

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 10. Односторонні границі функції в точці. Точки розриву

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Графічна ілюстрація лівої (правої) границь функції в точці.
2. Означення лівої (правої) границі функції в точці (односторонніх границь).
3. Одночасне існування лівої та правої границь функції в точці.
4. Точки розриву.
5. Графічна ілюстрація точок розриву.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи [12 МАО 1.1.2–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

добирає доцільні математичні поняття, факти і послідовність дій для розв'язання проблемних ситуацій [12 МАО 4.2.1–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи допомагають односторонні границі точніше описати поведінку функції біля “проблемних” точок?
- 2) Навіщо вводити нове поняття – односторонню границю, якщо вже існує звичайна границя функції в точці?
- 3) Чи можлива ситуація, коли обидві односторонні границі існують, але звичайної границі в точці немає? Що це означає геометрично?
- 4) Як зміниться уявлення про границю, якщо дозволити наближення до точки лише з одного напрямку?
- 5) Яку додаткову інформацію дають односторонні границі порівняно зі звичайною границею функції в точці?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right)$.
Відповідь. 9.
2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$.
Відповідь. 1.

3. Чи має границю функція $f(x) = \begin{cases} x^3 + 4, & x \leq 2 \\ 5x^2, & x > 2 \end{cases}$ в точці $x_0 = 2$?

Відповідь. Ні.

4. Знайдіть область визначення функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 20}}$.

Відповідь. $D(f) = (-\infty; -4) \cup (5; +\infty)$.

5. Чи є функція $f(x) = |x + 2|$ неперервною в точці $x = -2$?

Відповідь. Так.

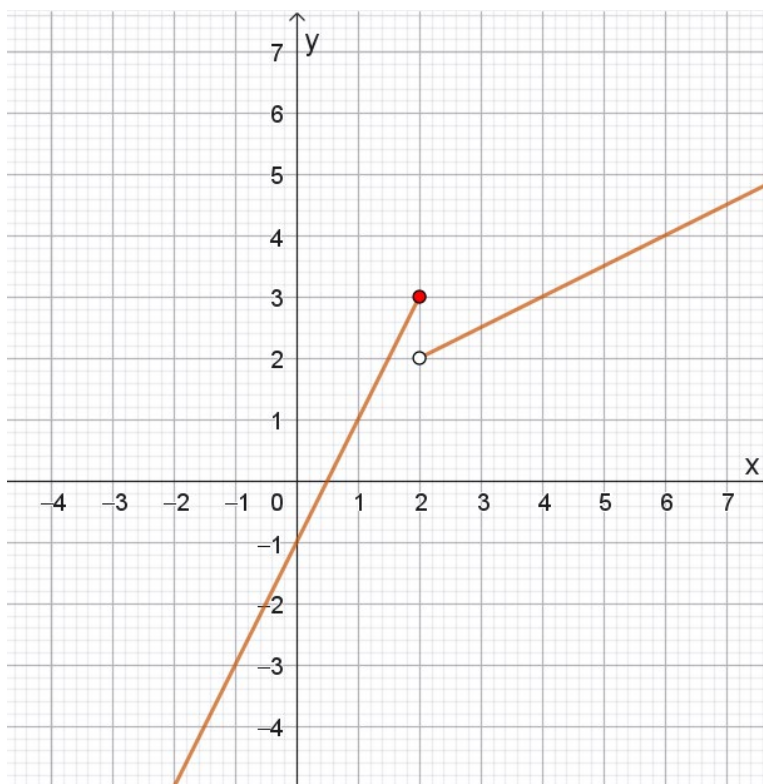
Як я вирішую певну проблему?

Задача. Автомобіль рухається до світлофора. У момент часу $t = 20$ (час вимірюється в секундах) світлофор змінює сигнал, і водій різко змінює режим руху. До моменту $t = 20$ автомобіль рівномірно гальмує, і його швидкість поступово зменшується. У момент $t = 20$ відбувається миттєва зміна режиму: водій одразу натискає на газ. Швидкість автомобіля описується функцією $v(t)$ (швидкість вимірюється в кілометрах за годину): $v(t) = \begin{cases} 20 - t, & 0 < t < 20, \\ 5 + \sqrt{t - 20}, & t > 20. \end{cases}$ Знайдіть ліву та праву границі швидкості при $t = 20$. З'ясуйте, чи існує границя функції $v(t)$ в точці $t = 20$.

III. Графічна ілюстрація лівої (правої) границі функції в точці (3–4 хв)

Нехай задано функцію $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2, \\ 0,5x + 1, & x > 2. \end{cases}$

Побудуємо її графік (див. рисунок).



З графіка видно, що функція $f(x)$ не має границі в точці $x = 2$.

Проте, якщо розглянути функції $g(x) = 2x - 1, x \leq 2$ та $h(x) = 0,5x + 1, x > 2$, то бачимо, що в точці $x = 2$ функція $g(x)$ має границю, яка дорівнює 3, а функція $h(x)$ має границю, яка дорівнює 2.

Границю функції $g(x)$ в точці $x = 2$ природно назвати лівою або лівосторонньою границею функції $f(x)$ в точці $x = 2$, а границю функції $h(x)$ в точці $x = 2$ називають правою або правосторонньою границею функції $f(x)$ в точці $x = 2$.

IV. Означення лівої (правої) границі функції в точці (односторонніх границь)

Означення. Число a називають *лівою (правою) границею функції f у точці x_0* , якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значень аргументу функції f , елементи x_n якої менші (більші) від x_0 , відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значень функції збігається до числа a .

Ліву границю функції $f(x)$ у точці x_0 позначають $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

Праву границю функції $f(x)$ у точці x_0 позначають $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Ліву та праву границі функції в точці називають *односторонніми границями*.

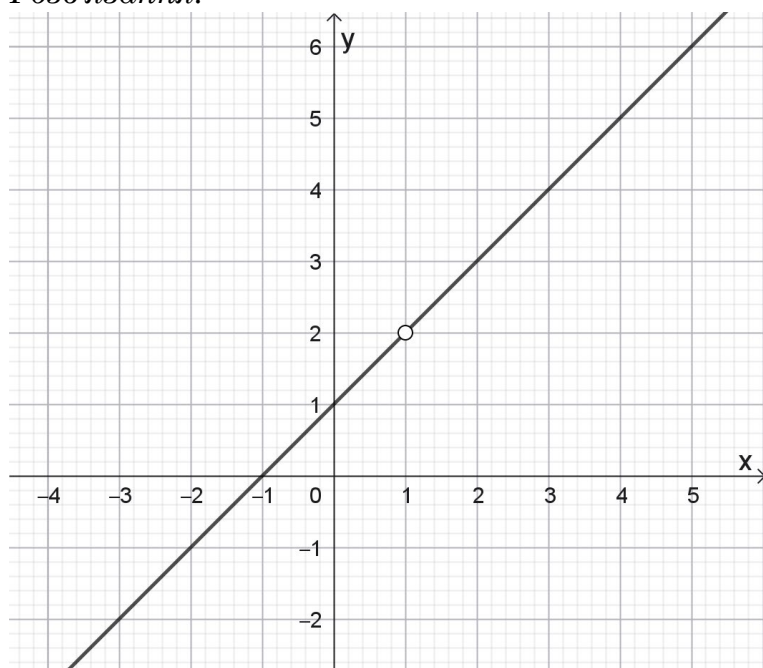
Відповідно для функції $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 2, \\ 0,5x + 1, & x > 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 2.$$

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ та знайдіть ліву і праву границі цієї функції в точці $x = 1$.

Розв'язання.



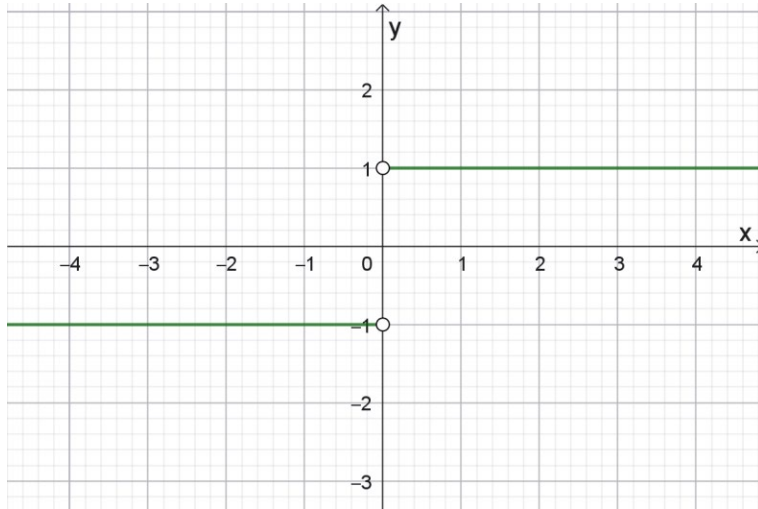
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2.$$

Відповідь. 2.

7. Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{|x|}{x}$ та знайдіть ліву і праву границі цієї функції в точці $x = 0$.

Розв'язання.



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Відповідь. -1; 1.

V. Одночасне існування лівої та правої границь функції в точці

Теорема. Якщо в точці x_0 ліва і права границі функції існують і рівні, то в цій точці існує границя функції, яка дорівнює лівій і правій границям.

Доведення. За означенням лівої і правої границь для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значень аргументу функції f , елементи x_n якої менші або більші від x_0 , відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значень функції збігається до деякого числа a .

Отже, послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ збігається до числа a при будь-якій збіжній до x_0 послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, що й треба було довести.

Із ознаки неперервності функції в точці слідує таке твердження:

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, то функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0 .

Ілюстративні приклади (10 хв)

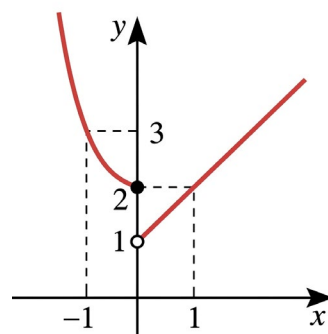
8. Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$ на неперервність та побудуйте її графік.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x^2 + 2) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x + 1) = 1.$$

Функція не є неперервною в точці $x = 0$.



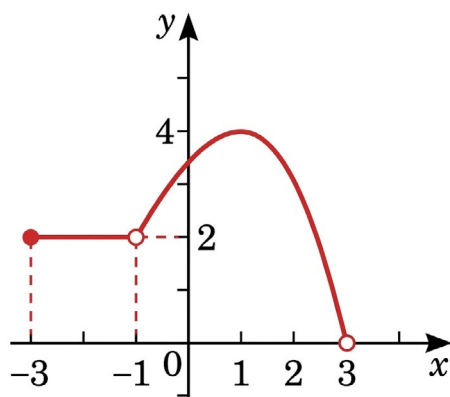
VI. Точки розриву

Означення. Якщо існує послідовність відмінних від x_0 значень аргументу функції $f(x)$, яка збігається до x_0 , і функція $f(x)$ у точці x_0 не є неперервною, то цю точку називають **точкою розриву функції $f(x)$** .

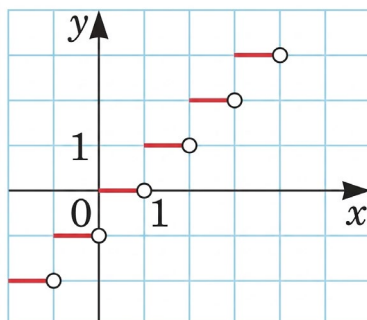
VII. Графічна ілюстрація точок розриву

Наведемо декілька різних прикладів точок розриву.

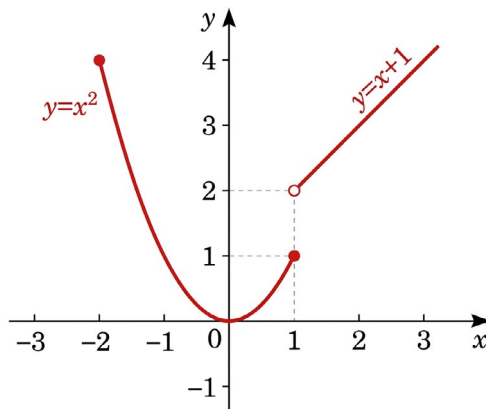
- 1) Точка $x = -1$ є точкою розриву функції $f(x)$, графік якої зображений на рисунку.



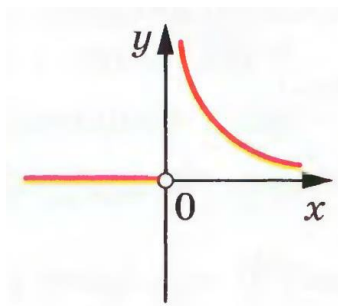
- 2) Кожна точка виду $x_0 = k$, $k \in \mathbb{Z}$, є точкою розриву функції $y = [x]$ (див. рисунок).



3) Точка $x = 1$ є точкою розриву функції $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x + 1, & x > 1, \end{cases}$ графік якої зображений на рисунку.



4) Функція $y = \frac{|x| + x}{x^2}$, графік якої зображено на рисунку, має розрив в точці $x = 0$.



Ілюстративні приклади (5 хв)

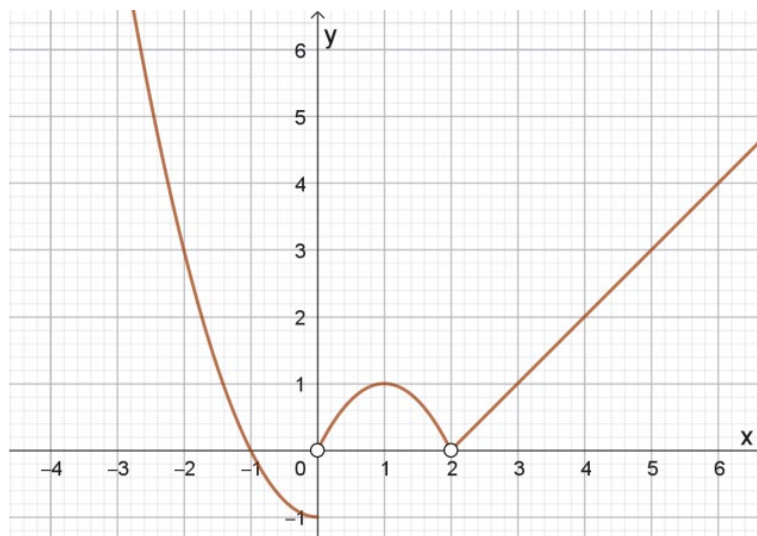
9. Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0, \\ 2x - x^2, & 0 < x < 2, \\ x - 2, & x > 2. \end{cases}$ на неперервність і зобразіть схематично графік функцій в околах точок розриву.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x^2 - 1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (2x - x^2) = 0$.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, то функція в точці $x = 0$ має розрив.

$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (2x - x^2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x - 2) = 0$.

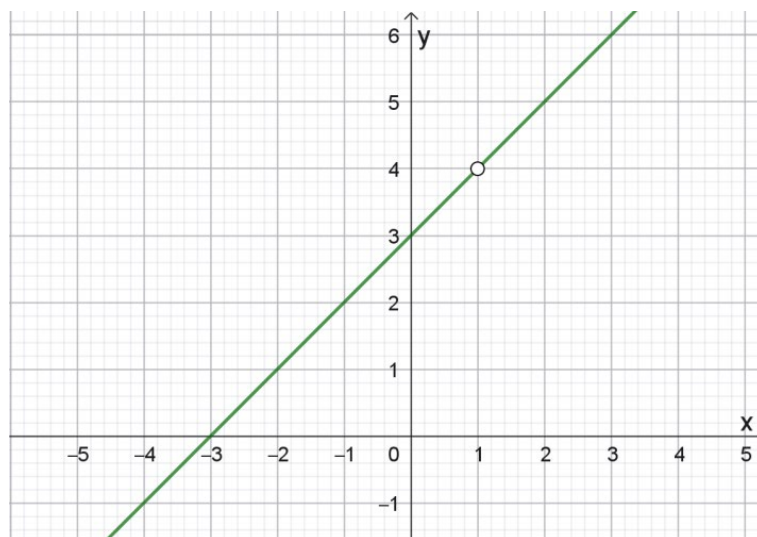
Хоча $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$, проте значення функції в точці $x = 2$ не існує, отже в цій точці функція має розрив.



- 10.** Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ на неперервність і зобразіть схематично графік функції в околах точок розриву.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 3) = 4,$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 3) = 4.$



- 11.** Довизначте функцію $y = \frac{x^2 - x}{x}$ в точці розриву так, щоб вона стала неперервною.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1.$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1.$

Функція $y = \frac{x^2 - x}{x}$ невизначена в точці $x = 0$, але має в цій точці рівні односторонні границі.

Отже, досить покласти $f(0) = -1$, щоб функція стала неперервною.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

VIII. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Автомобіль рухається до світлофора. У момент часу $t = 20$ (час вимірюється в секундах) світлофор змінює сигнал, і водій різко змінює режим руху. До моменту $t = 20$ автомобіль рівномірно гальмує, і його швидкість поступово зменшується. У момент $t = 20$ відбувається миттєва зміна режиму: водій одразу натискає на газ. Швидкість автомобіля описується функцією $v(t)$ (швидкість вимірюється в кілометрах за годину): $v(t) = \begin{cases} 20 - t, & 0 < t < 20, \\ 5 + \sqrt{t - 20}, & t > 20. \end{cases}$ Знайдіть ліву та праву границі швидкості при $t = 20$. З'ясуйте, чи існує границя функції $v(t)$ в точці $t = 20$.

$$\text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow 20^-} v(t) = \lim_{x \rightarrow 20^-} (20 - t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 20^+} v(t) = \lim_{x \rightarrow 20^+} (5 + \sqrt{t - 20}) = 5.$$

Отже, функція $v(t)$ не має границі в точці $t = 20$.

Відповідь. 0; 5; границі немає.

IX. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

1. Назвіть точки розриву функції:

$$1) y = \frac{5}{x};$$

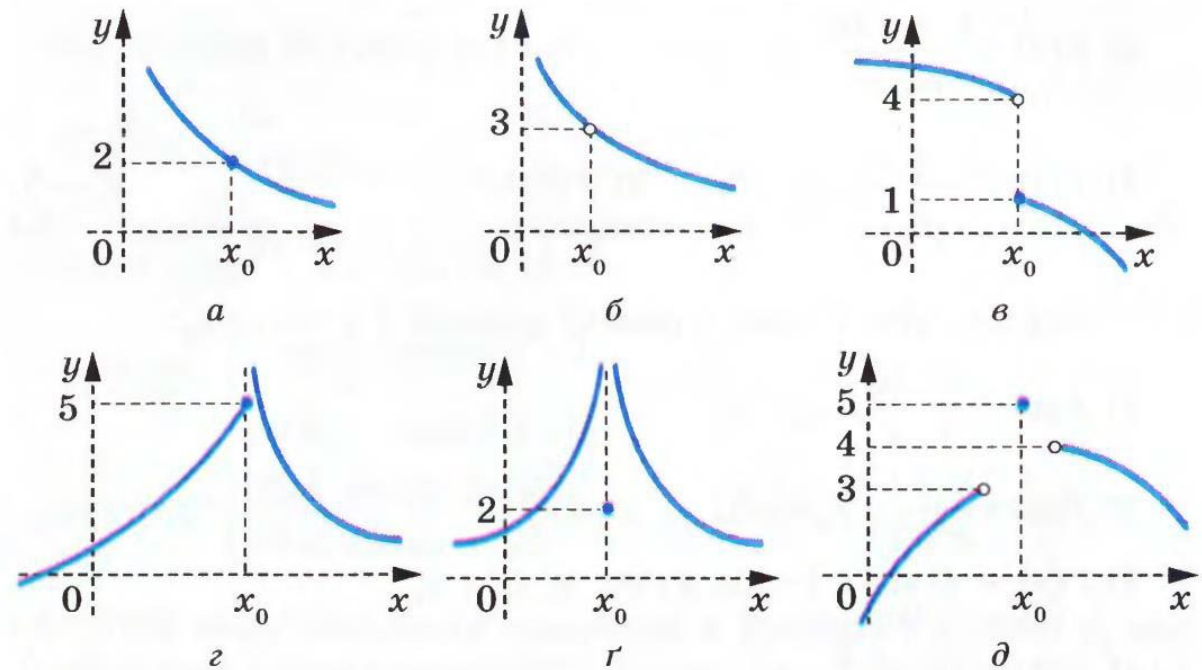
$$2) y = \frac{x + 3}{x^2 - 2}.$$

2. Побудуйте графік функції $f(x)$ та доведіть, що функція має розрив в точці x_0 , використовуючи односторонні границі:

$$1) f(x) = \begin{cases} x + 1, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

3. За допомогою графіка функції $f(x)$ (див. рисунок) з'ясуйте, чи має функція $f(x)$ ліву (праву) границю в точці x_0 . У разі позитивної відповіді укажіть значення цієї границі.



4. Знайдіть ліву й праву границі функції у точці x_0 :

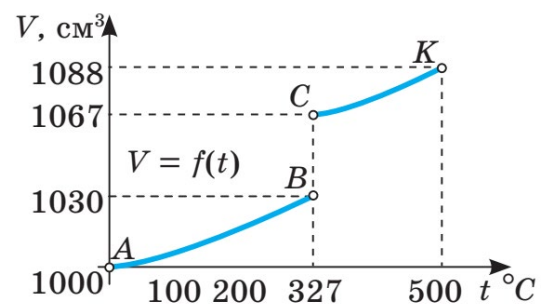
1) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}, x_0 = -3$;

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}, x_0 = 1$.

5. Дослідіть на неперервність та побудуйте схематично графік функції

$$y = \begin{cases} x - 2, & x \leq 3 \\ 6 - x, & x > 3 \end{cases}$$

6. На рисунку зображено графік залежності об'єму куска свинцю від температури нагрівання. Чи є ця залежність функцією? Чи має функція точки розриву? Наведіть приклади інших розривних функцій, що описують фізичні та хімічні процеси.



Рівень В

1. Побудуйте графік функції та знайдіть ліві й праві границі функції в точці $x = 2$:

1) $f(x) = \begin{cases} |x - 2|, & x < 2, \\ |x - 4|, & x > 2; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \geq 2, \\ x-1, & x < 2. \end{cases}$

2. Установіть чи є функція $y = \frac{1+x}{x+3}$ неперервною в точці $x = -3$ та визначте, чи має функція ліві й праві границі в цій точці та знайдіть їх.

3. Установіть чи є функція $y = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}, & x \neq -2, \\ 3, & x = -2 \end{cases}$ неперервною в точці $x = -2$ та визначте, чи має функція ліві й праві границі в цій точці та знайдіть їх.

4. Дослідіть функцію на неперервність і знайдіть значення функції в точці розриву:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < -2, \\ x^2, & -2 \leq x \leq 2, \\ -x + 6, & x > 2. \end{cases}$$

5. Побудуйте графік функції і знайдіть значення функції в точках розриву:

$$1) f(x) = \begin{cases} x + 5, & x < -1, \\ x^2 + 3, & -1 \leq x < 2, \\ 3x - 5, & x \geq 2. \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} x + 3, & x > 0, \\ x - 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

6. Побудуйте графік функції $f(x)$ та доведіть, що функція має розрив в точці x_0 , використовуючи односторонні границі:

$$1) f(x) = \operatorname{sign}(x + 1), \quad x_0 = -1; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

7. Знайдіть ліву й праву границі функції $f(x)$ у точці x_0 :

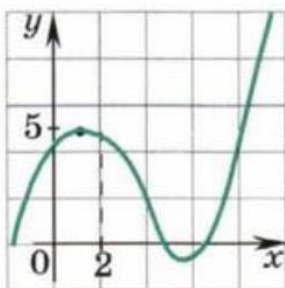
$$1) f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin x}, \quad x_0 = \pi; \quad 2) f(x) = \frac{x + |x|}{x}, \quad x_0 = 0.$$

8. Дослідіть на неперервність та побудуйте схематично графік функції:

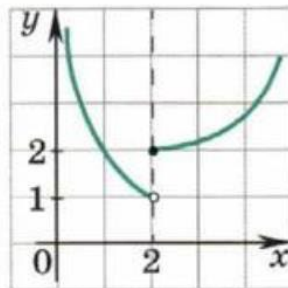
$$1) y = \begin{cases} x^2, & x \leq 3, \\ x + 6, & x > 3, \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 4 - x^2, & x < 2, \\ -1, & x \geq 2. \end{cases}$$

9. За допомогою графіків функцій (див. рисунок) установіть:

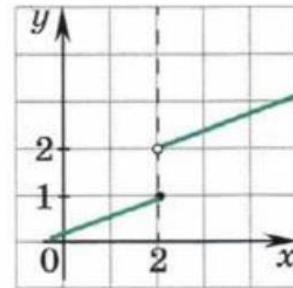
- 1) які функції мають ліву й праву границі в точці $x = 2$;
2) знайдіть границю функції в точці $x = 2$, якщо вона існує.



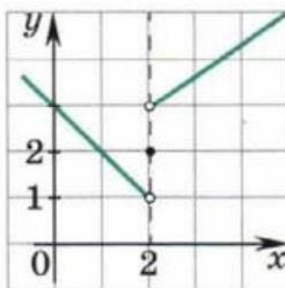
a)



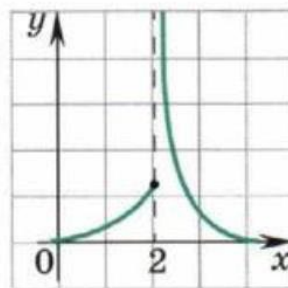
б)



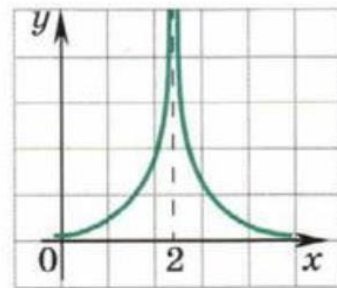
в)



г)



д)



е)

10. Знайдіть односторонні границі функції $f(x)$ в точці $x = 1$:

$$1) f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x \leq 1, \\ 3x - 5, & x > 1 \end{cases} \quad 2) f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}.$$

11. Знайдіть односторонні границі в точках розриву:

$$1) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 1, \\ x - 4, & x > 1; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2x}, & x < 0. \end{cases}$$

12. Які з наведених тверджень є правильними:

- 1) неперервна функція має границю в кожній точці області визначення;
- 2) неперервна функція може не мати границі в деякій точці області визначення;
- 3) функція є неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$;
- 4) розривна функція не має границі в точці розриву;
- 5) розривна функція може мати границю в точці розриву;

Рівень С

1. Знайдіть ліву й праву границі функції $f(x)$ у точці x_0 :

$$1) f(x) = \sin |x| \operatorname{ctg} x, x_0 = 0; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \operatorname{ctg} x, & x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

2. При яких значеннях параметра a функція $f(x)$ у точці x_0 має рівні ліву та праву границі?

$$1) f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x + a, & x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \{x\}, & x > 2, \\ x + a, & x < 2, \end{cases} \quad x_0 = 2.$$

3. Чи існує така визначена на $\mathbb{R}$ функція $f(x)$, що границя $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ існує для всіх $x_0 \in \mathbb{R}$, але границя $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ не існує принаймні для одного x_0 ?

4. Чи існує така визначена на $\mathbb{R}$ функція $f(x)$, що $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -1$ для всіх $a \leq 0$ і при цьому $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = 1$ для всіх $b \geq 0$?

5. Дослідіть функцію на неперервність та побудуйте схематично графік функції:

$$1) y = \begin{cases} -x, & x \leq -1, \\ x^2, & -1 < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 2, \\ 2, & x \geq 2; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ (x-1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ 3-x, & x > 2. \end{cases}$$

6. Дослідіть функцію на неперервність та побудуйте схематично графік функції:

$$1) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1, \\ x, & x \geq 1; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

7. Творче завдання. Створіть інфографіку або презентацію на тему: «Як комп'ютер "бачить" односторонні границі».

Х. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

(–) що залишилося незрозумілим:

(?) що здивувало або зацікавило:

Можливі теми проєктів

1. Односторонні границі як інструмент опису різкої зміни процесу.
2. Поведінка кусково-заданих функцій поблизу точки розриву.
3. Моделювання реальних процесів за допомогою кусково-заданих функцій з розривами.
4. Роль односторонніх границь у формуванні поняття неперервності функції.
5. Математичне пояснення “різких переходів” у прикладних задачах.