $\frac{1}{|q|} > 1$.

Існує таке додатне число γ , що $\frac{1}{|q|} = 1 + \gamma$. Згідно з нерівністю Бернуллі для $n \in N$:

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(\frac{1}{|q|} \right)^n = (1 + \gamma)^n \geq 1 + n\gamma > n\gamma.$$

Звідси $|q|^n < \frac{1}{n\gamma}$ при $n \in N$. Візьмемо $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\gamma\epsilon} \right\rceil + 1$, де $\gamma = \frac{1}{|q|} - 1$.

При $n > n_0$ $n > \left[\frac{1}{\gamma \varepsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\gamma \varepsilon}$ або $\frac{1}{n\gamma} < \varepsilon$. Отже, при $n > n_0$ $|q^n - 0| = |q|^n < \frac{1}{n\gamma} < \varepsilon$. Це

означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $0 < |q| < 1$. Враховуючи, що $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ і при $q = 0$, маємо:

$$\lim q^n = 0 \text{ при } |q| < 1.$$

VI. Обчислення границь числових послідовностей

Корисно буде також нагадати теорему Вейерштрасса.

Теорема (теорема Вейерштрасса). Кожна зростаюча і обмежена зверху (спадна і обмежена знизу) послідовність має границю.

Приклад 9. Відомо, що $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Розв'язання. Дана сума містить n доданків. Найбільший з них $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, а наймен-

ший $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Тому $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

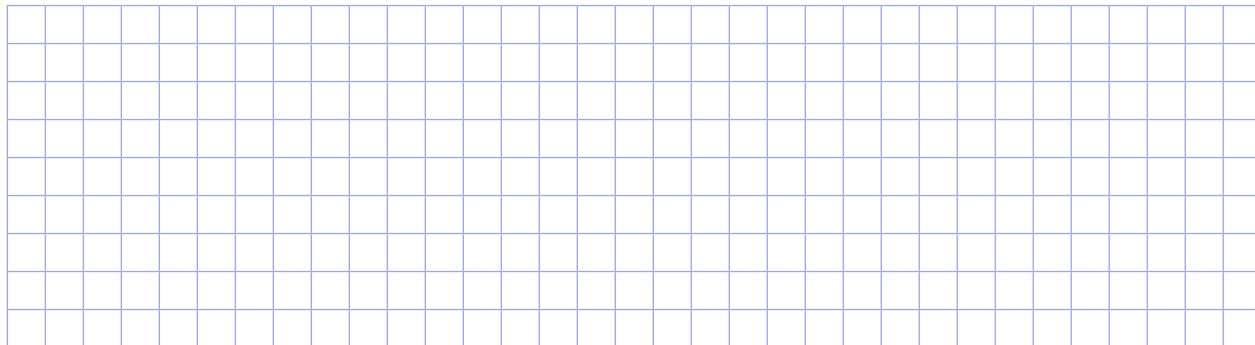
Помітимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 1$ та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$

Тому за теоремою про двох конвоїрів $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Відповідь. 1.

Приклад 10. Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+k} - \sqrt{n+m}}{\sqrt{n+t} - \sqrt{n+p}}$, p, q, k, m, t — будь-які дійсні числа, $t \neq p$.



Приклад 11. Послідовність (a_n) задано рекурентним способом: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Дослідіть послідовність (a_n) на збіжність і у випадку збіжності знайдіть границю.

Розв'язання. Зрозуміло, що $a_n > 0$

Запишемо $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$, $a_{n+2}^2 = 2 + a_{n+1}$. Звідси $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_{n+1} - a_n$. Очевидно, що $a_2 - a_1 > 0$. Водночас з припущення $a_{n+1} - a_n > 0$ випливає, що $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 > 0$, тобто $a_{n+2} - a_{n+1} > 0$. За методом математичної індукції отримуємо, що (a_n) — зростаюча послідовність.

Маємо $a_n^2 < a_{n+1}^2 = 2 + a_n$. Звідси $a_n^2 < 2 + a_n$, $-1 < a_n < 2$. Тому (a_n) — обмежена зверху послідовність.

За теоремою Вейерштрасса існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Знайдемо значення границі a .
 Скористаємося рівністю $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + a}$,
 то маємо рівняння $a = \sqrt{2 + a}$. Звідси $a = 2$.
 Відповідь. 2.

VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час багаторазового збереження зображення з алгоритмом стиснення кожне нове збереження зменшує розмір файлу. Розмір файлу (у Мб) після n -го збереження задається послідовністю $S_n = 0,85S_{n-1} + 0,3$, $S_1 = 12$.

- 1) Обчисліть розміри файлу після перших 4 збережень.
- 2) Доведіть, що послідовність S_n збіжна та знайдіть її границю.
- 3) Поясніть зміст знайденої границі.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Доведіть, користуючись означенням границі, що:

- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$; | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$; | 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+3} = 2$; |
| 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5n}{3n+2} = -\frac{5}{3}$; | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{5-7n} = -\frac{3}{7}$. |

2. Знайдіть границю послідовності:

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $a_n = \frac{10n-6}{4n+7}$; | 2) $a_n = \frac{3-4n}{13n+2}$; |
| 3) $a_n = \frac{7n}{2-5n}$; | 4) $a_n = \frac{4n^2-1}{n^2+5n+2}$. |

3. Укажіть номер n_0 такого члена послідовності (x_n) , починаючи з якого всі члени послідовності належатимуть r -околу точки a :

- | | |
|---|--|
| 1) $x_n = \frac{1}{2n}, a = 0, r = 0,1$; | 2) $x_n = 3 + \frac{1}{n^2}, a = 3, r = 0,2$; |
| 3) $x_n = 1 + \frac{2}{n^2}, a = 1, r = 0,01$; | 4) $x_n = -\frac{3}{n}, a = 0, r = 0,1$. |

4. Для даної збіжної послідовності a_n знайдіть таку нескінченно малу послідовність (β_n) , що $a_n = a + \beta_n$, де a — границя послідовності a_n :

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $a_n = \frac{1}{n}$; | 2) $a_n = \frac{n}{n+1}$; |
| 3) $a_n = \frac{4n-2}{3n+1}$; | 4) $a_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$. |

5. Знайдіть границю:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{5}{n^2} \right);$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 + \frac{1}{n^2} \right)^2 - n^4;$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 7n^3}{n^3};$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11n - 2^n}{2^n}.$

6. Знайдіть принаймні одне число n_0 таке, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність:

1) $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{20};$

2) $\left| \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right| < 0,01.$

Рівень В

1. Доведіть, користуючись означенням границі, що:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 10n - 1}{3n^2 + 2n + 3} = \frac{1}{3};$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + n - 14}{3n^2 + 12n - 25} = 2\frac{1}{3};$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 15}{4n^2 - 5n - 21} = \frac{1}{2};$

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 11n + 3}{3n^2 - 23n - 14} = \frac{2}{3}.$

2. Знайдіть границю послідовності:

1) $a_n = \frac{2 - 6n - 3n^2}{10n + 2n^2 - 1};$

2) $a_n = \frac{2n + 3}{5n^2 - n - 2};$

3) $a_n = \frac{3}{6n^2 + n + 2};$

4) $a_n = \frac{2n^3 - n^2 + 4n + 1}{5n^3 - 3n - 2}.$

3. Укажіть номер n_0 такого члена послідовності (x_n) , починаючи з якого всі члени послідовності належатимуть ϵ -околу точки a :

1) $x_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n, a = 0, r = \frac{1}{27};$

2) $x_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}, a = 0, r = \frac{1}{64};$

3) $x_n = 2 + \left(\frac{1}{2} \right)^n, a = 2, r = \frac{1}{128};$

4) $x_n = 3 - \left(\frac{1}{3} \right)^n, a = 3, r = \frac{1}{81}.$

4. За допомогою теореми Вейерштрасса доведіть, що послідовність x_n має границю:

1) $x_n = \frac{3n^2 + 2}{n^2};$

2) $x_n = \frac{n^2 - 5}{n^2 + 5}.$

5. Обчисліть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

1) $x_n = \frac{7}{n} + \frac{8}{\sqrt{n}} + \frac{9}{n^3};$

2) $x_n = \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2} - \frac{5}{n^3} + \frac{13}{n^4};$

3) $x_n = 6 - \frac{7}{n^2} - \frac{3}{n} - \frac{3}{\sqrt{n}};$

4) $x_n = \frac{1}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}} - 4 + \frac{7}{n^2}.$

6. Обчисліть:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right);$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right).$

7. Спростіть вираз:

1) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + \dots;$

2) $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \cos^4 x + \dots;$

3) $\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \cos^8 x + \dots;$

4) $1 - \sin^3 x + \sin^6 x - \sin^9 x + \dots$

8. Доведіть, що послідовність (y_n) розбіжна:

1) $y_n = \frac{2 + (-1)^n}{3}$;

2) $y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

9. Доведіть, що:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n(\sqrt{n^2 + 1} - n) = 1$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 0$.

10. Знайдіть границі послідовностей:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + n - n^2}{2n^2 - 1} \right)^3$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 7n}}{n - 5}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2-n)(n-1)}{5n^4 + 2}$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{2}{n^2} - 5 \right) \left(\frac{1}{n^3} - 1 \right)$.

11. Знайдіть границі послідовностей:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3}{1 + 5n^2} + \frac{1 - 3n^2}{3n + 1} \right)$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + n + 1} - 2n)$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 6 + 36 + \dots + 6^{n-1}}{4 \cdot 6^{n+2} + 1}$.

12. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Знайдіть границю:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + a_{n+2}}{(a_n - n)^2 + 1}$.

Рівень С

1. Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}$.

2. Знайдіть k , якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1975}}{n^k - (n-1)^k} = \frac{1}{1976}$.

3. Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos 2\pi \left(\frac{1}{3}n - 4 \right)}{\sqrt{n}}$.

4. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$. Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

5. $a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt{n^2 + 2n}$. Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

6. Побудуйте графік функції $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$.

7. **Творче завдання.** Напишіть програму, яка графічно ілюструє збіжність послідовності, що була задана у прикладній задачі ($S_n = 0,85S_{n-1} + 0,3$, $S_1 = 12$).

Рефлексія

1. Я знаю означення границі числової послідовності та умію користуватися ним для доведення.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- | | | | | |
|-----------|---|-----|------------------------|----|
| 2. | Я розумію, що таке нескінченно малі послідовності та знаю їхні основні властивості. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я пригадав/пригадала теореми про арифметичні дії зі збіжними числовими послідовностями. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я умію обчислювати границі числових послідовностей. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Обчислення границь числових послідовностей заданих рекурентно.
- 2.** Границя послідовності як модель стабілізації процесів.
- 3.** Візуалізація процесу збіжності та розбіжності числових послідовностей за допомогою однієї з мов програмування.
- 4.** Типові помилки при знаходженні границь числових послідовностей. Математичні софізми.
- 5.** Числові послідовності та їхні границі в програмуванні. Ітераційні методи.

