

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 11. Односторонні границі функції в точці. Класифікація точок розриву

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Означення точок усунютого розриву.
2. Означення точок розриву першого та другого роду.
3. Визначення та характер точок розриву за допомогою графіків функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

вирізняє специфічні проблемні ситуації, які можуть бути розв'язані математичними методами [12 MAO 1.1.1–1 П];

оцінює достовірність і доцільність використання даних у специфічних проблемних ситуаціях [12 MAO 1.2.2–1 П];

аналізує результати дій із математичними об'єктами у процесі розв'язання проблемної ситуації [12 MAO 4.2.2–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чи будь-який «розрив» на графіку виглядає однаково?
- 2) Чи допомагає знання односторонніх границь класифікувати типи розриву?
- 3) Чи можуть ліва і права границі існувати, але бути різними? Як це ілюструється на графіку?
- 4) Яку додаткову інформацію може нам надати тип розриву функції в точці?
- 5) Чи може функція мати розриви різних типів?

II. Усно. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 3x$.

Відповідь. -1 .

2. Чи є неперервною функція $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3, \\ 6, & x = 3 \end{cases}$ в точці $x = 3$?

Відповідь. Так.

3. Чи є неперервною функція, графік якої зображений на рисунку в точці x_0 ?

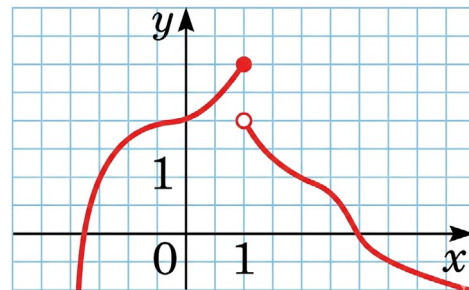
Відповідь. Так.

4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$.

Відповідь. $-\frac{1}{2}$.

5. Чи існує границя функції, графік якої зображений на рисунку, в точці $x=1$?

Відповідь. Ні.



Як я вирішую певну проблему?

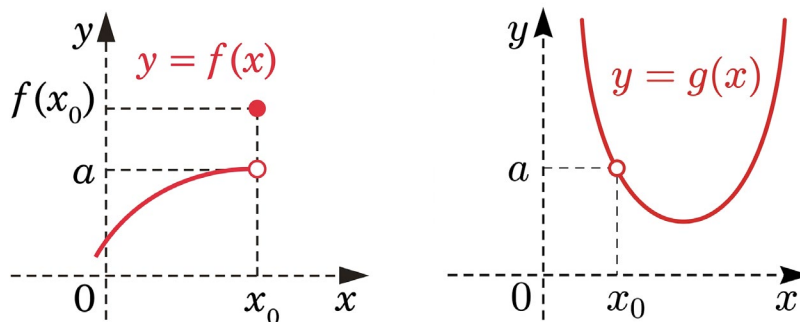
Задача. Автоматичний дозатор подає рідину в ємність. Швидкість подачі $Q(p)$ (у мл/с)

залежить від тиску p (у кПа) і задається функцією $Q(p) = \begin{cases} 2p+10, & p < 5, \\ 20, & p = 5, \\ 2p+20, & p > 5. \end{cases}$

1. Знайдіть ліву та праву границі швидкості подачі при $p \rightarrow 5$.
2. Чи існує границя функції $Q(p)$ у точці $p = 5$?
3. Чи є функція неперервною в цій точці?
4. Визначте тип точки розриву функції $Q(p)$ при $p = 5$.
5. Поясніть, що означає цей тип розриву з точки зору роботи дозатора.

III. Означення точок усувного розриву (3–4 хв)

Розглянемо функції $f(x)$ і $g(x)$, графіки яких зображені на рисунку.



Точка x_0 для обох цих функцій є точкою розриву. Проте в точці x_0 границя функції існує і дорівнює a .

Існують функції $f_1(x)$ і $g_1(x)$, які є неперервними в точці x_0 і які відрізняються від функцій $f(x)$ і $g(x)$ лише поведінкою в точці x_0 :

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ a, & x = x_0, \end{cases} \quad g_1(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq x_0, \\ a, & x = x_0. \end{cases}$$

Таким чином ми ніби «усунули» розрив в точці x_0 .

Означення. Точку розриву x_0 називають **точкою усувного розриву** функції $f(x)$, якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Доведіть, що точка $x = 0$ є точкою усувного розриву функції $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ не визначена в точці $x = 0$ і $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, то за означенням точка $x = 0$ є точкою усувного розриву.

7. Доведіть, що для функції $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ точка $x = 1$ є точкою усувного розриву.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 3) = 4,$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 3) = 4.$

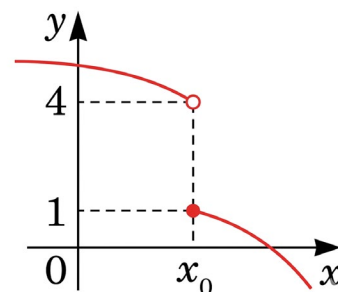
Оскільки функція $f(x)$ не визначена в точці $x = 1$ і $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, то точка $x = 1$ є точкою усувного розриву.

IV. Означення точок розриву першого та другого роду (5 хв)

Розглянемо функцію $f(x)$, графік якої зображений на рисунку.

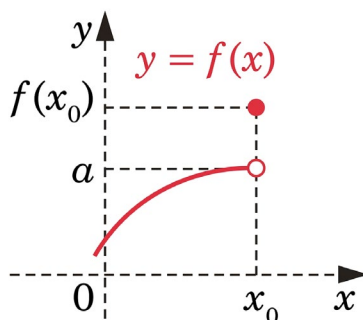
З рисунку видно, що $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = 4$ і $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 1$.

В точці x_0 функція здійснила так званий «стрибок».

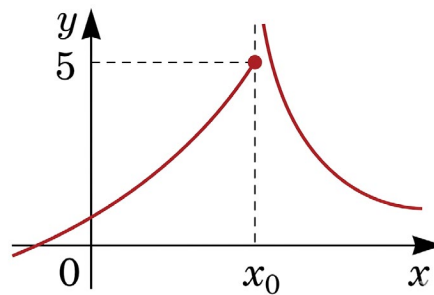


Означення. Точку розриву x_0 називають *точкою розриву першого роду* функції $f(x)$, якщо в цій точці існують і ліва, і права границі функції $f(x)$.

Зауважимо, що *не кожна* точка усувного розриву є точкою розриву першого роду. Наприклад функція, графік якої зображений на рисунку в точці x_0 має усувний розрив, але праворуч від точки x_0 дана функція не визначена.



Далі розглянемо функцію, графік якої зображений на рисунку.



В точці x_0 дана функція не має границі, тому точка x_0 не є точкою усувного розриву. Також ця функція не має правої границі, тому точка x_0 не може бути точкою розриву першого роду.

Означення. Точку розриву x_0 називають **точкою розриву другого роду** функції $f(x)$, якщо x_0 не є ні точкою усувного розриву, ні точкою розриву першого роду.

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 8.** Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, & x \leq 2, \\ x, & x > 2 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} x = 2$.

У точці розриву $x = 2$ існують і ліва, і права границі функції $f(x)$, тому $x = 2$ — точка розриву першого роду.

- 9.** Дослідіть характер точки розриву функції $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = 1$.

Отже, $x = 0$ — точка розриву першого роду.

- 10.** Дослідіть характер точок розриву функції $y = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Розв'язання. Дана функція не є елементарною. Тому з того, що вона визначена при $x \in (-\infty; +\infty)$, висновок про відсутність точок розриву зробити не можна. Але функції $y = x$, $y = \sin x$, $y = 2$ елементарні. Тому у внутрішніх точках відповідних проміжків їх задання $(-\infty; 0]$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right)$ розривів не існує. Отже, розриви

функція може мати у точках $x_1 = 0$ та $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x = 0$, $f(0) = 0$, отже, функція є неперервною в точці $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} 2 = 2, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

Отже, $x = \frac{\pi}{2}$ є точкою розриву першого роду.

- 11.** Дослідіть характер точок розриву функції $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0, \\ 2x - x^2, & 0 < x < 2, \\ \frac{1}{x-2}, & x > 2. \end{cases}$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x^2 - 1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (2x - x^2) = 0$.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$, то функція в точці $x = 0$ має розрив першого роду.

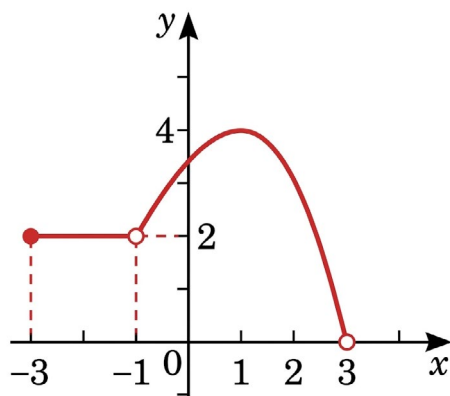
$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (2x - x^2) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{1}{x-2} \text{ — не існує, тому } x = 2 \text{ — точка розриву другого роду.}$$

V. Визначення та характер точок розриву за допомогою графіків функцій (5 хв)

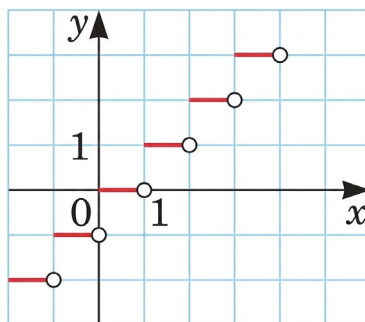
Розглянемо характер точок розриву за допомогою графіків, на ілюстраціях які ми розглядали на попередньому уроці.

- 1) Точка $x = -1$ є точкою розриву функції $f(x)$, графік якої зображений на рисунку.



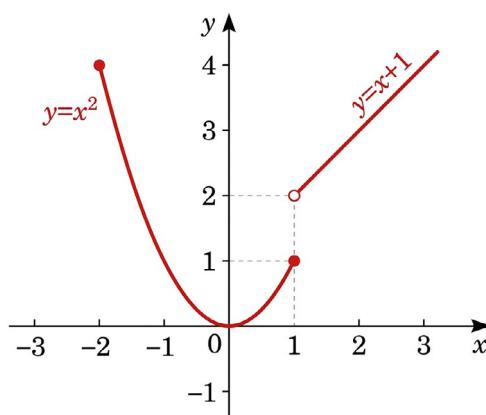
Оскільки існує границя функції $f(x)$ в точці $x = -1$: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$, тому точка $x = -1$ є точкою усунютого розриву.

- 2) Кожна точка виду $x_0 = k$, $k \in \mathbb{Z}$, є точкою розриву функції $y = [x]$ (див. рисунок)



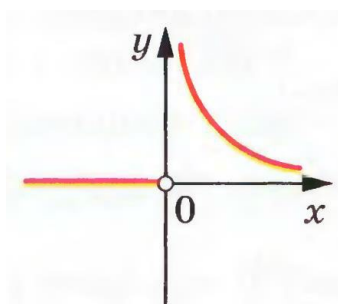
У кожній точці виду $x_0 = k$, $k \in \mathbb{Z}$ існують ліві і праві границі, тому усі ці точки є точками розриву першого роду.

3) Точка $x = 1$ є точкою розриву функції $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ x + 1, & x > 1, \end{cases}$ графік якої зображений на рисунку.



Оскільки: $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = 1$ і $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = 2$ тому точка $x = 1$ є точкою розриву першого роду.

4) Функція $y = \frac{|x| + x}{x^2}$, графік якої зображено на рисунку, має розрив в точці $x = 0$.



Оскільки точка $x = 0$ не є точкою усувного розриву і не є точкою розриву першого роду, то це точка розриву другого роду.

Для наочного дослідження характеру різних точок розриву можна скористатися Geogebra-аплетом:

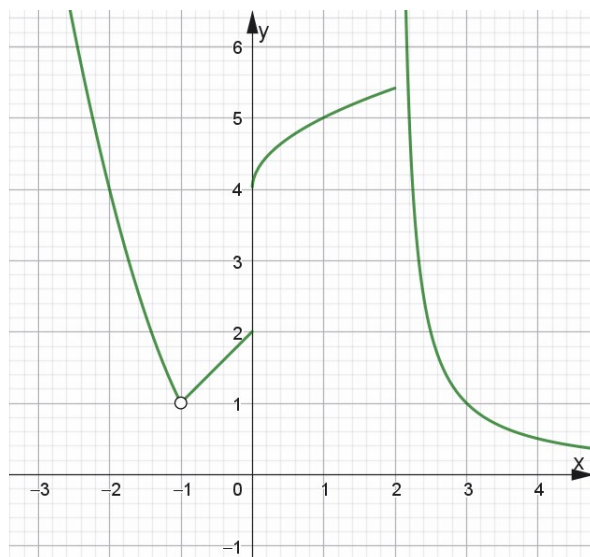
<https://www.geogebra.org/material/edit/id/endhgfqw> _____



Ілюстративні приклади (5 хв)

- 12.** За рисунком установіть характер точок розриву.

Розв'язання. $x = -1$ — точка усувного розриву,
 $x = 0$ — точка розриву першого роду,
 $x = 2$ — точка розриву другого роду.



VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Автоматичний дозатор подає рідину в ємність. Швидкість подачі $Q(p)$ (у мл/с)

залежить від тиску p (у кПа) і задається функцією $Q(p) = \begin{cases} 2p + 10, & p < 5, \\ 20, & p = 5, \\ 2p + 20, & p > 5. \end{cases}$

1. Знайдіть ліву та праву границі швидкості подачі при $p \rightarrow 5$.
2. Чи існує границя функції $Q(p)$ у точці $p = 5$?
3. Чи є функція неперервною в цій точці?
4. Визначте тип точки розриву функції $Q(p)$ при $p = 5$.
5. Поясніть, що означає цей тип розриву з точки зору роботи дозатора.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 5^-} Q(p) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (2p + 10) = 20$,

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} Q(p) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (2p + 20) = 30.$$

Отже, функція $Q(p)$ не має границі в точці $t = 5$.

В точці $p = 5$ — розрив першого роду.

Це означає різку зміну режиму роботи дозатора при досягненні критичного тиску.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (8–10 хв)

Рівень А

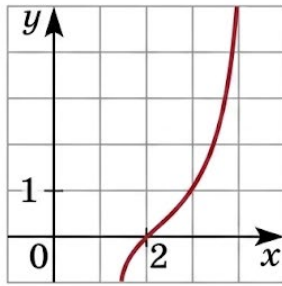
- 1.** Назвіть точки розриву функції та установіть їхній тип:

$$1) y = \frac{5}{x+3}; \quad 2) y = \frac{x+3}{x^2-2}.$$

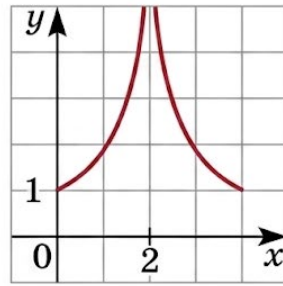
- 2.** Побудуйте графік функції $f(x)$ та установіть тип точок розриву:

$$1) f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0, \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

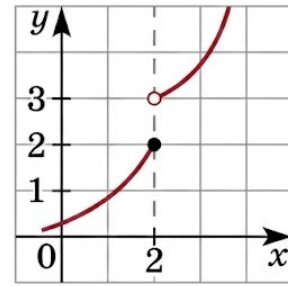
3. За графіком визначте чи має функція розрив в точці $x = 2$ та установіть характер точок розриву:



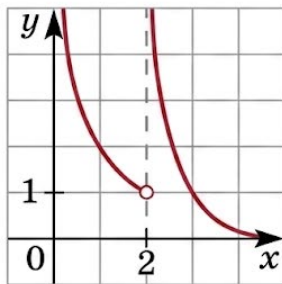
а)



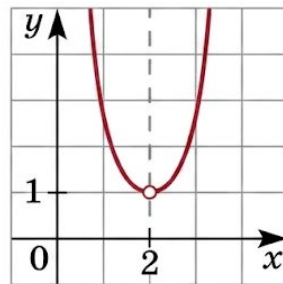
б)



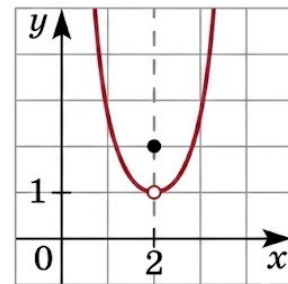
в)



г)



д)



е)

4. Дослідіть функцію на неперервність та установіть характер точок розриву:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$;

2) $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

5. Дослідіть на неперервність та побудуйте схематично графік функції $y = \begin{cases} x - 3, & x \leq 3 \\ 8 - x, & x > 3. \end{cases}$

Установіть характер точки розриву.

6. Знайдіть ліву і праву границі функції $f(x)$ у точці x_0 та установіть характер точок розриву :

1) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$, $x_0 = 4$;

2) $f(x) = \frac{x^7 + 1}{x^9 + 1}$, $x_0 = -1$.

Рівень В

1. Побудуйте графік функції та знайдіть ліві та праві границі в точці $x = 2$. Установіть характер точок розриву:

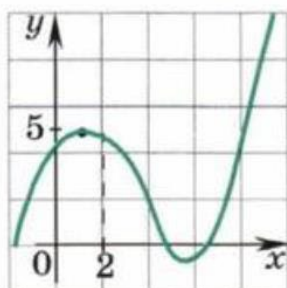
1) $f(x) = \begin{cases} |x - 2|, & x < 2, \\ |x - 4|, & x > 2; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - 1}, & x \geq 2, \\ x - 1, & x < 2. \end{cases}$

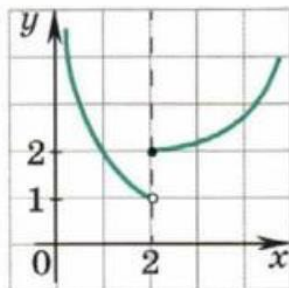
2. Установіть чи є функція $y = \frac{1 + x}{x + 1}$ неперервною в точці $x = -1$ та визначте чи має функція ліві і праві границі в цій точці та знайдіть їх. Якщо функція має точки розриву, то установіть їх вид.

3. Установіть характер точок розриву функції $y = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}, & x \neq -2, \\ 3, & x = -2. \end{cases}$

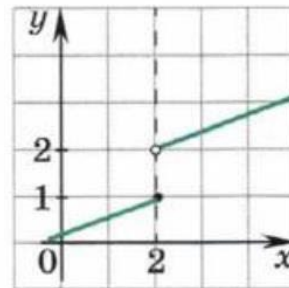
4. Установіть характер точок розриву функції $f(x) = \begin{cases} x+3, & x < -2, \\ x^2, & -2 \leq x \leq 2, \\ -x+6, & x > 2. \end{cases}$
5. Побудуйте графік функції, знайдіть значення функції в точках розриву, установіть характер точок розриву:
- 1) $f(x) = \begin{cases} x+5, & x < -1, \\ x^2+3, & -1 \leq x < 2, \\ 3x-5, & x \geq 2. \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x+3, & x > 0, \\ x-1, & x \leq 0. \end{cases}$
6. Установіть характер точок розриву функції $f(x)$:
- 1) $f(x) = \text{sign}(x+1)$; 2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$
7. Побудуйте графік функції та установіть характер точок розриву:
- 1) $f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{\sin x}$; 2) $f(x) = \frac{x+|x|}{x}$.
8. Установіть характер точок розриву функції:
- 1) $y = \begin{cases} x^2, & x \leq 3, \\ x+6, & x > 3; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 4-x^2, & x < 2, \\ -1, & x \geq 2. \end{cases}$
9. За допомогою графіків функцій (див. рисунок) установіть характер точок розриву, якщо вони є:



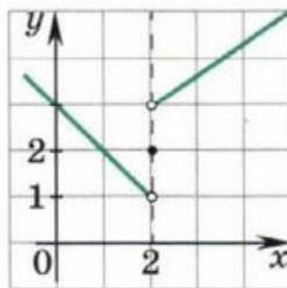
a)



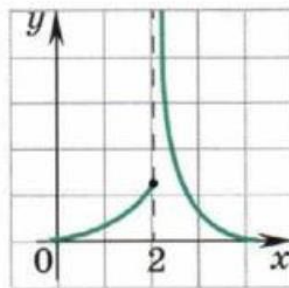
б)



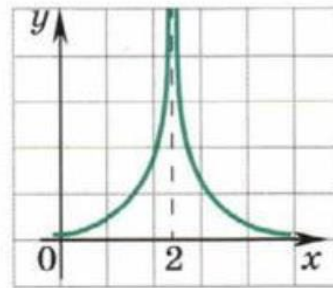
в)



г)



д)



е)

10. Побудуйте графік функції $f(x)$ та установіть характер точок розриву:

1) $f(x) = \begin{cases} -2x+3, & x \leq 1, \\ 3x-5, & x > 1; \end{cases}$ 2) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$.

11. Установіть характер точок розриву:

$$1) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 1, \\ x - 4, & x > 1; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2x}, & x < 0. \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2x}, & x < 0. \end{cases}$$

12. Визначте характер точок розриву функції $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ в точці $x = 0$.

Рівень С

1. Дослідіть функцію на неперервність та установіть характер точок розриву:

$$1) f(x) = \sin|x| \operatorname{ctg} x; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \operatorname{ctg} x, & x > 0. \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \operatorname{ctg} x, & x > 0. \end{cases}$$

2. Визначте характер точок розриву функції $f(x) = \sin \frac{\pi[x]}{2}$ в точці $x = 2$.

3. Дослідіть характер точок розриву функції:

$$1) f(x) = \frac{x}{x|x-3|-|x|}; \quad 2) f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+|x-3|+3}.$$

$$2) f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+|x-3|+3}.$$

4. Дослідіть характер точок розриву функції:

1) $f(x) = \{x + 3\}$; 2) $f(x) = [x] \cdot x$.

2) $f(x) = [x] \cdot x$.

5. Дослідіть функцію на неперервність та визначте характер точок розриву:

$$1) \ y = \begin{cases} -x, x \leq -1, \\ x^2, -1 < x \leq 0, \\ x, 0 < x < 2, \\ 2, x \geq 2; \end{cases} \quad 2) \ y = \begin{cases} x^2, x \leq 0, \\ (x-1)^2, 0 < x \leq 2, \\ 3-x, x > 2. \end{cases}$$

$$2) \ y = \begin{cases} x^2, x \leq 0, \\ (x-1)^2, 0 < x \leq 2, \\ 3-x, x > 2. \end{cases}$$

6. Дослідіть функцію на неперервність та визначте характер точок розриву:

$$1) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x < 1, \\ x, & x \geq 1; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

7. Творче завдання. Запрограмуйте алгоритм, який установлює характер розриву в заданих точках заданої функції.

VIII. Рефлексія (1–2 хв)

Як я почуваюсь на уроці?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Жахливо									Чудово

Поради собі для наступного уроку

.

.

.

Можливі теми проєктів

1. Стрибкоподібні процеси в техніці як модель розриву функції.
2. Розриви в економічних моделях: податки, тарифи, знижки.
3. Помилки вимірювань і усунні розриви.
4. Вплив параметра на тип точки розриву функції.
5. Моделювання розривів першого роду в цифрових датчиках.