

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 12. Урок–практикум. Обчислення односторонніх границь функції

Тип уроку: урок формування навичок і вмінь.

План уроку

1. Знаходження лівих та правих границь функції в точках.
2. Визначення характеру точок розриву.
3. Знаходження значень параметрів, при яких задана функція має ліву та праву границі у точці.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П];

аргументовано пояснює суть основних математичних понять, фактів і процедур, зважаючи на мету та учасників спілкування, обираючи для цього відповідні мовленнєві стратегії [12 МАО 4.3.1–2 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку. Запитання можна лише сформулювати, а відповіді на них давати поступово впродовж викладення матеріалу.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.

- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.
- 7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.
- 8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.
- 9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С. Якщо учень/учениця розв'язали завдання рівня А, то для проєкту вони можуть обрати рівні В або С.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

- 1) Чому в реальних ситуаціях важливо розглядати границю окремо зліва і справа?
- 2) Чи завжди існування односторонніх границь гарантує існування границі функції в цій точці?
- 3) Чому поведінка функції безпосередньо перед точкою може бути важливішою, ніж у самій точці?
- 4) Як відрізнити "стрибок" функції від її необмеженого зростання біля точки, не виконуючи складних обчислень?
- 5) Навіщо вводять класифікацію точок розриву, а не обмежуються фактом існування границі функції в точці?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 5}{x + 2}$.
Відповідь. 2.
2. Чи є функція $f(x) = 5x - \sqrt{x}$ неперервною в кожній точці проміжку $(0; +\infty)$?
Відповідь. Так.
3. Чи існує границя функції $f(x) = \frac{9 - x^2}{x + 3}$ в точці $x = -3$?
Відповідь. Так.

4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3 + x}$.

Відповідь. 1.

5. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x+7} - 4}{\sqrt{x} - 3}$.

Відповідь. $\frac{3}{4}$.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Гаряча кава охолоджується в кімнаті. Температура кави $T(t)$ ($^{\circ}\text{C}$) залежить від часу t (хв). Поки чашка закрита кришкою, охолодження відбувається повільніше. У момент $t = 10$ хв кришку знімають і швидкість охолодження змінюється. Темпе-

ратура описується функцією
$$T(t) = \begin{cases} 80 - 0,5t, & t < 10, \\ 74, & t = 10, \\ 90 - 2t, & t > 10. \end{cases}$$

1. Знайдіть ліву та праву границі температури в момент $t = 10$.
2. Установіть чи є точка $t = 10$ точкою розриву.
3. Установіть, чи існує границя функції $T(t)$ у точці $t = 10$.
4. Визначте характер точок розриву, якщо вони є.
5. Поясніть фізичний зміст процесу, що описується функцією $T(t)$.

III. Знаходження лівих та правих границь функції в точках (3–4 хв)

Під час дослідження функцій часто виникає потреба з'ясувати, як поводить ся функція поблизу певної точки, коли аргумент наближається до неї з різних боків. Для цього використовують поняття лівої та правої границь функції.

Означення. Число a називають **лівою (правою) границею функції** $f(x)$ у точці x_0 , якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ значень аргументу функції $f(x)$, елементи x_n якої менші (більші) від x_0 , відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ значень функції збігається до числа a .

Ліва та права границі можуть:

- збігатися — тоді існує границя функції в точці;
- відрізнятися — у цьому випадку границя функції в точці не існує.

Уміння знаходити односторонні границі є важливим при:

- дослідженні неперервності функцій;
- аналізі точок розриву;
- вивченні функцій, заданих кусково.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Знайдіть ліву і праву границю функції $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ в точці $x = 1$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x - 1 = 1$.

Відповідь. 1; 1.

7. Знайдіть ліву і праву границю функції $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$ в точці $x = 0$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ — не є числом,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$.

Відповідь. Не існує; 0.

8. Знайдіть ліву і праву границю функції $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 2, \\ \sqrt{x - 2}, & x > 2 \end{cases}$ в точці $x = 2$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5$,

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x - 2} = 0$.

Відповідь. 5; 0.

IV. Визначення характеру точок розриву (5 хв)

Нагадаємо декілька означень, вивчених на попередньому уроці.

Означення 1. Точку розриву x_0 називають **точкою усувного розриву** функції $f(x)$, якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Означення 2. Точку розриву x_0 називають **точкою розриву першого роду** функції $f(x)$, якщо в цій точці існують і ліва, і права границі функції $f(x)$.

При цьому число $\Delta = \left| \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right|$ називають «стрибком» функції.

Не кожна точка усувного розриву є точкою розриву першого роду.

Означення 3. Точку розриву x_0 називають **точкою розриву другого роду** функції $f(x)$, якщо x_0 не є ні точкою усувного розриву, ні точкою розриву першого роду.

Ілюстративні приклади (5 хв)

9. Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.

Розв'язання. Областю визначення функції є множина $(-\infty; +\infty)$. На інтервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$ функція є неперервною. Тому вона може мати розрив лише в точках $x = -1$ або $x = 1$, у яких змінюється аналітичне задання функції.

Знайдемо односторонні границі функції в точці $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (x + 4) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2 + 2) = 3.$$

Оскільки $f(-1) = 3$, то функція $f(x)$ в точці $x = 1$ — неперервна.

Знайдемо односторонні границі функції в точці $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 + 2) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} 2x = 2.$$

Так як в точці $x = 1$ односторонні границі функції існують, але не рівні між собою, тому $x = 1$ — точка розриву першого роду.

- 10.** Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6}$ на неперервність, знайдіть точки розриву (якщо вони існують) і з'ясуйте їх характер.

Розв'язання. Функція f є неперервною в усіх точках, де знаменник не дорівнює нулю, тобто при $x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Дослідимо питання неперервності функції f у точках $x = 2$ і $x = 3$. Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x - 2} \text{ — не є числом.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 2}{x - 2} = 5.$$

Отже, $x = 2$ — точка розриву другого роду, а $x = 3$ — точка усувного розриву.

- 11.** Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x < -2, \\ x - 1, & -2 \leq x \leq -1, \\ \frac{1}{x + 1}, & x > -1 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.

Розв'язання. Областю визначення функції є множина $(-\infty; +\infty)$. На інтервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; -1)$, $(-1; +\infty)$ функція є неперервною. Тому вона може мати розрив лише в точках $x = -2$ або $x = -1$, у яких змінюється аналітичне задання функції.

Знайдемо односторонні границі функції в точці $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{2}{x} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} (x - 1) = -3.$$

Так як в точці $x = -2$ односторонні границі функції існують, але не рівні між собою, тому $x = -2$ — точка розриву першого роду.

Знайдемо односторонні границі функції в точці $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (x - 1) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{1}{x + 1} \text{ — не є числом.}$$

Оскільки в точці $x = -1$ права границя не є числом, тому $x = -1$ — є точкою розриву другого роду.

V. Знаходження значень параметрів, при яких задана функція має ліву та праву границі у точці

У задачах з параметрами вигляд функції та її поведінка поблизу заданої точки можуть істотно змінюватися залежно від значень параметрів. Тому важливо уміти досліджувати, за яких значень параметрів у функції існують ліва та права границі в точці, а також який тип розриву при цьому має функція.

Значення параметрів у заданні функції можуть змінюватися:

- існування або відсутність односторонніх границь;
- рівність чи нерівність лівої та правої границь;
- тип точки розриву функції.

Ілюстративні приклади (5 хв)

- 12.** Дослідіть характер точок розриву функції $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < 1, \\ -x, & x \geq 1 \end{cases}$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання. Областю визначення функції є множина $(-\infty; +\infty)$. На інтервалах $(-\infty; 1)$ та $(1; +\infty)$ функція є неперервною. Тому вона може мати розрив лише в точці $x = 1$, у якій змінюється аналітичне задання функції.

Знайдемо односторонні границі функції в точці $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + a) = 1 + a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x) = -1,$$

Якщо $1 + a = -1$, тобто $a = -2$, тоді $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$, тому функція $f(x)$ в точці $x = 1$ — неперервна.

Якщо $a \neq -2$, тоді $x = 1$ — точка розриву першого роду.

Відповідь. Якщо $a \neq -2$, то $x = 1$ — точка розриву першого роду, інакше функція неперервна в усіх точках.

- 13.** Дослідіть характер точок розриву функції $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - a}, & x \neq 2, \\ a^2 + 3a, & x = 2 \end{cases}$ залежно від значень параметра a .

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - a} = \frac{0}{2 - a}.$

Якщо $a = 2$, то $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$, $f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$. Отже, при $a = 2$ в точці $x = 2$ маємо усувний розрив.

Якщо $a \neq 2$, то $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - a} = 0.$

$a^2 + 3a = 0$, $a = 0$ або $a = -3$, тоді в точці $x = 2$ функція $f(x)$ є неперервною, інакше в точці $x = 2$ — усувний розрив.

Відповідь. Якщо $a = 0$ або $a = -3$, то функція неперервна в кожній точці області визначення, інакше в точці $x = 2$ усувний розрив.

14. При яких значеннях параметра a функція $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - a}, & x < 2, x \neq a, \\ \frac{1}{2}a^2 + a, & x \geq 2 \end{cases}$ у точці $x_0 = 2$

має рівні ліву і праву границі?

Розв'язання. Якщо $a = 2$, то $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 4$,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2}a^2 + a = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 = 4 = f(2).$$

Отже, при $a = 2$ функція неперервна в точці $x = 2$.

Якщо $a \neq 2$, то $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - a} = 0$.

$$\frac{1}{2}a^2 + a = 0, a = 0 \text{ або } a = -2.$$

Отже, ліва і права границі функції рівні при $a = 2$, $a = 0$ та при $a = -2$.

Відповідь. $-2; 0; 2$.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Гаряча кава охолоджується в кімнаті. Температура кави $T(t)$ ($^{\circ}\text{C}$) залежить від часу t (хв). Поки чашка закрита кришкою, охолодження відбувається повільніше. У момент $t = 10$ хв кришку знімають і швидкість охолодження змінюється. Темпе-

ратура описується функцією $T(t) = \begin{cases} 80 - 0,5t, & t < 10, \\ 74, & t = 10, \\ 90 - 2t, & t > 10. \end{cases}$

1. Знайдіть ліву та праву границі температури в момент $t = 10$.

2. Установіть чи є точка $t = 10$ точкою розриву.

3. Установіть, чи існує границя функції $T(t)$ у точці $t = 10$.

4. Визначте характер точок розриву, якщо вони є.

5. Поясніть фізичний зміст процесу, що описується функцією $T(t)$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 10^-} T(t) = \lim_{x \rightarrow 10^-} (80 - 0,5t) = 75$, $\lim_{x \rightarrow 10^+} T(t) = \lim_{x \rightarrow 10^+} (90 - 2t) = 70$.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow 10^-} T(t) \neq \lim_{x \rightarrow 10^+} T(t)$, то функція $T(t)$ не має границі $T(t)$ в точці $t = 10$ і має в цій точці розрив першого роду. При відкриванні кришки температура миттєво зменшилася на 1°C , а потім почала знижуватися за іншим законом.

Відповідь. 75; 70.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. Знайдіть ліву і праву границю функції $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1, \\ x^2, & x \geq -1 \end{cases}$ в точці $x = -1$.

2. Знайдіть ліву і праву границю функції $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x < 3, \\ x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$ в точці $x = 3$.
3. Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x - 2)^2, & 1 < x < 3, \\ 6 - x, & x \geq 3 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.
4. Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 4 \\ \sin x, & x > 4 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.
5. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{1 + x}{1 + x^3}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.
6. Дослідіть характер точок розриву функції $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x < a, \\ 5x, & x \geq a \end{cases}$ залежно від значень параметра a .

Рівень В

1. Знайдіть ліву і праву границю функції $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \frac{x}{|x|}, & x > 0 \end{cases}$ в точці $x = 0$.
2. Знайдіть ліву і праву границю функції $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x < 2, \\ \sqrt{x + 2}, & x \geq 2 \end{cases}$ в точці $x = 2$.
3. Знайдіть ліву і праву границю функції $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ в точці $x = 0$.
4. Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} \arccos x, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^3 - 3x^2 + x + 1, & 0 < x \leq 2, \\ x - 3, & x > 2 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.
5. Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 2 + x, & x \geq 1 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.
6. Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x}{x}$ при $x \neq 0$ та $f(0) = 5$ на неперервність та установіть характер точок розриву.

- 7.** Дослідіть функцію $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ при $x \neq -3$ та $f(-3) = 1$ на неперервність та установіть характер точок розриву.
- 8.** Дослідіть функцію $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.
- 9.** Дослідіть функцію $f(x) = \cos^2 \frac{1}{x}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.
- 10.** Дослідіть характер точок розриву функції $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ залежно від значень параметра a .
- 11.** Дослідіть характер точок розриву функції $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{x + 1}, & x \neq -1, \\ a, & x = -1, \end{cases}$ залежно від значень параметра a .
- 12.** При яких значеннях параметра a функція $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x < a, \\ 5x, & x > a \end{cases}$ у точці $x_0 = a$ має рівні ліву і праву границі?

Рівень С

- 1.** Дослідіть функцію $f(x) = \text{sign}(x^2 - 1)$ на неперервність та установіть характер точок розриву
- 2.** Дослідіть функцію $f(x) = \left[\frac{4x}{5} \right]$ на неперервність та установіть характер точок розриву.
- 3.** Дослідіть функцію $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}, & x > 1, \\ x-1, & x \leq 1 \end{cases}$ на неперервність та установіть характер точок розриву.
- 4.** Дослідіть характер точок розриву функції $f(x) = \begin{cases} \frac{(a^2 - 1)|x|}{x}, & x \neq 0, \\ a^2 + a, & x = 0 \end{cases}$ залежно від значень параметра a .
- 5.** Дослідіть характер точок розриву функції $f(x) = \begin{cases} \{x\}, & x > 2, \\ x + a, & x < 2 \end{cases}$ залежно від значень параметра a .

6. Дослідіть характер точок розриву функції $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x + a, & x > 0 \end{cases}$ залежно від значень параметра a .
7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм, який обчислює односторонні границі функції заданої кусково і, яка містить параметри.

VIII. Рефлексія (1 хв)

- | | | | |
|----|--|------------------------|----|
| 1. | Я вмію знаходити ліві та праві границі функції в точці. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю, як визначати характер точок розриву. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію знаходити характер точок розриву функції залежно від значень параметра. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Односторонні границі в задачах з параметрами.
2. Фізичний зміст односторонніх границь.
3. Типові помилки при обчисленні односторонніх границь.
4. Односторонні границі як інструмент перевірки коректності моделі.
5. Роль односторонніх границь у побудові графіків функцій.