

Урок 14. Урок–практикум. Застосування
властивостей неперервних функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

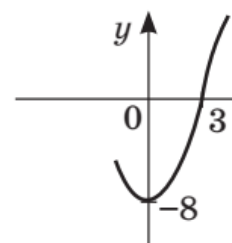
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитеся використовувати наслідок із другої теореми Больцано-Коші для знаходження множини значень функції;
- 2) навчитеся використовувати першу теорему Больцано-Коші для доведення наявності дійсного кореня рівняння;
- 3) познайомитися з алгоритмом наближеного знаходження кореня рівняння методом половинного ділення;
- 4) навчитеся розв'язувати рівняння виду $f(x) = x$, за методом простої ітерації;
- 5) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Функцію задано формулою $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Знайдіть її множину значень.
2. Знайдіть значення виразу $g(1) \cdot g(4,5)$, якщо $g(x) = \sqrt{2x+7}$.
3. Область визначення функції $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+5}$ є відрізком. Знайдіть довжину цього відрізка.
4. На рисунку зображено фрагмент графіка парної функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Знайдіть значення виразу $f(0) + 5 \cdot f(5)$, якщо $f(-5) = 4$.
5. Число $T = 5$ є періодом функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Знайдіть значення виразу $6 - 3 \cdot f(11)$, якщо $f(1) = 7$.



III. Знаходження множини значень функцій

Нагадаємо, що із другої теореми Больцано-Коші випливає наступний наслідок:

Якщо областю визначення неперервної функції $f(x)$ є деякий проміжок, $\min_{D(f)} f(x) = a$, $\max_{D(f)} f(x) = b$ і $a \neq b$, то $E(f) = [a; b]$.

Цей наслідок допомагає знаходити множини значень неперервних на відрізку функцій.

Приклад 1. Знайдіть область значень функції $f(x) = \frac{x^2}{4x^4 + 3x^2 + 1}$.

Розв'язання. $\frac{x^2}{4x^4 + 3x^2 + 1} \geq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $f(0) = 0$, то $\min_{\mathbb{R}} f(x) = 0$.

Застосувавши нерівність Коші, запишемо $4x^4 + 1 \geq 2\sqrt{4x^4 \cdot 1} = 4x^2$, отже $4x^4 + 1 + 3x^2 \geq 7x^2$.

Внаслідок того, що вирази $4x^4 + 3x^2 + 1$ та x^2 при $x \neq 0$ додатні, то справедливою є нерівність $\frac{1}{4x^4 + 3x^2 + 1} \leq \frac{1}{7x^2}$, звідки $\frac{x^2}{4x^4 + 3x^2 + 1} \leq \frac{1}{7}$.

Оскільки $f(1) = \frac{1}{7}$, то $\max_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{7}$.

Функція f неперервна на $\mathbb{R}$. З наслідку другої теореми Больцано-Коші випливає, що $E(f) = \left[0; \frac{1}{7}\right]$.

Відповідь. $\left[0; \frac{1}{7}\right]$.

Приклад 2. Знайдіть область значень функції $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Розв'язання. Перетворимо вираз:

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

$$0 \leq \sin^2 2x \leq 1, \quad -\frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4} \sin^2 2x \leq 0, \quad \frac{1}{4} \leq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \leq 1.$$

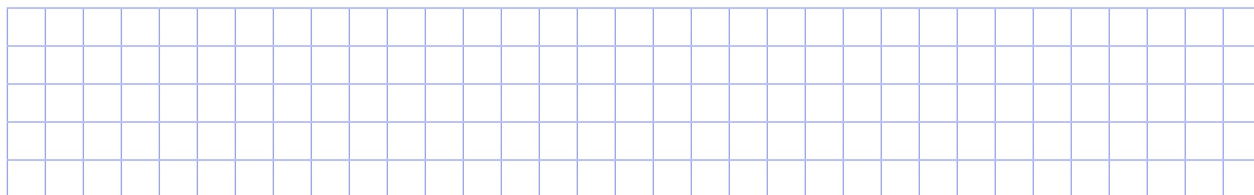
$f(0) = 1$, тому $\max_{\mathbb{R}} f(x) = 1$;

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}, \text{ тому } \min_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{4}.$$

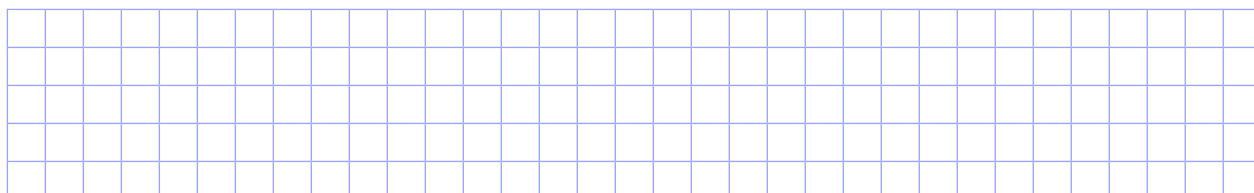
Функція $f(x)$ неперервна на $\mathbb{R}$. З наслідку другої теореми Больцано-Коші випливає, що $E(f) = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

Відповідь. $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

Приклад 3. Знайдіть область значень функції $f(x) = x^3 + 3x$, що визначена на відрізку $[-2; 2]$.



Приклад 4. Знайдіть область значень функції $f(x) = \sqrt{16x - x^2}$.



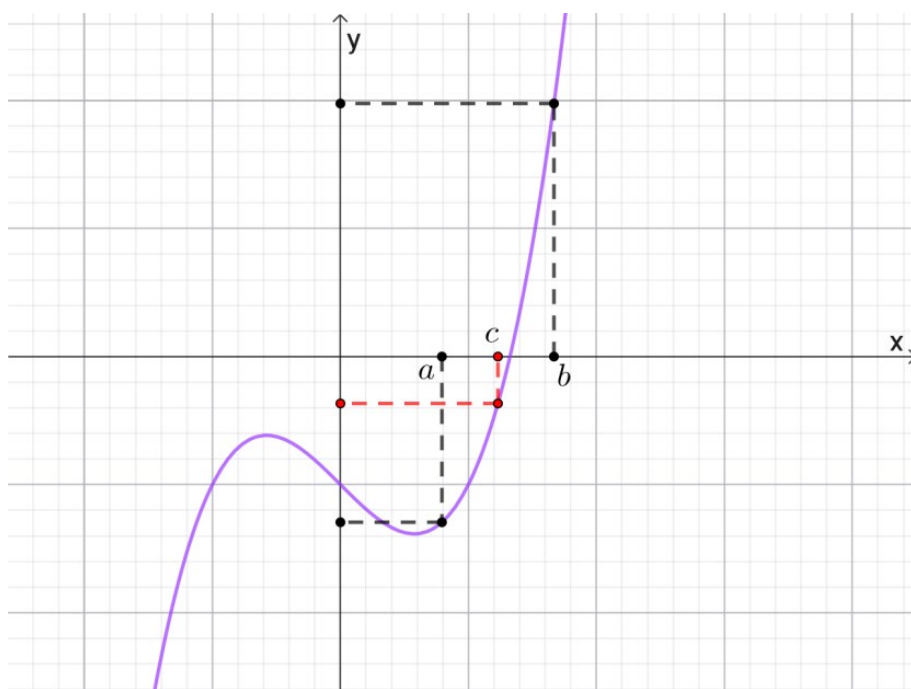
IV. Доведення наявності коренів рівнянь (5 хв)

Наявність кореня рівняння на відрізку часто доводять використовуючи першу теорему Больцано-Коші. Нагадаємо її.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку набуває значень різних знаків, то існує така точка $c \in (a; b)$, що $f(c) = 0$.

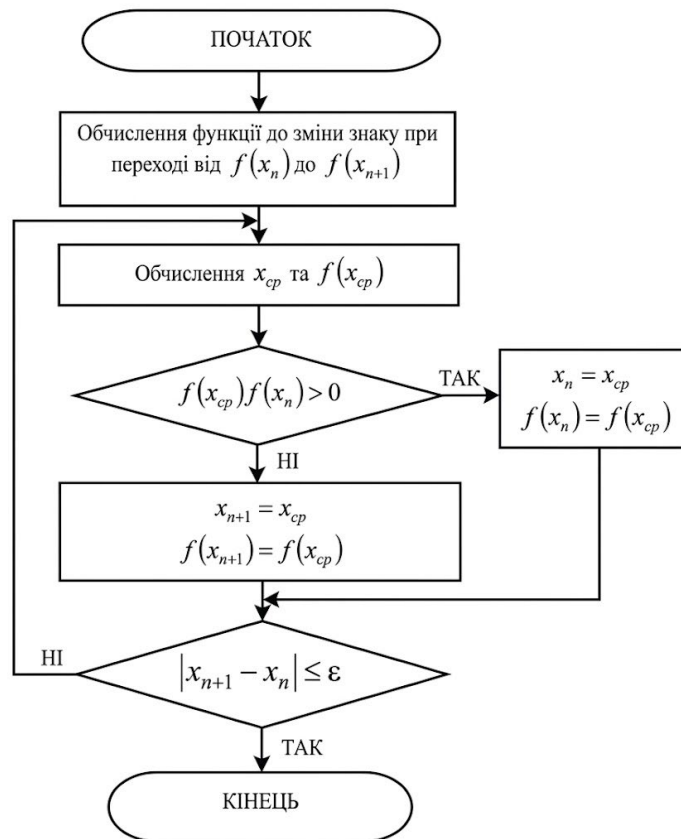
Перша теорема Больцано-Коші обґрунтовує один із найпростіших чисельних методів пошуку коренів рівняння. Це так званий метод половинного ділення.

Нехай дано рівняння $f(x) = 0$. Необхідно знайти його корінь з точністю ϵ на відрізку $[a; b]$, на якому функція неперервна і у кінцях має значення різних знаків, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$. Таким чином, згідно першої теореми Больцано-Коші, на цьому відрізку існує хоча б один корінь рівняння. Далі знаходимо середину відрізка $[a; b]$ точку c (див. рисунок).



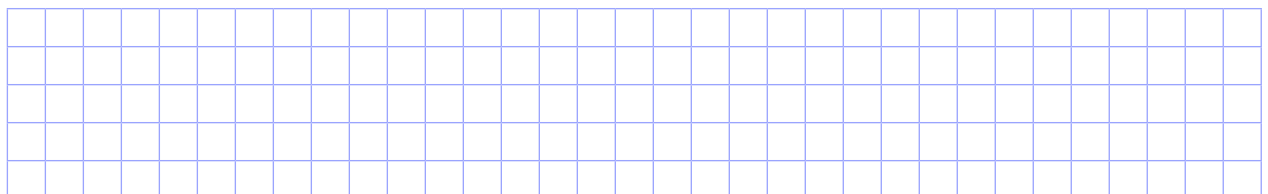
Корінь може виявитися внутрішньою точкою відрізка $[a; c]$ або відрізка $[c; b]$, чи бути рівним c . В останньому випадку метод припиняє роботу. Інакше за допомогою перевірки виконання умов $f(a) \cdot f(c) < 0$ і $f(c) \cdot f(b) < 0$ з'ясується, на якій частині відрізка залишився корінь. Далі процедура повторюється для тієї половини відрізка, на якій є корінь, доки відрізок не зменшиться настільки, що його довжина буде менша від заданої похибки ε .

Наведемо блок схему алгоритму методу половинного ділення.



Примітка. Хоча метод половинного ділення є досить простим для розуміння і для реалізації, проте має малу швидкість збіжності, оскільки інтервал, де знаходиться корінь, з кожним кроком зменшується не більше, ніж в два рази. Тому на практиці для наближених обчислень використовується дуже рідко.

Приклад 5. Доведіть, що рівняння $x^3 + 3x - 8 = 0$ має принаймні один дійсний корінь.



Приклад 6. Доведіть, що рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ має корінь на відрізку $[0; 1]$, та знайдіть цей корінь з точністю до 0,01 методом половинного ділення.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1,$$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 1 = -1.$$

Отже, за першою теоремою Больцано-Коші існує таке число $c \in (0;1)$ що $f(c) = 0$, тобто рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ має корінь на відрізку $[0; 1]$.

Розділимо відрізок $[0; 1]$ на відрізки $[0; 0,5]$ та $[0,5; 1]$.

$$f(0,5) = 0,5^3 - 3 \cdot 0,5 + 1 = -0,375.$$

Оскільки $f(0) \cdot f(0,5) < 0$, то корінь даного рівняння знаходиться на відрізку $[0; 0,5]$.

Розділимо відрізок $[0; 0,5]$ на відрізки $[0; 0,25]$ та $[0,25; 0,5]$.

$$f(0,25) = 0,25^3 - 3 \cdot 0,25 + 1 = 0,265625.$$

Оскільки $f(0,25) \cdot f(0,5) < 0$, то корінь даного рівняння знаходиться на відрізку $[0,25; 0,5]$.

Розділимо відрізок $[0,25; 0,5]$ на відрізки $[0,25; 0,375]$ та $[0,375; 0,5]$.

$$f(0,375) = 0,375^3 - 3 \cdot 0,375 + 1 = -0,072265625.$$

Оскільки $f(0,25) \cdot f(0,375) < 0$, то корінь даного рівняння знаходиться на відрізку $[0,25; 0,375]$.

Розділимо відрізок $[0,25; 0,375]$ на відрізки $[0,25; 0,3125]$ та $[0,3125; 0,375]$.

$$f(0,3125) = 0,3125^3 - 3 \cdot 0,3125 + 1 = 0,093017578.$$

Оскільки $f(0,3125) \cdot f(0,375) < 0$, то корінь даного рівняння знаходиться на відрізку $[0,3125; 0,375]$.

Продовжуючи подібні обчислення, встановлюємо, що коренем даного рівняння з точністю до 0,01 є число 0,34.

Відповідь. 0,34.

V. Поняття методу простої ітерації

Часто схожі візуально рівняння розв'язуються принципово по різному.

Наприклад рівняння $\sin x = x$ легко розв'язати графічно, проте корінь схожого рівняння $\cos x = x$ знайти точно не можливо.

У таких випадках на допомогу приходять так звані чисельні методи. Із одним із них, методом половинного ділення, ви познайомилися уже на цьому уроці.

Наведемо ще один чисельний метод: метод простої ітерації.

Розв'язуючи рівняння цим методом, спочатку обирають довільне число x_1 (початкове наближення). Далі будують послідовність x_n таку, що $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Якщо послідовність x_n виявиться збіжною, то її границею буде корінь рівняння $f(x) = x$. Справді, перейдемо до границі в рівності $x_{n+1} = f(x_n)$. Маємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = a$. Крім цього, з неперервності функції f випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$. Отже, доведено, що $a = f(a)$, тобто число a є коренем рівняння $x = f(x)$.

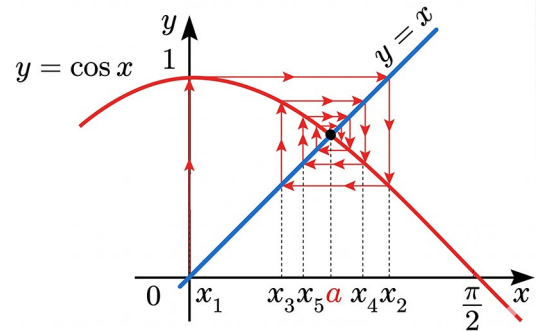
VI. Послідовність наближень

Доведене твердження лежить в основі методу простої ітерації. Оскільки послідовність x_n може прямувати лише до кореня рівняння $f(x) = x$, то за наближене значення цього кореня беруть деякий член послідовності x_n з достатньо великим номером n . Тому послідовність x_n називають *послідовністю наближень*.

VII. Розв'язування рівнянь $f(x) = x$, де $f(x)$ — неперервна функція методом простої ітерації

Покажемо, як працює цей метод при розв'язуванні рівняння $\cos x = x$. Оберемо довільне початкове наближення. Нехай $x_1 = 0$. Використовуючи метод простої ітерації, побудуємо послідовність наближень до кореня рівняння (див. рисунок):

Запишемо тридцять перших членів послідовності наближень за допомогою таблиці:



n	x_n	cos(x_n)
1	0	1
2	1	0,540302306
3	0,540302306	0,857553216
4	0,857553216	0,65428979
5	0,65428979	0,793480359
6	0,793480359	0,701368774
7	0,701368774	0,763959683
8	0,763959683	0,722102425
9	0,722102425	0,750417762
10	0,750417762	0,731404042
11	0,731404042	0,744237355
12	0,744237355	0,73560474
13	0,73560474	0,741425087
14	0,741425087	0,737506891
15	0,737506891	0,740147336
16	0,740147336	0,738369204
17	0,738369204	0,739567202
18	0,739567202	0,73876032
19	0,73876032	0,739303892
20	0,739303892	0,738937757
21	0,738937757	0,7391844
22	0,7391844	0,739018262
23	0,739018262	0,739130177
24	0,739130177	0,739054791
25	0,739054791	0,739105572
26	0,739105572	0,739071365
27	0,739071365	0,739094407
28	0,739094407	0,739078886
29	0,739078886	0,739089341
30	0,739089341	0,739082299

Вже тридцятий член послідовності має п'ять правильних десяткових знаків після коми кореня $a = 0,7390851\dots$ рівняння $\cos x = x$.

При розв'язуванні рівняння виду $f(x) = 0$ методом простої ітерації необхідно правильно подати рівняння в ітераційній формі $\varphi(x) = x$ так, щоб послідовність $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ була збіжною.

Наприклад при розв'язуванні рівняння $x^3 + x - 1 = 0$, записавши його у вигляді $1 - x^3 = x$ чи $x^3 + 2x - 1 = x$, вам не вдасться розв'язати його методом простої ітерації тому

що послідовності $x_{n+1} = 1 - x_n^3$, $x_{n+1} = x_n^3 + 2x_n - 1$ із будь-яким першим членом будуть розбіжними.

Проте, якщо подати це рівняння у вигляді $\frac{1}{x^2 + 1} = x$ чи $\sqrt[3]{(1-x)} = x$, то метод простої ітерації уже можна застосувати.

Примітка. Перший член послідовності варто по можливості обирати якнайближче до шуканого кореня.

Критерій збіжності послідовності $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ використовує похідну, тому познайомитися з ним ви зможете на наступних уроках, а зараз установити збіжність послідовності і можливість розв'язати рівняння методом простої ітерації можна використовуючи різноманітні застосунки, зокрема скористатися Geogebra-аплетом:



<https://www.geogebra.org/m/qmcghq74>

Приклад 7. Знайдіть корінь рівняння $x^3 + x - 1 = 0$ з точністю до сотих методом простої ітерації.

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді $\frac{1}{x^2 + 1} = x$. Те що послідовність

$x_{n+1} = \varphi(x_n)$, де $\varphi(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ збіжна перевіряємо за допомогою Geogebra-аплету:

<https://www.geogebra.org/m/qmcghq74>

Вибравши $x_1 = 0$ обчислення можна провести в таблиці Excel чи за допомогою іншої комп'ютерної програми.

Через 20 ітерацій бачимо, що коренем даного рівняння з точністю до 0,01 є число 0,68.

Відповідь. 0, 68.

n	x_n	$\varphi(x_n)$
1	0	1
2	1	0,5
3	0,5	0,8
4	0,8	0,609756098
5	0,609756098	0,72896791
6	0,72896791	0,652999725
7	0,652999725	0,701061373
8	0,701061373	0,670471796
9	0,670471796	0,689877632
10	0,689877632	0,677538381
11	0,677538381	0,685373593
12	0,685373593	0,680393857
13	0,680393857	0,683556995
14	0,683556995	0,681547035
15	0,681547035	0,682823938
16	0,682823938	0,682012619
17	0,682012619	0,682528067
18	0,682528067	0,682200573
19	0,682200573	0,682408641
20	0,682408641	0,682276445

VIII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Швидкість автомобіля задається формулою $v(t) = t^3 - 6t^2 + 15t + 4$ (у м/с), де t — час у секундах. Уважаючи, що функція визначена та неперервна для $t \geq 0$, потрібно визначити момент часу, коли швидкість автомобіля дорівнює $v(t) = 20$ м/с з точністю до 0,1 с.

ІХ. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

- 1.** Для функції $f(x) = x^3 - 5x + 2$ обчисліть $f(0)$, $f(-3)$, $f(1)$, $f(2)$. На яких інтервалах функція має нулі? На яких інтервалах функція зберігає знак?
- 2.** Доведіть, що рівняння $2 + 7x - x^3 = 0$ має корені.
- 3.** Знайдіть область значень функції $f(x) = 2 \sin x + 3$.
- 4.** Доведіть, що рівняння $x^5 + 2x^2 - 11 = 0$ має принаймні один корінь.
- 5.** Доведіть, що рівняння $x^6 + 2x - 13 = 0$ має принаймні один корінь.
- 6.** Доведіть, що функція $f(x) = x^3 - 6x + 4$ має не менше одного нуля на відрізку $[0; 3]$.

Рівень В

- 1.** Доведіть, що рівняння $x^3 + 4x + 3 = 0$ має корінь на відрізку $[-1; 0]$. Знайдіть цей корінь з точністю до 0,1.
- 2.** Знайдіть область значень функції $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.
- 3.** З точністю до 0,1 знайдіть корінь $x^3 + x - 3 = 0$ на відрізку $[1; 2]$.
- 4.** З точністю до 0,1 знайдіть корінь $x^4 - 4x + 1 = 0$ на відрізку $[0; 1]$.
- 5.** Знайдіть область значень функції $y = \sqrt{4x - 4x^2}$.
- 6.** Знайдіть область значень функції $y = \frac{x^2}{9x^4 + 7x^2 + 1}$.
- 7.** Знайдіть область значень функції $y = \sqrt{3x - x^2}$.
- 8.** Доведіть, що рівняння має хоча б один дійсний корінь:
1) $x^3 - 3x^2 + 6x - 7 = 0$; 2) $x^8 - x^2 - 9 = 0$.
- 9.** Доведіть, що рівняння має хоча б один дійсний корінь:
1) $x^5 + x + 8 = 0$; 2) $x^6 - 3x^3 - x - 27 = 0$.
- 10.** Неперервна функція $f(x)$ така, що її областю визначення і областю значень є відрізок $[0; 1]$. Доведіть, що рівняння $f(x) = x$ має корені.
- 11.** Доведіть, що рівняння $x = \sin x + 1$ має корінь.
- 12.** Доведіть, що для будь-якого числа $a \in \mathbb{R}$ рівняння $x^3 + x + a = 0$ має хоча б один дійсний корінь.

Рівень С

- 1.** Доведіть, що рівняння $x^5 + x - \frac{1}{x} = 0$ має корінь на інтервалі $[0,5; 1]$. Знайдіть цей корінь з точністю до 0,1.
- 2.** Доведіть, що рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ має три дійсні корені.
- 3.** З точністю до 0,1 знайдіть корінь рівняння $x^3 - 9x^2 + 24x - 17 = 0$ на проміжку $[3; 5]$.
- 4.** З точністю до 0,1 знайдіть корінь рівняння $12x^4 - 16x^3 + 1 = 0$ на проміжку $[0; 1,5]$.

5. Доведіть, що рівняння $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$ при $a < b < c$ має два різних дійсних корені.
6. Доведіть, що якщо одне з чисел c або d лежить на числовій прямій між числами a і b , то при будь-якому λ рівняння $(x-a)(x-b) + \lambda(x-c)(x-d) = 0$ має корені.
7. **Творче завдання.** Запрограмуйте алгоритм знаходження кореня рівняння із заданою точністю методом половинного ділення.

Рефлексія

- 1) Я сьогодні навчився/навчилась
-
-
- 2) Мені здалося цікавим
-
-
- 3) У мене залишилися запитання щодо
-
-

Можливі теми проєктів

1. Геометрична інтерпретація доведення існування кореня рівняння..
2. Переваги та недоліки методу простої ітерації в прикладних задачах.
3. Комп'ютерне моделювання процесу збіжності послідовності.
4. Реалізація алгоритму простої ітерації в середовищах програмування.
5. Геометрична інтерпретація ітераційного процесу на координатній площині.







