

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 11. Односторонні границі функції в точці. Класифікація точок розриву

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

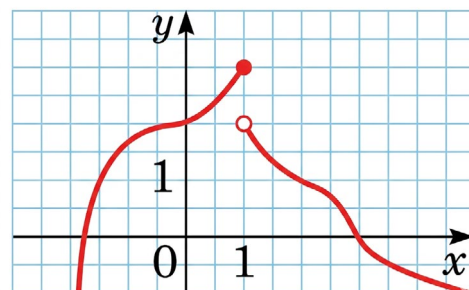
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) дізнаєтесь, що таке точки усунютого розриву;
- 2) вивчите означення точки розриву першого роду;
- 3) дізнаєтесь, що таке точки розриву другого роду;
- 4) навчитеся розрізняти типи точок розриву функцій, заданих графіком;
- 5) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

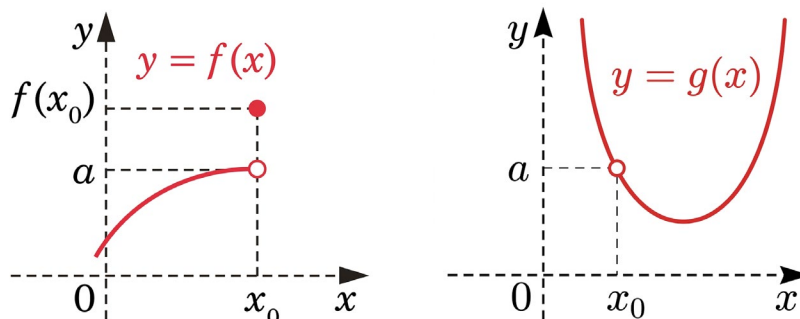
II. Повторення

1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 3x$.
2. Чи є неперервною функція $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3, \\ 6, & x = 3 \end{cases}$ в точці $x = 3$?
3. Чи є неперервною функція, графік якої зображений на рисунку в точці x_0 ?
4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$.
5. Чи існує границя функції, графік якої зображений на рисунку, в точці $x = 1$?



III. Означення точок усувного розриву

Розглянемо функції $f(x)$ і $g(x)$, графіки яких зображені на рисунку.



Точка x_0 для обох цих функцій є точкою розриву. Проте в точці x_0 границя функції існує і дорівнює a .

Існують функції $f_1(x)$ і $g_1(x)$, які є неперервними в точці x_0 і які відрізняються від функцій $f(x)$ і $g(x)$ лише поведінкою в точці x_0 :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ a, & x = x_0, \end{cases} \quad g_1(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0, \\ a, & x = x_0. \end{cases}$$

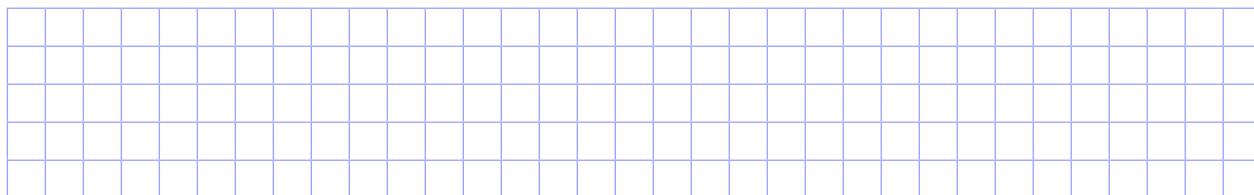
Таким чином ми ніби «усунули» розрив в точці x_0 .

Означення. Точку розриву x_0 називають **точкою усувного розриву** функції $f(x)$, якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Приклад 1. Доведіть, що точка $x = 0$ є точкою усувного розриву функції $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ не визначена в точці $x = 0$ і $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, то за означенням точка $x = 0$ є точкою усувного розриву.

Приклад 2. Доведіть, що для функції $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ точка $x = 1$ є точкою усувного розриву.

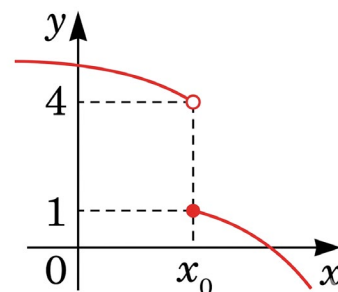


IV. Означення точок розриву першого та другого роду

Розглянемо функцію $f(x)$, графік якої зображений на рисунку.

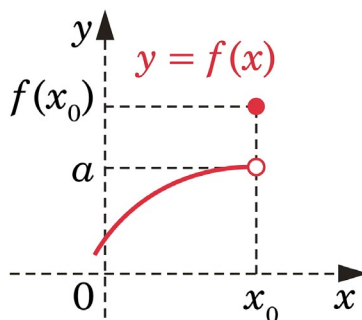
З рисунку видно, що $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 4$ і $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 1$.

В точці x_0 функція здійснила так званий «стрибок».

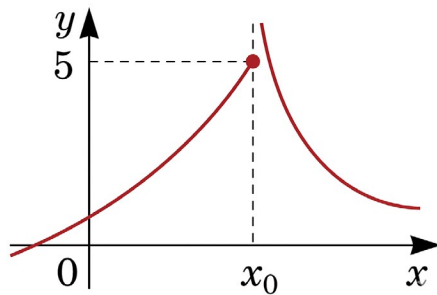


Означення. Точку розриву x_0 називають *точкою розриву першого роду* функції $f(x)$, якщо в цій точці існують і ліва, і права границі функції $f(x)$.

Зауважимо, що *не кожна* точка усувного розриву є точкою розриву першого роду. Наприклад функція, графік якої зображений на рисунку в точці x_0 має усувний розрив, але праворуч від точки x_0 дана функція не визначена.



Далі розглянемо функцію, графік якої зображений на рисунку.



В точці x_0 дана функція не має границі, тому точка x_0 не є точкою усувного розриву. Також ця функція не має правої границі, тому точка x_0 не може бути точкою розриву першого роду.

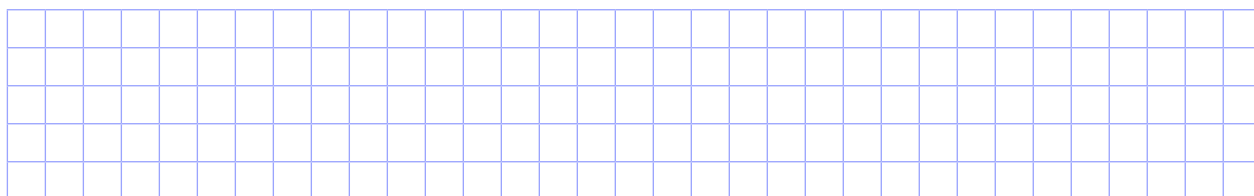
Означення. Точку розриву x_0 називають *точкою розриву другого роду* функції $f(x)$, якщо x_0 не є ні точкою усувного розриву, ні точкою розриву першого роду.

Приклад 3. Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & x \leq 2, \\ x, & x > 2 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} x = 2$.

У точці розриву $x = 2$ існують і ліва, і права границі функції $f(x)$, тому $x = 2$ — точка розриву першого роду.

Приклад 4. Дослідіть характер точки розриву функції $f(x) = \frac{|x|}{x}$.



Приклад 5. Дослідіть характер точок розриву функції $y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Розв'язання. Дана функція не є елементарною. Тому з того, що вона визначена при $x \in (-\infty; +\infty)$, висновок про відсутність точок розриву зробити не можна. Але функції $y = x$, $y = \sin x$, $y = 2$ елементарні. Тому у внутрішніх точках відповідних проміжків їх задання $(-\infty; 0]$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$ розривів не існує. Отже, розриви

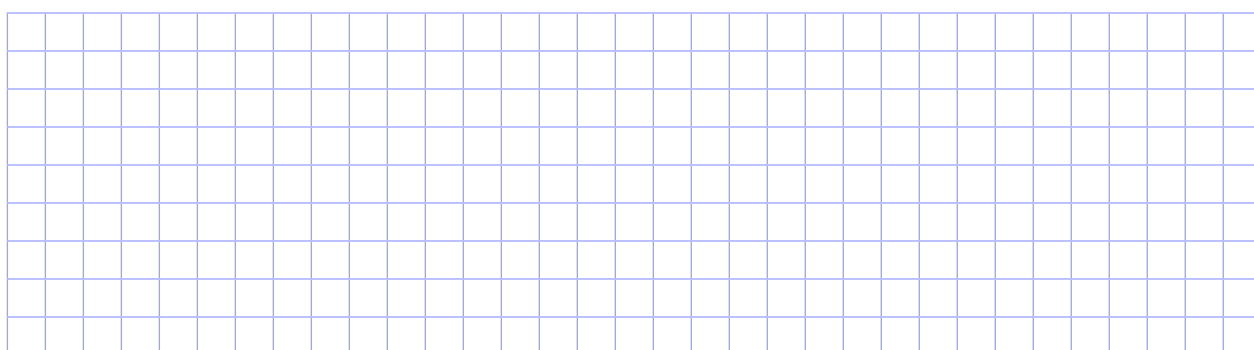
функція може мати у точках $x_1 = 0$ та $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x = 0$, $f(0) = 0$, отже, функція є неперервною в точці $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} 2 = 2$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Отже, $x = \frac{\pi}{2}$ є точкою розриву першого роду.

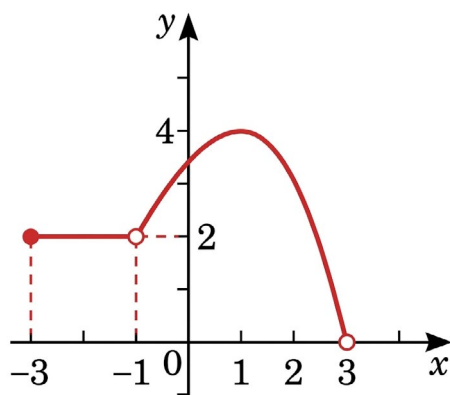
Приклад 6. Дослідіть характер точок розриву функції $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0, \\ 2x - x^2, & 0 < x < 2, \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$



V. Визначення та характер точок розриву за допомогою графіків функцій

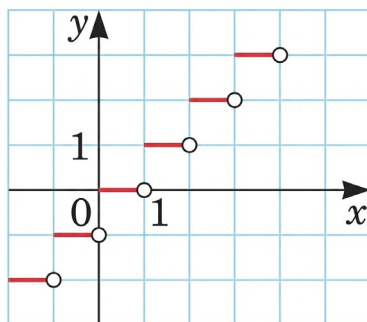
Розглянемо характер точок розриву за допомогою графіків, на ілюстраціях які ми розглядали на попередньому уроці.

1) Точка $x = -1$ є точкою розриву функції $f(x)$, графік якої зображений на рисунку.



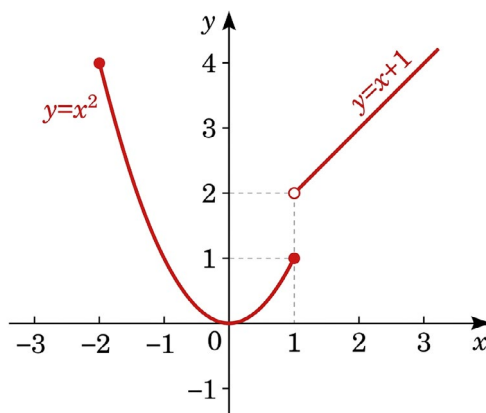
Оскільки існує границя функції $f(x)$ в точці $x = -1$: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$, тому точка $x = -1$ є точкою усувного розриву.

2) Кожна точка виду $x_0 = k$, $k \in \mathbb{Z}$, є точкою розриву функції $y = [x]$ (див. рисунок)



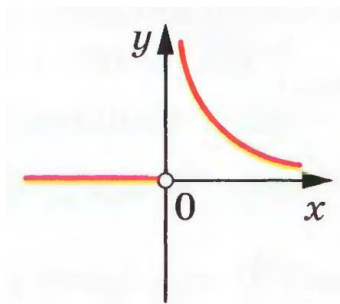
У кожній точці виду $x_0 = k$, $k \in \mathbb{Z}$ існують ліві і праві границі, тому усі ці точки є точками розриву першого роду.

3) Точка $x = 1$ є точкою розриву функції $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x+1, & x > 1, \end{cases}$ графік якої зображений на рисунку.



Оскільки: $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = 1$ і $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = 2$ тому точка $x = 1$ є точкою розриву першого роду.

4) Функція $y = \frac{|x| + x}{x^2}$, графік якої зображено на рисунку, має розрив в точці $x = 0$.



Оскільки точка $x = 0$ не є точкою усувного розриву і не є точкою розриву першого роду, то це точка розриву другого роду.

Для наочного дослідження характеру різних точок розриву можна скористатися Geogebra-аплетом:



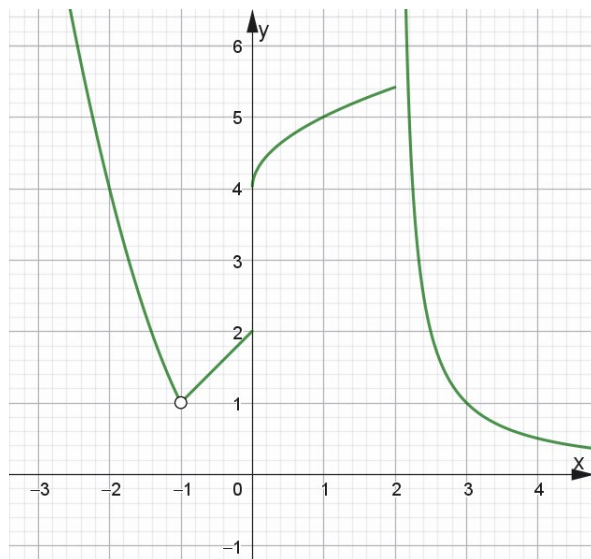
<https://www.geogebra.org/material/edit/id/endhgfqw>

Приклад 7. За рисунком установіть характер точок розриву.

Розв'язання. $x = -1$ — точка усувного розриву,

$x = 0$ — точка розриву першого роду,

$x = 2$ — точка розриву другого роду.



VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Автоматичний дозатор подає рідину в ємність. Швидкість подачі $Q(p)$ (у мл/с)

залежить від тиску p (у кПа) і задається функцією $Q(p) = \begin{cases} 2p + 10, & p < 5, \\ 20, & p = 5, \\ 2p + 20, & p > 5. \end{cases}$

1. Знайдіть ліву та праву границі швидкості подачі при $p \rightarrow 5$.
2. Чи існує границя функції $Q(p)$ у точці $p = 5$?
3. Чи є функція неперервною в цій точці?
4. Визначте тип точки розриву функції $Q(p)$ при $p = 5$.
5. Поясніть, що означає цей тип розриву з точки зору роботи дозатора.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Назвіть точки розриву функції та установіть їхній тип:

1) $y = \frac{5}{x+3}$;

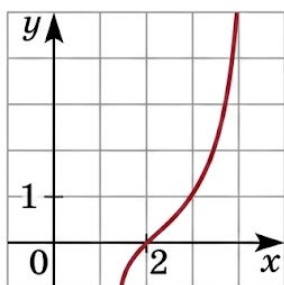
2) $y = \frac{x+3}{x^2-2}$.

2. Побудуйте графік функції $f(x)$ та установіть тип точок розриву:

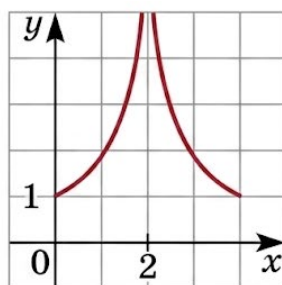
1) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0, \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

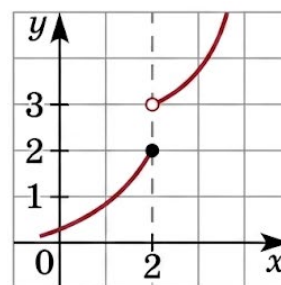
3. За графіком визначте чи має функція розрив в точці $x = 2$ та установіть характер точок розриву:



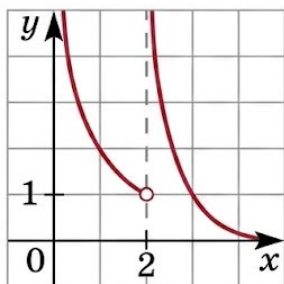
а)



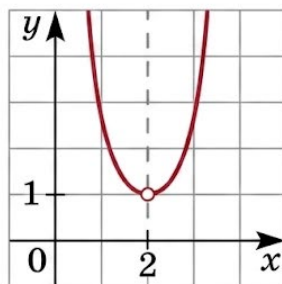
б)



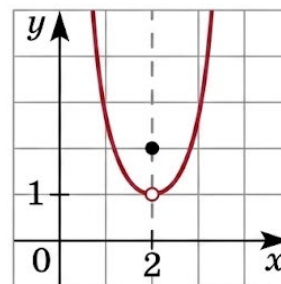
в)



г)



д)



е)

4. Дослідіть функцію на неперервність та установіть характер точок розриву:

1) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$;

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

5. Дослідіть на неперервність та побудуйте схематично графік функції $y = \begin{cases} x-3, & x \leq 3 \\ 8-x, & x > 3. \end{cases}$

Установіть характер точки розриву.

6. Знайдіть ліву і праву границі функції $f(x)$ у точці x_0 та установіть характер точок розриву :

1) $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$, $x_0 = 4$;

2) $f(x) = \frac{x^7+1}{x^9+1}$, $x_0 = -1$.

Рівень В

1. Побудуйте графік функції та знайдіть ліві та праві границі в точці $x = 2$. Установіть характер точок розриву:

$$1) f(x) = \begin{cases} |x-2|, & x < 2, \\ |x-4|, & x > 2; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \geq 2, \\ x-1, & x < 2. \end{cases}$$

2. Установіть чи є функція $y = \frac{1+x}{x+1}$ неперервною в точці $x = -1$ та визначте чи має функція ліві і праві границі в цій точці та знайдіть їх. Якщо функція має точки розриву, то установіть їх вид.

3. Установіть характер точок розриву функції $y = \begin{cases} \frac{x^2+4x+4}{x+2}, & x \neq -2, \\ 3, & x = -2. \end{cases}$

4. Установіть характер точок розриву функції $f(x) = \begin{cases} x+3, & x < -2, \\ x^2, & -2 \leq x \leq 2, \\ -x+6, & x > 2. \end{cases}$

5. Побудуйте графік функції, знайдіть значення функції в точках розриву, установіть характер точок розриву:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+5, & x < -1, \\ x^2+3, & -1 \leq x < 2, \\ 3x-5, & x \geq 2. \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} x+3, & x > 0, \\ x-1, & x \leq 0. \end{cases}$$

6. Установіть характер точок розриву функції $f(x)$:

$$1) f(x) = \operatorname{sign}(x+1); \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

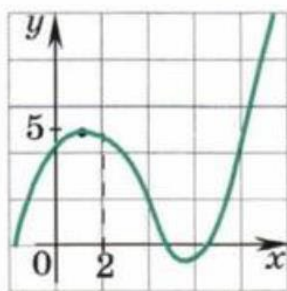
7. Побудуйте графік функції та установіть характер точок розриву:

$$1) f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin x}; \quad 2) f(x) = \frac{x + |x|}{x}.$$

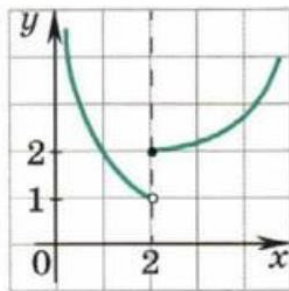
8. Установіть характер точок розриву функції:

$$1) y = \begin{cases} x^2, & x \leq 3, \\ x+6, & x > 3; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} 4-x^2, & x < 2, \\ -1, & x \geq 2. \end{cases}$$

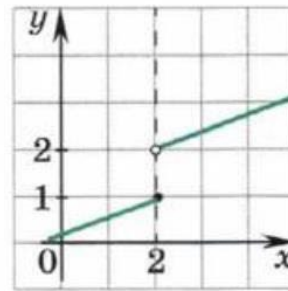
9. За допомогою графіків функцій (див. рисунок) установіть характер точок розриву, якщо вони є:



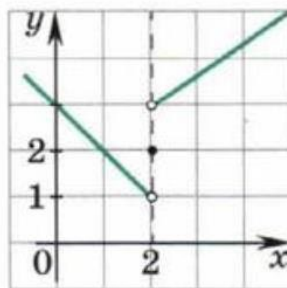
a)



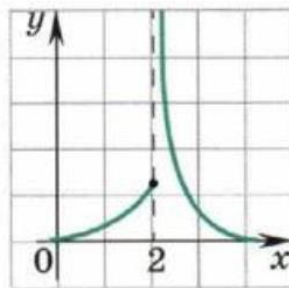
б)



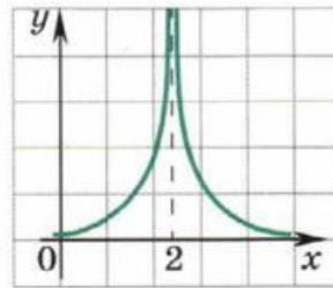
в)



г)



д)



е)

10. Побудуйте графік функції $f(x)$ та установіть характер точок розриву:

1) $f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & x \leq 1, \\ 3x - 5, & x > 1; \end{cases}$

2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

11. Установіть характер точок розриву:

1) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 1, \\ x - 4, & x > 1; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2x}, & x < 0. \end{cases}$

12. Визначте характер точок розриву функції $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ в точці $x = 0$.

Рівень С

1. Дослідіть функцію на неперервність та установіть характер точок розриву:

1) $f(x) = \sin|x| \operatorname{ctg} x$;

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \operatorname{ctg} x, & x > 0. \end{cases}$

2. Визначте характер точок розриву функції $f(x) = \sin \frac{\pi[x]}{2}$ в точці $x = 2$.

3. Дослідіть характер точок розриву функції:

1) $f(x) = \frac{x}{x|x-3|-|x|}$;

2) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+|x-3|+3}$.

4. Дослідіть характер точок розриву функції:

1) $f(x) = \{x+3\}$;

2) $f(x) = [x] \cdot x$.

5. Дослідіть функцію на неперервність та визначте характер точок розриву:

$$1) \ y = \begin{cases} -x, x \leq -1, \\ x^2, -1 < x \leq 0, \\ x, 0 < x < 2, \\ 2, x \geq 2; \end{cases}$$

$$2) \ y = \begin{cases} x^2, x \leq 0, \\ (x-1)^2, 0 < x \leq 2, \\ 3-x, x > 2. \end{cases}$$

- 6.** Дослідіть функцію на неперервність та визначте характер точок розриву:

$$1) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1, \\ x, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

- 7. Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм, який установлює характер розриву в заданих точках заданої функції.

Рефлексія

Як я почуваюсь на уроці?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливо									Чудово

Поради собі для наступного уроку

.

.

.

Можливі теми проєктів

1. Стрибкоподібні процеси в техніці як модель розриву функції.
2. Розриви в економічних моделях: податки, тарифи, знижки.
3. Помилки вимірювань і усунні розриви.
4. Вплив параметра на тип точки розриву функції.
5. Моделювання розривів першого роду в цифрових датчиках.





