

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 13. Властивості неперервних функцій

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Перша теорема Больцано-Коші.
2. Теоретичне обґрунтування методу інтервалів для розв'язування нерівностей.
3. Друга теорема Больцано-Коші.
4. Означення обмеженості функції.
5. Перша теорема Вейєрштрасса. Наочна ілюстрація.
6. Друга теорема Вейєрштрасса. Наочна ілюстрація.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

висловлює власне ставлення до здобутої інформації та нові ідеї, які виникли в результаті аналізу інформаційних джерел, наводить контраргументи [12 МАО 1.2.1–2 П];

визначає компоненти математичної моделі специфічної проблемної ситуації, їх достатність і взаємозв'язки між ними [12 МАО 2.3.1–1 П];

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Якщо неперервна функція в одній точці додатна, а в іншій – від'ємна, чи може вона «оминути» нуль?

2) Чому для того щоб взнати чи має рівняння корені інколи достатньо знати лише знак функції на кінцях певного відрізка?

3) Якщо відомо, що неперервна функція набуває значень 2 і 10, то чи обов'язково вона набуває, наприклад, значення 7?

4) Чи може неперервна функція на відрізку набувати як завгодно великих значень?

5) Чи може неперервна на відрізку функція не досягати на цьому відрізку своїх найменшого й найбільшого значень?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{2-\sqrt{x-2}}$.

Відповідь. -4 .

2. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 3$ і $\lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 4$. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2f(x) + 5g(x)}{f(x) \cdot g(x)}$.

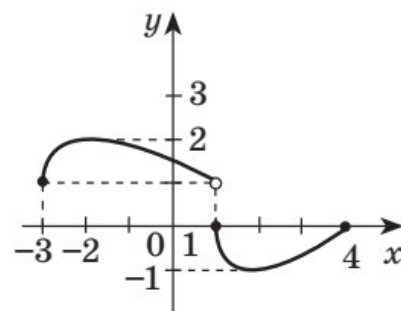
Відповідь. $\frac{13}{6}$.

3. Розв'яжіть нерівність $\frac{(x-1)(2x+1)}{x-3} \leq 0$.

Відповідь. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; 3)$.

4. Укажіть множину значень функції, графік якої зображений на рисунку.

Відповідь. $[-1; 0] \cup [1; 2]$.



5. Знайдіть значення виразу $f(-1) - f(1)$, якщо $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Відповідь. -2.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Автомобіль починає плавний рух круговою розв'язкою і проїхавши повне коло, плавно зупиняється у початковій точці. Доведіть, що існує дві діаметрально протилежні точки цієї розв'язки у яких швидкість автомобіля була однаковою.

III. Перша теорема Больцано-Коші (5 хв)

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку набуває значень різних знаків, то існує така точка $c \in (a; b)$, що $f(c) = 0$.

Доведення.* Розглянемо неперервну на відрізку $[a; b]$ функцію f таку, що числа $f(a)$ та $f(b)$ мають різні знаки. Доведемо існування такої точки $c \in (a; b)$, що $f(c) = 0$.

Припустимо, що такої точки $c \in (a; b)$ не існує, тобто $f(c) \neq 0$ для всіх $c \in (a; b)$.

Нехай c_0 – середина відрізка $[a; b]$.

Оскільки числа $f(a)$ і $f(b)$ різних знаків, то на кінцях одного з відрізків $[a; c_0]$ і $[c_0; b]$ функція $f(x)$ набуває значень різних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_1; b_1]$.

Нехай c_1 – середина відрізка $[a_1; b_1]$. Тоді на кінцях одного з відрізків $[a_1; c_1]$ і $[c_1; b_1]$ функція $f(x)$ набуває значень різних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_2; b_2]$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених відрізків

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots$$

За принципом вкладених відрізків існує така точка c , яка належить усім відрізкам $[a_n; b_n]$. За припущенням $f(c) \neq 0$. Нехай, наприклад, $f(c) > 0$.

Оскільки $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$. Отже, кожна з послідовностей a_n і b_n прямує до числа c . Нехай x_n с тією з точок a_n або b_n , для якої $f(x_n) < 0$. Послідовність (x_n) також прямує до числа c . Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці c , то $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq 0$. Отримали суперечність з нерівністю $f(c) > 0$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених відрізків

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots$$

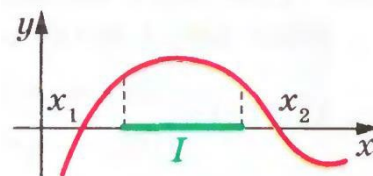
За принципом вкладених відрізків існує така точка c , яка належить усім відрізкам $[a_n; b_n]$. За припущенням $f(c) \neq 0$. Нехай, наприклад, $f(c) > 0$.

Оскільки $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$. Отже, кожна з послідовностей a_n і b_n прямує до числа c . Нехай x_n є тією з точок a_n або b_n , для якої $f(x_n) < 0$. Послідовність x_n також прямує до числа c . Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці c , то $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq 0$. Отримали суперечність з нерівністю $f(c) > 0$.

IV. Теоретичне обґрунтування методу інтервалів для розв'язування нерівностей (2 хв)

Твердження. Якщо функція неперервна і не має нулів на деякому проміжку I , то вона на цьому проміжку зберігає знак.

Доведення. Припустимо, що дана функція $f(x)$ на проміжку I не зберігає знак, тобто існують такі $a \in I$ і $b \in I$, де $a < b$, що числа $f(a)$ і $f(b)$ мають різні знаки (див. рисунок). Тоді за першою теоремою Больцано-Коші існує точка $c \in (a; b) \subset I$ така, що $f(c) = 0$. Отримали суперечність.



Наведене твердження лежить в основі методу інтервалів для розв'язування нерівностей.

Ілюстративні приклади (7–10 хв)

- 6.** Доведіть, що рівняння $x \sin x - \cos x = 0$ має принаймні один дійсний корінь.

Доведення. Розглянемо неперервну на $\mathbb{R}$ функцію $f(x) = x \sin x - \cos x$. Зауважимо, що $f(0) = -1$ і $f(\pi) = 1$. Таким чином за першою теоремою Больцано-Коші, існує точка $x_1 \in (0; \pi)$ така, що $f(x_1) = 0$.

- 7.** Чи має рівняння $x^3 - 3x - 1 = 0$ принаймні один дійсний корінь на відрізку $[0; 2]$?

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Ця функція неперервна на відрізку $[0; 2]$ і на його кінцях набуває різних за знаком значень: $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 1 > 0$. Отже, згідно з першою теоремою Больцано-Коші існує принаймні одна точка c ($0 < c < 2$), у якій значення функції дорівнює нулю. Число c і є коренем заданого рівняння.

Відповідь. Так.

- 8.** Числа a, b, c такі, що $(a + b + c)c < 0$. Доведіть, що $b^2 > 4ac$.

Доведення. Якщо $a = 0$ і $b = 0$, то $c^2 < 0$, що не можливо.

Якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то $b^2 > 4 \cdot 0 \cdot c$ є правильною нерівністю.

Якщо $a \neq 0$, то розглянемо квадратичну функцію $f(x) = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$.

З умови випливає, що числа $f(1) = a + b + c$ і $f(0) = c$ мають різні знаки. Тоді за першою теоремою Больцано-Коші існує $x_0 \in (0; 1)$ таке, що $f(x_0) = 0$, причому x_0 — некратний корінь. Таким чином, дана квадратична функція має два різних корені, а значить, її дискримінант $D = b^2 - 4ac$ — додатний.

Що й треба було довести.

9. Неперервна функція $f(x)$ визначена на відрізку $[0; 1]$, причому $f(0) = f(1)$. Доведіть, що існує хорда графіка функції $f(x)$, паралельна осі абсцис, довжина якої дорівнює $\frac{1}{3}$.

Доведення. Розглянемо функцію $g(x) = f\left(x + \frac{1}{3}\right) - f(x)$. Зрозуміло, що функція g визначена і неперервна на відрізку $\left[0; \frac{2}{3}\right]$. Якщо нам вдасться довести наявність такої точки x_0 , що $g(x_0) = 0$, це і буде означати існування хорди, про яку йде мова в умові. Маємо:

$$g(0) = f\left(\frac{1}{3}\right) - f(0), \quad g\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right), \quad g\left(\frac{2}{3}\right) = f(1) - f\left(\frac{2}{3}\right).$$

Враховуючи, що $f(0) = f(1)$, отримуємо:

$$g(0) + g\left(\frac{1}{3}\right) + g\left(\frac{2}{3}\right) = 0.$$

Можливі випадки:

- 1) $g(0) = g\left(\frac{1}{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\right) = 0$, що доводить твердження задачі;
- 2) в сумі $g(0) + g\left(\frac{1}{3}\right) + g\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ є принаймні два доданки різних знаків. Це означає за першою теоремою Больцано-Коші, що існує така точка x_0 , що $g(x_0) = 0$.

V. Друга теорема Больцано-Коші

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона набуває всіх значень між $f(a)$ і $f(b)$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $f(a) < f(b)$ (випадок, коли $f(a) \geq f(b)$, доводить-ся аналогічно).

Нехай C — довільне число з проміжку $(f(a); f(b))$, тобто $f(a) < C < f(b)$. Доведемо, що існує точка $x_0 \in (a; b)$, для якої $f(x_0) = C$. Тим самим буде показано, що функція f набуває значення C .

Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - C$. Функція g є неперервною на відрізку $[a; b]$.

$$g(a) = f(a) - C < 0;$$

$$g(b) = f(b) - C > 0.$$

Отже, згідно з першою теоремою Больцано-Коші існує точка $x_0 \in (a; b)$ така, що $g(x_0) = 0$, тобто $f(x_0) - C = 0$; $f(x_0) = C$.

Наведена теорема допомагає обґрунтувати метод знаходження множини значень неперервної функції.

Наслідок. Якщо областю визначення неперервної функції f є деякий проміжок, $\min_{D(f)} f(x) = a$, $\max_{D(f)} f(x) = b$ і $a \neq b$, то $E(f) = [a; b]$.

Ілюстративні приклади (3 хв)

10. Знайдіть область значень функції $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$.

Розв'язання. $\frac{x^2}{1+x^4} \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $f(0) = 0$, то $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 0$.

Застосувавши нерівність Коші, запишемо $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{x^2}{2\sqrt{1 \cdot x^4}} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$.

Оскільки $f(1) = \frac{1}{2}$, то $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2}$.

Функція f неперервна на $\mathbb{R}$. З наслідку другої теореми Больцано-Коші випливає,

що $E(f) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Відповідь. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

VI. Означення обмеженості функції (2 хв)

Означення. Функцію $f(x)$ називають **обмеженою на множині M** , якщо існує таке число $C > 0$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C$.

Функцію що обмежена на всій області визначення, називають **обмеженою**.

Нагадаємо, що якщо функція $f(x)$ — визначена і обмежена в деякому околі точки x_0 , а функція $\beta(x)$ — нескінченно мала в точці x_0 , то функція $y = f(x) \cdot \beta(x)$ є нескінченно малою в точці x_0 .

Ілюстративні приклади (2 хв)

11. Доведіть, що функція $y = \operatorname{arctg} x$ є обмеженою.

Доведення. Оскільки $|\operatorname{arctg} x| \leq \pi$, то функція $y = \operatorname{arctg} x$ є обмеженою за означенням.

12. Доведіть, що $f(x) = x^3$ є обмеженою на відрізку $[-1; 2]$.

Доведення. Функція $f(x) = x^3$ є зростаючою на всій області визначення, тому $|x^3| \leq 8$.

Отже, функція $f(x) = x^3$ є обмеженою на відрізку $[-1; 2]$ за означенням.

VII. Перша теорема Вейєрштрасса. Наочна ілюстрація (5 хв)

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона є обмеженою на цьому проміжку.

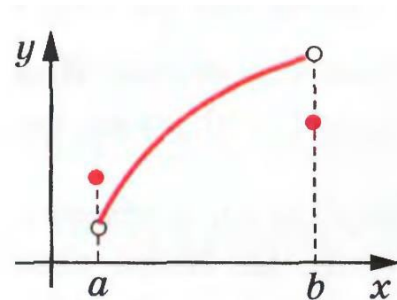
Для проміжків виду $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b)$ твердження теореми не є справедливим.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ є неперервною на будь-якому проміжку виду $(0; a]$, про-

те вона не є обмеженою на цьому проміжку.

VIII. Друга теорема Вейєрштрасса. Наочна ілюстрація (3 хв)

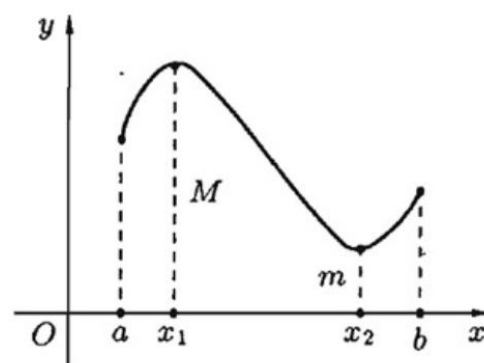
Не будь-яка функція, визначена і обмежена на відрізку $[a; b]$, досягає на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень.



Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку вона набуває своїх найбільшого і найменшого значень.

На рисунку функція $y = f(x)$, що є неперервною на відрізку $[a; b]$, приймає своє найбільше значення $M = \max_{[a; b]} f(x)$ в точці x_1 , і найменше значення $m = \min_{[a; b]} f(x)$ в точці x_2 .

Для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $m \leq f(x) \leq M$.



Ілюстративні приклади (3 хв)

- 13.** Доведіть, що функція $y = \operatorname{tg} x$, яка визначена лише на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ є обмеженою та знайдіть множину значень цієї функції.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \operatorname{tg} x$ є неперервною і зростаючою на множині $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$, то за першою теоремою Вейєрштрасса ця функція є обмеженою на цьому проміжку, причому набуває усіх значень від $\operatorname{tg} 0$ до $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, тобто $E(y) = \left[0; \sqrt{3}\right]$.

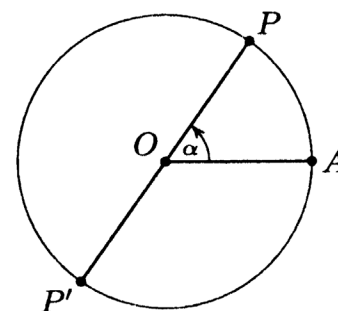
Відповідь. $E(y) = \left[0; \sqrt{3}\right]$.

IX. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5–7 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Автомобіль починає плавний рух круговою розв'язкою і проїхавши повне коло, плавно зупиняється у початковій точці. Доведіть, що існує дві діаметрально протилежні точки цієї розв'язки у яких швидкість автомобіля була однаковою.

Доведення. Розглянемо радіус кругової розв'язки OA , проведений у початкову точку, довільну точку P кола та діаметрально протилежну їй точку P' (див. рис.).



Нехай $\angle POA = \alpha$, тоді значення швидкості у відповідній точці позначимо через $V(\alpha)$. Розглянемо функцію $U(\alpha) = V(\alpha + \pi) - V(\alpha)$. Вона є неперервною на $[0; \pi]$, оскільки автомобіль рухався плавно. При цьому

$$U(0) = V(\pi) - V(0) = V(\pi),$$

$$U(\pi) = V(2\pi) - V(\pi) = -V(\pi).$$

Тоді або $V(\pi) = 0$, тобто $U(0) = U(\pi) = 0$, або $V(\pi) \neq 0$, тоді числа $U(0)$ і $U(\pi)$ мають протилежні знаки, отже, за першою теоремою Больцано-Коші знайдеться значення α , для якого $U(\alpha) = 0$. Діаметрально протилежні точки, що відповідають цьому значенню α , є шуканими.

Х. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. Установіть, чи буде функція $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x + 1}$ обмеженою на відрізку $[2; 5]$.
2. Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - 2x + 1$ досягає своїх найбільшого та найменшого значень на відрізку $[0; 3]$.
3. Покажіть, що функція $f(x) = x^4 - x - 1$ набуває нульового значення хоча б в одній точці на відрізку $[-1; 0]$.
4. Покажіть, що рівняння $x^5 - 3x = 1$ має хоча б один корінь, що належить відрізку $[0, 3]$. Установіть відрізок $[n, n+1] \subset [a, b]$, де n – ціле число, до якого належить корінь заданого рівняння.
5. Які з даних функцій є обмеженими:
 1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = \operatorname{arccotg} x$; 3) $y = \operatorname{tg} x$.
6. Знайдіть область значень функції:
 1) $y = 3 + \cos x$; 2) $y = \pi - \arccos x$.

Рівень В

1. Установіть, чи буде функція $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x-4}$ обмеженою на відрізку $[0; 5]$.
2. Доведіть, що функція $f(x) = \sin x^2 + \cos^2 x$ досягає своїх найбільшого та найменшого значень на відрізку $[0; \pi]$.
3. Перевірте, чи має задане рівняння дійсні корені на заданому відрізку:
 1) $x^3 + x - 3 = 0$, $[1; 2]$; 2) $x^4 - 4x + 1 = 0$, $[-1; 0]$.
4. Покажіть, що рівняння $x = \frac{1}{2} \sin x + 3$ має хоча б один корінь, що належить відрізку $[-1, 4]$. Установіть відрізок $[n, n+1] \subset [a, b]$, де n – ціле число, до якого належить корінь заданого рівняння.
5. Знайдіть область значень функції:
 1) $y = \frac{x^2}{9x^4 + 1}$; 2) $y = \sqrt{2x - x^2}$.

6. Доведіть, що рівняння $x^3 + 4x + 3 = 0$ має хоча б один дійсний корінь на відрізку $[-1; 0]$.
7. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:
 1) $x(x-5)(x+3)(x^2-1) > 0$; 2) $(x-1)(x+3)(x^2-1) > 0$.
8. Доведіть, що рівняння $x^5 + x - \frac{1}{x} = 0$ має хоча б один дійсний корінь на відрізку $[0,5; 1]$.
9. Знайдіть область значень функції $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.
10. Покажіть, що існує розв'язок рівняння $f(x) = C$, що належить відрізку $[a; b]$. Установіть кількість коренів та відрізки вигляду $[n, n+1] \subset [a, b]$, де n — ціле число, до яких належать ці корені.
 1) $f(x) = x^2 e^x + 2$, $C = \frac{5}{2}$, $x \in [-4, -1]$; 2) $f(x) = x^2 + \cos 2x$, $C = -1$, $x \in [0; 2]$.
11. При дослідженні кількості коренів рівняння $f(x) = a$ було з'ясовано, що при всіх $a \in (-5; 2]$ рівняння має два корені, при всіх $a \in (2; 3]$ — один корінь, при інших значеннях a рівняння не має жодного кореня. Чи може функція f бути неперервною, якщо $D(f) = [0; 1]$?
12. Доведіть, що рівняння має принаймні один дійсний корінь:
 1) $\arctg^3 x = 2 \operatorname{tg} x - 1$; 2) $x^2 \arcsin x + 3x - 1 = 0$.

Рівень С

1. Установіть, чи буде функція $f(x) = x \sin \frac{1}{x} + 1$ обмеженою на відрізку $[0; 1]$.
2. Чи існує неперервна на $[0; 1]$ функція f з такою властивістю: для кожного $x \in [0; 1]$ знайдеться такий $y \in [0; 1]$, що $f(y) > f(x)$?
3. Перевірте, чи має задане рівняння дійсні корені на заданому відрізку:
 1) $x + e^x = 0$, $[-1; 0]$; 2) $\operatorname{tg} x - \cos x = 0$, $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
4. Доведіть, що функція $f(x) = x \sin x$ не є обмеженою.
5. Чи існує неперервна на $\mathbb{R}$ функція f така, що $f(x)f(x+1) = -1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$?
6. Доведіть, що рівняння $x^3 + 4x + 3 = 0$ має корінь на відрізку $[-1; 0]$. Знайдіть цей корінь з точністю до 0,1.
7. **Творче завдання.** Опишіть одну з теорем уроку, за допомогою блок-схем чи псевдокоду.

XI. Рефлексія (2 хв)

1. Я знаю першу теорему Больцано-Вейєрштрасса.

Так

Ще треба потренуватися

Ні

- | | | | | |
|-----------|--|-----|------------------------|----|
| 2. | Я розумію теоретичне обґрунтування методу інтервалів для розв'язування нерівностей. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я знаю другу теорему Больцано-Коші. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Мені відоме означення обмеженої функції. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 5. | Я знаю першу теорему Вейерштрасса. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 6. | Я знаю другу теорему Вейерштрасса. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 7. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

- 1.** Теореми Вейерштрасса як основа задач на оптимізацію.
- 2.** Чисельні методи та теорема Больцано — Коші.
- 3.** Історичний аспект: формування поняття неперервності.
- 4.** Теореми Больцано — Коші як інструмент доведення існування розв'язків.
- 5.** Застосування теорем Больцано — Коші у математичному моделюванні.

Список використаних джерел

- 1) Алгебра : підручн. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Харків : Гімназія, 2011. Ч. 1. — 256 с. : іл.
- 2) Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — Київ : Освіта, 2018. — 336 с.
- 3) Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу. — Тернопіль: «Підручники & посібники», 2001. — 304 с: іл.