

Урок 13. Властивості неперервних функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

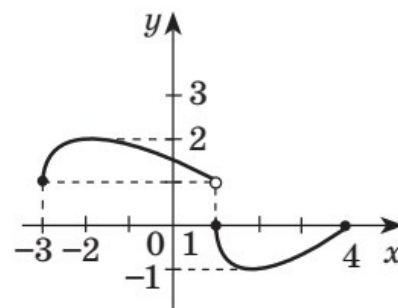
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) вивчите першу теорему Больцано-Коші;
- 2) дізнаєтесь теоретичне обґрунтування методу інтервалів для розв'язування нерівностей;
- 3) вивчите другу теорему Больцано-Коші;
- 4) познайомитесь з означенням обмеженої функції;
- 5) вивчите першу теорему Вейєрштрасса;
- 6) вивчите другу теорему Вейєрштрасса;
- 7) навчитесь використовувати набуті знання щодо розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{2-\sqrt{x-2}}$.
2. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3$ і $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 4$. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2f(x)+5g(x)}{f(x) \cdot g(x)}$.
3. Розв'яжіть нерівність $\frac{(x-1)(2x+1)}{x-3} \leq 0$.
4. Укажіть множину значень функції, графік якої зображений на рисунку.
5. Знайдіть значення виразу $f(-1) - f(1)$, якщо $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.



III. Перша теорема Больцано-Коші

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку набуває значень різних знаків, то існує така точка $c \in (a; b)$, що $f(c) = 0$.

Доведення.* Розглянемо неперервну на відрізку $[a; b]$ функцію f таку, що числа $f(a)$ та $f(b)$ мають різні знаки. Доведемо існування такої точки $c \in (a; b)$, що $f(c) = 0$.

Припустимо, що такої точки $c \in (a; b)$ не існує, тобто $f(c) \neq 0$ для всіх $c \in (a; b)$.

Нехай c_0 – середина відрізка $[a; b]$.

Оскільки числа $f(a)$ і $f(b)$ різних знаків, то на кінцях одного з відрізків $[a; c_0]$ і $[c_0; b]$ функція $f(x)$ набуває значень різних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_1; b_1]$.

Нехай c_1 – середина відрізка $[a_1; b_1]$. Тоді на кінцях одного з відрізків $[a_1; c_1]$ і $[c_1; b_1]$ функція $f(x)$ набуває значень різних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_2; b_2]$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених відрізків

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots$$

За принципом вкладених відрізків існує така точка c , яка належить усім відрізкам $[a_n; b_n]$. За припущенням $f(c) \neq 0$. Нехай, наприклад, $f(c) > 0$.

Оскільки $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$. Отже, кожна з послідовностей a_n і b_n прямує до числа c . Нехай x_n є тією з точок a_n або b_n , для якої $f(x_n) < 0$. Послідовність (x_n) також прямує до числа c . Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці c , то $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq 0$. Отримали суперечність з нерівністю $f(c) > 0$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених відрізків

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots$$

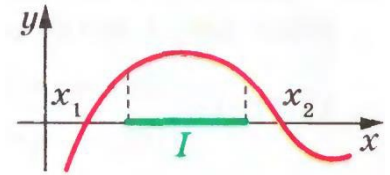
За принципом вкладених відрізків існує така точка c , яка належить усім відрізкам $[a_n; b_n]$. За припущенням $f(c) \neq 0$. Нехай, наприклад, $f(c) > 0$.

Оскільки $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$. Отже, кожна з послідовностей a_n і b_n прямує до числа c . Нехай x_n є тією з точок a_n або b_n , для якої $f(x_n) < 0$. Послідовність x_n також прямує до числа c . Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці c , то $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq 0$. Отримали суперечність з нерівністю $f(c) > 0$.

IV. Теоретичне обґрунтування методу інтервалів для розв'язування нерівностей

Твердження. Якщо функція неперервна і не має нулів на деякому проміжку I , то вона на цьому проміжку зберігає знак.

Доведення. Припустимо, що дана функція $f(x)$ на проміжку I не зберігає знак, тобто існують такі $a \in I$ і $b \in I$, де $a < b$, що числа $f(a)$ і $f(b)$ мають різні знаки (див. рисунок). Тоді за першою теоремою Больцано-Коші існує точка $c \in (a; b) \subset I$ така, що $f(c) = 0$. Отримали суперечність.

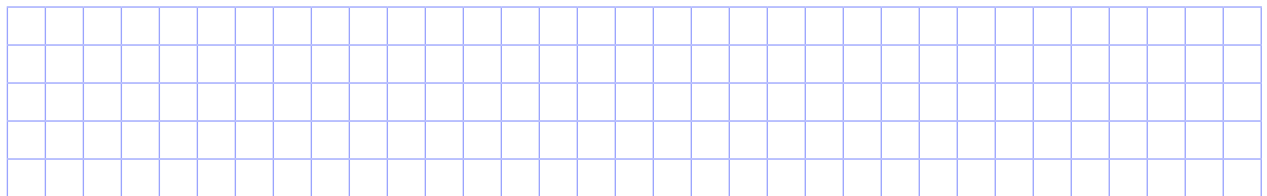


Наведене твердження лежить в основі методу інтервалів для розв'язування нерівностей.

Приклад 1. Доведіть, що рівняння $x \sin x - \cos x = 0$ має принаймні один дійсний корінь.

Доведення. Розглянемо неперервну на $\mathbb{R}$ функцію $f(x) = x \sin x - \cos x$. Зауважимо, що $f(0) = -1$ і $f(\pi) = 1$. Таким чином за першою теоремою Больцано-Коші, існує точка $x_1 \in (0; \pi)$ така, що $f(x_1) = 0$.

Приклад 2. Чи має рівняння $x^3 - 3x - 1 = 0$ принаймні один дійсний корінь на відрізку $[0; 2]$?



Приклад 3. Числа a, b, c такі, що $(a + b + c)c < 0$. Доведіть, що $b^2 > 4ac$.

Доведення. Якщо $a = 0$ і $b = 0$, то $c^2 < 0$, що не можливо.

Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то $b^2 > 4 \cdot 0 \cdot c$ є правильною нерівністю.

Якщо $a \neq 0$, то розглянемо квадратичну функцію $f(x) = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$.

З умови випливає, що числа $f(1) = a + b + c$ і $f(0) = c$ мають різні знаки. Тоді за першою теоремою Больцано-Коші існує $x_0 \in (0; 1)$ таке, що $f(x_0) = 0$, причому x_0 — некратний корінь. Таким чином, дана квадратична функція має два різних корені, а значить, її дискримінант $D = b^2 - 4ac$ — додатний.

Що й треба було довести.

Приклад 4. Неперервна функція $f(x)$ визначена на відрізку $[0; 1]$, причому $f(0) = f(1)$.

Доведіть, що існує хорда графіка функції $f(x)$, паралельна осі абсцис, довжина якої дорівнює $\frac{1}{3}$.

Доведення. Розглянемо функцію $g(x) = f\left(x + \frac{1}{3}\right) - f(x)$. Зрозуміло, що функція g

визначена і неперервна на відрізку $\left[0; \frac{2}{3}\right]$. Якщо нам вдасться довести наявність

такої точки x_0 , що $g(x_0) = 0$, це і буде означати існування хорди, про яку йде мова в умові. Маємо:

$$g(0) = f\left(\frac{1}{3}\right) - f(0), \quad g\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right), \quad g\left(\frac{2}{3}\right) = f(1) - f\left(\frac{2}{3}\right).$$

Враховуючи, що $f(0) = f(1)$, отримуємо:

$$g(0) + g\left(\frac{1}{3}\right) + g\left(\frac{2}{3}\right) = 0.$$

Можливі випадки:

- 1) $g(0) = g\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, що доводить твердження задачі;
- 2) в сумі $g(0) + g\left(\frac{1}{3}\right) + g\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ є принаймні два доданки різних знаків. Це означає за першою теоремою Больцано-Коші, що існує така точка x_0 , що $g(x_0) = 0$.

V. Друга теорема Больцано-Коші

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона набуває всіх значень між $f(a)$ і $f(b)$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $f(a) < f(b)$ (випадок, коли $f(a) \geq f(b)$, доводить-ся аналогічно).

Нехай C — довільне число з проміжку $(f(a); f(b))$, тобто $f(a) < C < f(b)$. Доведемо, що існує точка $x_0 \in (a; b)$, для якої $f(x_0) = C$. Тим самим буде показано, що функція f набуває значення C .

Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - C$. Функція g є неперервною на відрізку $[a; b]$.

$$g(a) = f(a) - C < 0;$$

$$g(b) = f(b) - C > 0.$$

Отже, згідно з першою теоремою Больцано-Коші існує точка $x_0 \in (a; b)$ така, що $g(x_0) = 0$, тобто $f(x_0) - C = 0$; $f(x_0) = C$.

Наведена теорема допомагає обґрунтувати метод знаходження множини значень неперервної функції.

Наслідок. Якщо область визначення неперервної функції f є деякий проміжок, $\min_{D(f)} f(x) = a$, $\max_{D(f)} f(x) = b$ і $a \neq b$, то $E(f) = [a; b]$.

Приклад 5. Знайдіть область значень функції $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$.

Розв'язання. $\frac{x^2}{1+x^4} \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $f(0) = 0$, то $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 0$.

Застосувавши нерівність Коші, запишемо $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{x^2}{2\sqrt{1 \cdot x^4}} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

Оскільки $f(1) = \frac{1}{2}$, то $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2}$.

Функція f неперервна на R . З наслідку другої теореми Больцано-Коші випливає, що $E(f) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Відповідь. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

VI. Означення обмеженості функції

Означення. Функцію $f(x)$ називають **обмеженою на множині M** , якщо існує таке число $C > 0$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C$.

Функцію що обмежена на всій області визначення, називають **обмеженою**.

Нагадаємо, що якщо функція $f(x)$ — визначена і обмежена в деякому околі точки x_0 , а функція $\beta(x)$ — нескінченно мала в точці x_0 , то функція $y = f(x) \cdot \beta(x)$ є нескінченно малою в точці x_0 .

Приклад 6. Доведіть, що функція $y = \operatorname{arctg} x$ є обмеженою.

Доведення. Оскільки $|\operatorname{arctg} x| \leq \pi$, то функція $y = \operatorname{arctg} x$ є обмеженою за означенням.

VII. Перша теорема Вейєрштрасса. Наочна ілюстрація

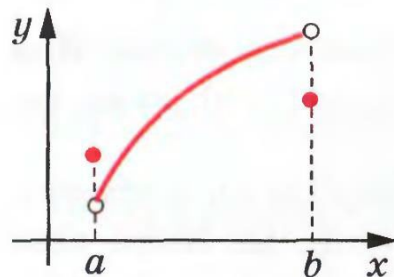
Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона є обмеженою на цьому проміжку.

Для проміжків виду $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$ твердження теореми не є справедливим.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ є неперервною на будь-якому проміжку виду $(0; a]$, проте вона не є обмеженою на цьому проміжку.

VIII. Друга теорема Вейєрштрасса. Наочна ілюстрація (3 хв)

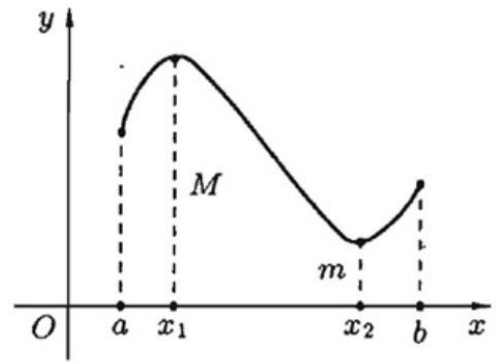
Не будь-яка функція, визначена і обмежена на відрізку $[a; b]$, досягає на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень.



Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку вона набуває своїх найбільшого і найменшого значень.

На рисунку функція $y = f(x)$, що є неперервною на відрізку $[a; b]$, приймає своє найбільше значення $M = \max_{[a;b]} f(x)$ в точці x_1 , і найменше значення $m = \min_{[a;b]} f(x)$ в точці x_2 .

Для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $m \leq f(x) \leq M$.



Приклад 7. Доведіть, що функція $y = \operatorname{tg} x$, яка визначена лише на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

є обмеженою та знайдіть множину значень цієї функції.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ є неперервною і зростаючою на множині $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, то за першою теоремою Вейерштрасса ця функція є обмеженою на цьому

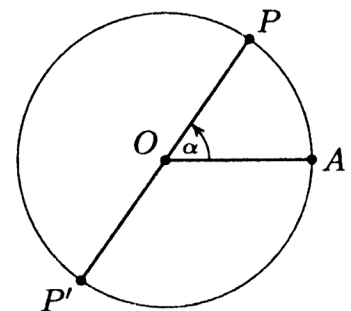
проміжку, причому набуває усіх значень від $\operatorname{tg} 0$ до $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, тобто $E(y) = [0; \sqrt{3}]$.

Відповідь. $E(y) = [0; \sqrt{3}]$.

IX. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Автомобіль починає плавний рух круговою розв'язкою і проїхавши повне коло, плавно зупиняється у початковій точці. Доведіть, що існує дві діаметрально протилежні точки цієї розв'язки у яких швидкість автомобіля була однаковою.



X. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Установіть, чи буде функція $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}$ обмеженою на відрізку $[2; 5]$.
2. Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - 2x + 1$ досягає своїх найбільшого та найменшого значень на відрізку $[0; 3]$.
3. Покажіть, що функція $f(x) = x^4 - x - 1$ набуває нульового значення хоча б в одній точці на відрізку $[-1; 0]$.

4. Покажіть, що рівняння $x^5 - 3x = 1$ має хоча б один корінь, що належить відрізку $[0, 3]$. Установіть відрізок $[n, n+1] \subset [a, b]$, де n — ціле число, до якого належить корінь заданого рівняння.
5. Які з даних функцій є обмеженими:
 1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \operatorname{arccotg} x$; 3) $y = \operatorname{tg} x$.
6. Знайдіть область значень функції:
 1) $y = 3 + \cos x$; 2) $y = \pi - \arccos x$.

Рівень В

1. Установіть, чи буде функція $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x-4}$ обмеженою на відрізку $[0; 5]$.
2. Доведіть, що функція $f(x) = \sin x^2 + \cos^2 x$ досягає своїх найбільшого та найменшого значень на відрізку $[0; \pi]$.
3. Перевірте, чи має задане рівняння дійсні корені на заданому відрізку:
 1) $x^3 + x - 3 = 0$, $[1; 2]$; 2) $x^4 - 4x + 1 = 0$, $[-1; 0]$.
4. Покажіть, що рівняння $x = \frac{1}{2} \sin x + 3$ має хоча б один корінь, що належить відрізку $[-1, 4]$. Установіть відрізок $[n, n+1] \subset [a, b]$, де n — ціле число, до якого належить корінь заданого рівняння.
5. Знайдіть область значень функції:
 1) $y = \frac{x^2}{9x^4 + 1}$; 2) $y = \sqrt{2x - x^2}$.
6. Доведіть, що рівняння $x^3 + 4x + 3 = 0$ має хоча б один дійсний корінь на відрізку $[-1; 0]$.
7. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:
 1) $x(x-5)(x+3)(x^2-1) > 0$; 2) $(x-1)(x+3)(x^2-1) > 0$.
8. Доведіть, що рівняння $x^5 + x - \frac{1}{x} = 0$ має хоча б один дійсний корінь на відрізку $[0,5; 1]$.
9. Знайдіть область значень функції $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.
10. Покажіть, що існує розв'язок рівняння $f(x) = C$, що належить відрізку $[a; b]$. Установіть кількість коренів та відрізки вигляду $[n, n+1] \subset [a, b]$, де n — ціле число, до яких належать ці корені.
 1) $f(x) = x^2 e^x + 2$, $C = \frac{5}{2}$, $x \in [-4, -1]$; 2) $f(x) = x^2 + \cos 2x$, $C = -1$, $x \in [0; 2]$.
11. При дослідженні кількості коренів рівняння $f(x) = a$ було з'ясовано, що при всіх $a \in (-5; 2]$ рівняння має два корені, при всіх $a \in (2; 3]$ — один корінь, при інших значеннях a рівняння не має жодного кореня. Чи може функція f бути неперервною, якщо $D(f) = [0; 1]$?
12. Доведіть, що рівняння має принаймні один дійсний корінь:
 1) $\operatorname{arctg}^3 x = 2 \operatorname{tg} x - 1$; 2) $x^2 \arcsin x + 3x - 1 = 0$.

Рівень С

- 1.** Установіть, чи буде функція $f(x) = x \sin \frac{1}{x} + 1$ обмеженою на відрізку $[0; 1]$.
- 2.** Чи існує неперервна на $[0; 1]$ функція f з такою властивістю: для кожного $x \in [0; 1]$ знайдеться такий $y \in [0; 1]$, що $f(y) > f(x)$?
- 3.** Перевірте, чи має задане рівняння дійсні корені на заданому відрізку:
1) $x + e^x = 0$, $[-1; 0]$; 2) $\operatorname{tg} x - \cos x = 0$, $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
- 4.** Доведіть, що функція $f(x) = x \sin x$ не є обмеженою.
- 5.** Чи існує неперервна на $\mathbb{R}$ функція f така, що $f(x)f(x+1) = -1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$?
- 6.** Доведіть, що рівняння $x^3 + 4x + 3 = 0$ має корінь на відрізку $[-1; 0]$. Знайдіть цей корінь з точністю до 0,1.
- 7.** *Творче завдання.* Опишіть одну з теорем уроку, за допомогою блок-схем чи псевдокоду.

Рефлексія

- | | | | | |
|----|--|-----|------------------------|----|
| 1. | Я знаю першу теорему Больцано-Коші. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я розумію теоретичне обґрунтування методу інтервалів для розв'язування нерівностей. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю другу теорему Больцано-Коші. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Мені відоме означення обмеженої функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю першу теорему Вейерштрасса. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю другу теорему Вейерштрасса. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Теорема Вейерштрасса як основа задач на оптимізацію.
- 2.** Чисельні методи та теорема Больцано — Коші.

3. Історичний аспект: формування поняття неперервності.
4. Теореми Больцано — Коші як інструмент доведення існування розв'язків.
5. Застосування теорем Больцано — Коші у математичному моделюванні.

