

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 1. Повторення та систематизація вивченого у першому семестрі

Тип уроку: урок узагальнення і систематизації знань.

План уроку

1. Границя числової послідовності.
2. Нескінченно малі послідовності та їхні властивості.
3. Арифметичні дії зі збіжними послідовностями.
4. Обчислення границь числових послідовностей.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

визначає типи можливих результатів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 1.3.1–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

визначає, яких даних недостатньо чи є надлишкові дані, під час розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.1.2–1 П];

пов'язує різні математичні знання і вміння, узагальнює їх, робить висновки [12 МАО 4.1.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово упродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на ваш розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, знаходити математичного партнера, з яким під силу розв'язати задачу, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Обов'язково пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності маркування – на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач та навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати упродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їх захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Темати проєктів можуть бути запропоновані вами практичні завдання за рівнями маркування А, В, С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С. Можливі теми для створення проєктів запропоновані.
- 10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Якщо щодня зменшувати витрати електроенергії на 10%, то чи можна коли небудь досягнути нульового споживання?
- 2) Чи може сума нескінченної кількості чисел дорівнювати конкретному числу?
- 3) Уявіть собі, м'яч що підстрибує кожного разу на висоту вдвічі меншу за попередню. Чи зупиниться він коли небудь.
- 4) Як ви розумієте фразу «Члени послідовності стають як завгодно близькими до числа»?
- 5) Де у повсякденному житті вживають слово «границя»?

II. Повторення (Усно) (3–4 хв)

1. Розв'яжіть нерівність $|x - 1| < 3$.
Відповідь. $x \in (-2; 4)$.
2. Задайте формулою відстань між точками на числовій прямій, що відповідають числам a та b .
Відповідь. $|a - b|$ або $|b - a|$.

- 3.** Задано послідовність $a_n = \frac{1}{2^n}$. Починаючи з якого члена послідовності усі інші члени послідовності менші за 0,01?
Відповідь. Сьомого.
- 4.** Підберіть одну з можливих формул n -го члена послідовності, першими членами якої є числа 0, 2, 0, 2, 0,
Відповідь. $1 + (-1)^n$.
- 5.** Обчисліть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q , якщо $b_1 = 24$, $q = \frac{3}{4}$.
Відповідь. 96.

Як я вирішую певну проблему?

- Задача.** Під час багаторазового збереження зображення з алгоритмом стиснення кожне нове збереження зменшує розмір файлу. Розмір файлу (у Мб) після n -го збереження задається послідовністю $S_n = 0,85S_{n-1} + 0,3$, $S_1 = 12$.
- 1) Обчисліть розміри файлу після перших 4 збережень.
 - 2) Знайдіть границю послідовності S_n .
 - 3) Поясніть зміст знайденої границі.

III. Границя числової послідовності (5 хв)

Означення. Число a називають **границею послідовності** (a_n) , якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)|a_n - a| < \varepsilon.$$

Послідовність, яка має границю, називають **збіжною**.

Послідовність, яка не має границі, називають **розбіжною**.

Для кращого розуміння означення границі послідовності можна скористатися Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/hdVNRH8q>



Властивості збіжних послідовностей

- 1.** Числова послідовність може мати лише одну границю.
- 2.** Збіжна послідовність є обмеженою. (Якщо послідовність не обмежена, то вона не збіжна).
- 3.** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ і $a > b \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)a_n > b$;
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ і $a < b \Rightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)a_n < b$.

4. $(\forall n \in N)(a_n \geq b_n)$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Rightarrow a \geq b$.
5. Теорема про двох конвоїрів. $(\forall n \in N)(a_n \leq c_n \leq b_n)$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Доведіть, користуючись означенням границі послідовності, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + n + 1} = 2$.

Доведення. $\left| \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + n + 1} - 2 \right| = \frac{|-7n - 1|}{n^2 + n + 1} = \frac{7n + 1}{n^2 + n + 1} \leq \frac{7n + 7}{n^2 + n} = \frac{7}{n} \leq \varepsilon,$

Отже, $n \geq \frac{7}{\varepsilon}$, тобто починаючи із числа $n = \left\lceil \frac{7}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ нерівність $\left| \frac{2n^2 - 5n + 1}{n^2 + n + 1} - 2 \right| < \varepsilon$

виконується для будь-якого наперед заданого додатного числа ε .

7. Доведіть, користуючись означенням границі послідовності, що $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n) = 1$.

Доведення. $\left| \sqrt{n^2 + 2n} - n - 1 \right| = \left| \sqrt{n^2 + 2n} - (n + 1) \right| =$
 $= \left| \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - (n + 1))(\sqrt{n^2 + 2n} + (n + 1))}{\sqrt{n^2 + 2n} + (n + 1)} \right| = \left| \frac{(n^2 + 2n) - (n + 1)^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + (n + 1)} \right| =$
 $= \left| \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{\sqrt{n^2 + 2n} + (n + 1)} \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} + (n + 1)} \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon.$

Отже, $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, тобто починаючи із числа $n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ нерівність $\left| \sqrt{n^2 + 2n} - n - 1 \right| < \varepsilon$

виконується для будь-якого наперед заданого додатного числа ε .

IV. Нескінченно малі послідовності та їхні властивості (5 хв)

Означення. Послідовність a_n називають **нескінченно малою**, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Теорема. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Leftrightarrow a_n = \alpha + \beta_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

Властивості нескінченно малих послідовностей

1. Добуток обмеженої і нескінченно малої послідовностей є нескінченно малою.
2. Добуток збіжної і нескінченно малої послідовностей є нескінченно малою.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0, a > 1$.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$, де $|q| < 1$.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, a_n \geq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = 0, k \in \mathbb{N}, k > 1$.
8. Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.
9. Послідовність $|\alpha_n|$ є нескінченно малою тоді і тільки тоді коли послідовність α_n є нескінченно малою.

Ілюстративні приклади (5 хв)

8. Обчисліть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{0,5}$.

Розв'язання. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{0,5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{0,5}} = 1$.

Відповідь. 1.

9. Обчисліть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)!}$.

Розв'язання. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(n+1) \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{3^n}{n!} = 0$, як добуток обмеженої послідовності та нескінченно малої.

Відповідь. 1.

10. Доведіть, що послідовність $a_n = q^n$, де $|q| < 1$ нескінченно мала.

Доведення. Якщо $q = 0$, то $a_n = 0$ і $\lim a_n = 0$. Нехай $q \neq 0$. Тоді $0 < |q| < 1$ і $\frac{1}{|q|} > 1$.

Існує таке додатне число γ , що $\frac{1}{|q|} = 1 + \gamma$. Згідно з нерівністю Бернуллі для $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(\frac{1}{|q|} \right)^n = (1 + \gamma)^n \geq 1 + n\gamma > n\gamma.$$

Звідси $|q|^n < \frac{1}{n\gamma}$ при $n \in \mathbb{N}$. Візьмемо $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\gamma\epsilon} \right\rceil + 1$, де $\gamma = \frac{1}{|q|} - 1$.

При $n > n_0$ $n > \left\lceil \frac{1}{\gamma\epsilon} \right\rceil + 1 > \frac{1}{\gamma\epsilon}$ або $\frac{1}{n\gamma} < \epsilon$. Отже, при $n > n_0$ $|q^n - 0| = |q|^n < \frac{1}{n\gamma} < \epsilon$. Це

означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $0 < |q| < 1$. Враховуючи, що $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ і при $q = 0$, маємо:

$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$.

V. Арифметичні дії зі збіжними послідовностями (3 хв)

Теорема (границя суми). Якщо послідовності a_n і b_n є збіжними, то послідовність $a_n + b_n$ також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Теорема (границя добутку). Якщо послідовності a_n і b_n є збіжними, то послідовність $a_n \cdot b_n$ також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Теорема (границя частки). Якщо послідовності a_n і b_n є збіжними, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0, b_n \neq 0$, то послідовність $\frac{a_n}{b_n}$ також є збіжною, причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 11.** Обчисліть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+6}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник дробу на $n \neq 0$.

$$\text{Маємо: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{6}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{1}{n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{6}{n} \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n}} = \frac{4 - 0}{2 + 0} = 2.$$

Відповідь. 2.

- 12.** Обчисліть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{3n^2 - 14n - 2}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник дробу на $n^2 \neq 0$.

$$\text{Маємо: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{14}{n} - \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{14}{n} - \frac{2}{n^2} \right)} = \frac{1 + 0 + 0}{3 - 0 - 0} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь. $\frac{1}{3}$.

- 13.** Обчисліть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3}{2n^2 - n + 1} - \frac{3n^2 + 1}{3n - 2} \right)$.

Розв'язання.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3(3n-2) - (3n^2+1)(2n^2-n+1)}{(2n^2-n+1)(3n-2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^3 - 5n^2 + n - 1}{6n^3 - 7n^2 + 5n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{6 - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3}} = -\frac{1}{6}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{6}$.

Можна узагальнити спосіб знаходження границі послідовності чисельник і знаменник якого є многочленами від змінної n .

Нехай $P(n) = a_0 n^q + a_1 n^{q-1} + \dots + a_{q-1} n + a_q, q \in N$; $Q(n) = b_0 n^t + b_1 n^{t-1} + \dots + b_{t-1} n + b_t, t \in N$.

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & q = t, (a_0 b_0 \neq 0). \\ 0, & q < t. \end{cases}$$

VI. Обчислення границь числових послідовностей (1 хв)

Корисно буде також нагадати теорему Вейерштрасса.

Теорема (теорема Вейерштрасса). Кожна зростаюча і обмежена зверху (спадна і обмежена знизу) послідовність має границю.

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 14.** Відомо, що $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Розв'язання. Дана сума містить n доданків. Найбільший з них $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, а найменший $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$. Тому $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < a_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Помітимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 1$ та

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$

Тому за теоремою про двох конвоїрів $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Відповідь. 1.

- 15.** Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+k} - \sqrt{n+m}}{\sqrt{n+t} - \sqrt{n+p}}$, p, q, k, m, t — будь-які дійсні числа, $t \neq p$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+k} - \sqrt{n+m}}{\sqrt{n+t} - \sqrt{n+p}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k-m)(\sqrt{n+t} + \sqrt{n+p})}{(t-p)(\sqrt{n+k} + \sqrt{n+m})} = \frac{k-m}{t-p} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+t} + \sqrt{n+p}}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n+m}} = \\ &= \frac{k-m}{t-p} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{t}{n}} + \sqrt{1+\frac{p}{n}}}{\sqrt{1+\frac{k}{n}} + \sqrt{1+\frac{m}{n}}} = \frac{k-m}{t-p} \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+\frac{t}{n}} + \sqrt{1+\frac{p}{n}} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+\frac{k}{n}} + \sqrt{1+\frac{m}{n}} \right)} = \frac{k-m}{t-p} \cdot \frac{1+1}{1+1} = \frac{k-m}{t-p}. \end{aligned}$$

Відповідь. $\frac{k-m}{t-p}$.

- 16.** Послідовність (a_n) задано рекурентним способом: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Дослідіть послідовність (a_n) на збіжність і у випадку збіжності знайдіть границю.

Розв'язання. Зрозуміло, що $a_n > 0$

Запишемо $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$, $a_{n+2}^2 = 2 + a_{n+1}$. Звідси $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_{n+1} - a_n$. Очевидно, що $a_2 - a_1 > 0$. Водночас з припущення $a_{n+1} - a_n > 0$ випливає, що $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 > 0$, тобто

$a_{n+2} - a_{n+1} > 0$. За методом математичної індукції отримуємо, що (a_n) — зростаюча послідовність.

Маємо $a_n^2 < a_{n+1}^2 = 2 + a_n$. Звідси $a_n^2 < 2 + a_n, -1 < a_n < 2$. Тому (a_n) — обмежена зверху послідовність.

За теоремою Вейерштраса існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Знайдемо значення границі a .

Скористаємося рівністю $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + a}$,

то маємо рівняння $a = \sqrt{2 + a}$. Звідси $a = 2$.

Відповідь. 2.

VII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (8–10 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час багаторазового збереження зображення з алгоритмом стиснення кожне нове збереження зменшує розмір файлу. Розмір файлу (у Мб) після n -го збереження задається послідовністю $S_n = 0,85S_{n-1} + 0,3$, $S_1 = 12$.

- 1) Обчисліть розміри файлу після перших 4 збережень.
- 2) Доведіть, що послідовність S_n збіжна та знайдіть її границю.
- 3) Поясніть зміст знайденої границі.

Розв'язання. 1) $S_1 = 12$,

$$S_2 = 0,85 \cdot 12 + 0,3 = 10,5,$$

$$S_3 = 0,85 \cdot 10,5 + 0,3 = 9,225,$$

$$S_4 = 0,85 \cdot 9,225 + 0,3 = 8,14125.$$

2) Доведемо, що послідовність S_n спадає. Для цього скористаємось методом математичної індукції.

$$S_1 > S_2.$$

Припустимо, що $S_n > S_{n-1}$.

$$S_n = 0,85S_{n-1} + 0,3, \quad S_{n+1} = 0,85S_n + 0,3, \quad \text{звідки} \quad S_{n+1} - S_n = 0,85(S_n - S_{n-1}).$$

Скориставшись припущенням, що $S_n > S_{n-1}$ можна зробити висновок, що $S_{n+1} > S_n$, тобто послідовність S_n — зростаюча.

Очевидно, що усі члени послідовності S_n є невід'ємними, тому послідовність S_n — обмежена знизу.

За теоремою Вейерштраса послідовність S_n має границю. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$, тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = s.$$

Скористаємось рівністю $S_n = 0,85S_{n-1} + 0,3$ та теоремами про арифметичні дії з границями числових послідовностей отримаємо:

$$s = 0,85s + 0,3, \quad 0,15s = 0,3, \quad s = 2, \quad \text{тобто} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2.$$

3) 2 МБ — це мінімальний можливий розмір файлу, до якого прагне алгоритм стиснення.

Нескінченна кількість збережень не зробить файл меншим за 2 МБ, але може як завгодно близько до цього значення наблизитись.

Відповідь. 1) 12 Мб; 10,5 Мб; 9,225 Мб; 8,14125 Мб; 2) 2.

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. Доведіть, користуючись означенням границі, що:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2n+3} = 2$;

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-5n}{3n+2} = -\frac{5}{3}$;

6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{5-7n} = -\frac{3}{7}$.

2. Знайдіть границю послідовності:

1) $a_n = \frac{10n-6}{4n+7}$;

2) $a_n = \frac{3-4n}{13n+2}$;

3) $a_n = \frac{7n}{2-5n}$;

4) $a_n = \frac{4n^2-1}{n^2+5n+2}$.

3. Укажіть номер n_0 такого члена послідовності (x_n) , починаючи з якого всі члени послідовності належатимуть ϵ -околу точки a :

1) $x_n = \frac{1}{2n}, a = 0, r = 0,1$;

2) $x_n = 3 + \frac{1}{n^2}, a = 3, r = 0,2$;

3) $x_n = 1 + \frac{2}{n^2}, a = 1, r = 0,01$;

4) $x_n = -\frac{3}{n}, a = 0, r = 0,1$.

4. Для даної збіжної послідовності a_n знайдіть таку нескінченно малу послідовність (β_n) , що $a_n = a + \beta_n$, де a — границя послідовності a_n :

1) $a_n = \frac{1}{n}$;

2) $a_n = \frac{n}{n+1}$;

3) $a_n = \frac{4n-2}{3n+1}$;

4) $a_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$.

5. Знайдіть границю:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{5}{n^2} \right)$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 + \frac{1}{n^2} \right)^2 - n^4$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-7n^3}{n^3}$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{11n-2^n}{2^n}$.

6. Знайдіть принаймні одне число n_0 таке, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність:

1) $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{20}$;

2) $\left| \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right| < 0,01$.

Рівень В

1. Доведіть, користуючись означенням границі, що:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 10n - 1}{3n^2 + 2n + 3} = \frac{1}{3}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + n - 14}{3n^2 + 12n - 25} = 2\frac{1}{3}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 15}{4n^2 - 5n - 21} = \frac{1}{2}$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 11n + 3}{3n^2 - 23n - 14} = \frac{2}{3}$.

2. Знайдіть границю послідовності:

1) $a_n = \frac{2-6n-3n^2}{10n+2n^2-1}$;

2) $a_n = \frac{2n+3}{5n^2-n-2}$;

3) $a_n = \frac{3}{6n^2+n+2}$;

4) $a_n = \frac{2n^3-n^2+4n+1}{5n^3-3n-2}$.

3. Укажіть номер n_0 такого члена послідовності (x_n) , починаючи з якого всі члени послідовності належатимуть ϵ -околу точки a :

1) $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, a=0, r=\frac{1}{27}$;

2) $x_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}, a=0, r=\frac{1}{64}$;

3) $x_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n, a=2, r=\frac{1}{128}$;

4) $x_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n, a=3, r=\frac{1}{81}$.

4. За допомогою теореми Вейерштрасса доведіть, що послідовність x_n має границю:

1) $x_n = \frac{3n^2+2}{n^2}$;

2) $x_n = \frac{n^2-5}{n^2+5}$.

5. Обчисліть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$:

1) $x_n = \frac{7}{n} + \frac{8}{\sqrt{n}} + \frac{9}{n^3}$;

2) $x_n = \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2} - \frac{5}{n^3} + \frac{13}{n^4}$;

3) $x_n = 6 - \frac{7}{n^2} - \frac{3}{n} - \frac{3}{\sqrt{n}}$;

4) $x_n = \frac{1}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}} - 4 + \frac{7}{n^2}$.

6. Обчисліть:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$.

7. Спростіть вираз:

1) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + \dots$;

2) $\cos x - \cos^2 x + \cos^3 x - \cos^4 x + \dots$;

3) $\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^6 x + \cos^8 x + \dots$;

4) $1 - \sin^3 x + \sin^6 x - \sin^9 x + \dots$.

8. Доведіть, що послідовність (y_n) розбіжна:

1) $y_n = \frac{2+(-1)^n}{3}$;

2) $y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$

9. Доведіть, що:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n(\sqrt{n^2+1} - n) = 1$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) = 0$.

10. Знайдіть границі послідовностей:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+n-n^2}{2n^2-1} \right)^3$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7n}}{n-5}$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2-n)(n-1)}{5n^4+2}$;

4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{2}{n^2} - 5 \right) \left(\frac{1}{n^3} - 1 \right)$.

11. Знайдіть границі послідовностей:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3}{1+5n^2} + \frac{1-3n^2}{3n+1} \right);$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4n^2 + n + 1} - 2n \right);$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+6+36+\dots+6^{n-1}}{4 \cdot 6^{n+2} + 1}.$

12. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Знайдіть границю:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1};$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n + a_{n+2}}{(a_n - n)^2 + 1}.$

Рівень С

1. Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}.$

2. Знайдіть k , якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1975}}{n^k - (n-1)^k} = \frac{1}{1976}.$

3. Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos 2\pi \left(\frac{1}{3}n - 4 \right)}{\sqrt{n}}.$

4. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$ Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$

5. $a_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt{n^2 + 2n}.$ Знайдіть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$

6. Побудуйте графік функції $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}.$

7. Творче завдання. Напишіть програму, яка графічно ілюструє збіжність послідовності, що була задана у прикладній задачі ($S_n = 0,85S_{n-1} + 0,3$, $S_1 = 12$).

ІХ. Рефлексія (2 хв)

1. Я знаю означення границі числової послідовності та умію користуватися ним для доведення.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

2. Я розумію, що таке нескінченно малі послідовності та знаю їхні основні властивості.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

3. Я пригадав/пригадала теореми про арифметичні дії зі збіжними числовими послідовностями.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

4. Я умію обчислювати границі числових послідовностей.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- 5.** Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

Можливі теми проєктів

- 1.** Обчислення границь числових послідовностей заданих рекурентно.
- 2.** Границя послідовності як модель стабілізації процесів.
- 3.** Візуалізація процесу збіжності та розбіжності числових послідовностей за допомогою однієї з мов програмування.
- 4.** Типові помилки при знаходженні границь числових послідовностей. Математичні софізми.
- 5.** Числові послідовності та їхні границі в програмуванні. Ітераційні методи.