

Урок 15. Урок–практикум. Дослідження властивостей неперервних функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

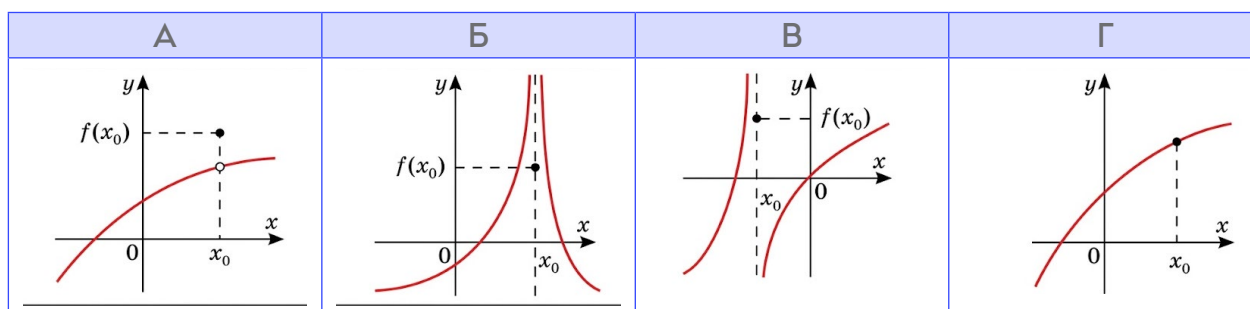
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитеся досліджувати кількість коренів рівняння $f(x) = a$, залежно від значень параметра a ;
- 2) дізнаєтесь методи доведення обмеженості та необмеженості функцій;
- 3) навчитеся застосовувати властивості обмежених функцій для розв'язування рівнянь і нерівностей;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

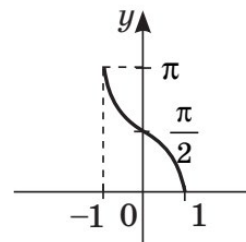
II. Повторення

1. Серед наведених укажіть варіанти відповідей де функція $f(x)$ у точці x_0 має розрив другого роду.



2. Графік функції $y = \sin x$ утричі розтягнули вздовж осі ординат. Укажіть функцію, графік якої отримали.

3. Графік функції $y = \cos x$ удвічі стиснули вздовж осі абсцис. Укажіть функцію, графік якої отримали.
4. На рисунку зображено ескіз графіка функції $y = \arccos x$. Зобразіть ескіз графіка функції $y = \arccos|x|$.



5. Знайдіть значення аргументу x , при якому значення функції $y = \frac{5+9x}{x}$ дорівнює 11.
- Відповідь.* 2,5.

III. Дослідження кількості коренів рівняння $f(x) = a$, де a — параметр, що набуває певних значень

У багатьох прикладних задачах результат залежить від певного параметра. Змінюючи його значення, ми можемо отримувати різну кількість розв'язків однієї й тієї ж моделі. Саме тому дослідження кількості коренів рівняння $f(x) = a$ є важливим інструментом аналізу математичних моделей.

При дослідженні кількості коренів рівняння $f(x) = a$ існує два основних підходи.

1) Побудувати графік функції $y = f(x)$ (якщо це можливо) і графік функції $y = a$ (що є горизонтальною прямою). Якщо функція $f(x)$ неперервна, то за графіком установити кількість точок перетину цих графіків, змінюючи положення графіка $y = a$ залежно від значення a . Для кращого розуміння цього підходу можна скористатися Geogebra-аплетом:



<https://www.geogebra.org/m/getfjbhh>

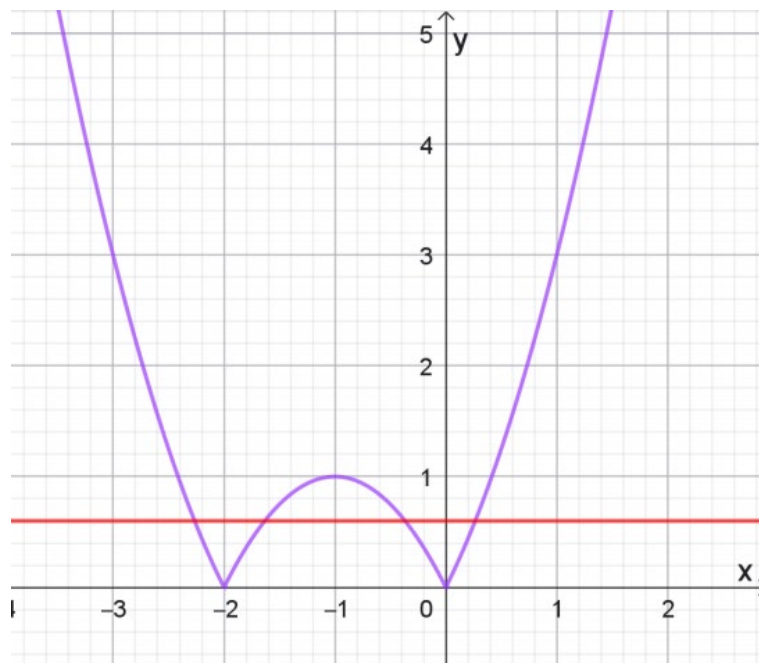
2) Якщо графік функції $y = f(x)$ побудувати не можливо, то потрібно спробувати розв'язати рівняння $f(x) = a$ аналітичним методом (розв'язати лінійне, квадратне, дробово-раціональне чи тригонометричне рівняння з параметром) і проаналізувати кількість його коренів залежно від значень параметра a .

Приклад 1. Скільки коренів має рівняння $|(x+1)^2 - 1| = a$ залежно від значення параметра a ?

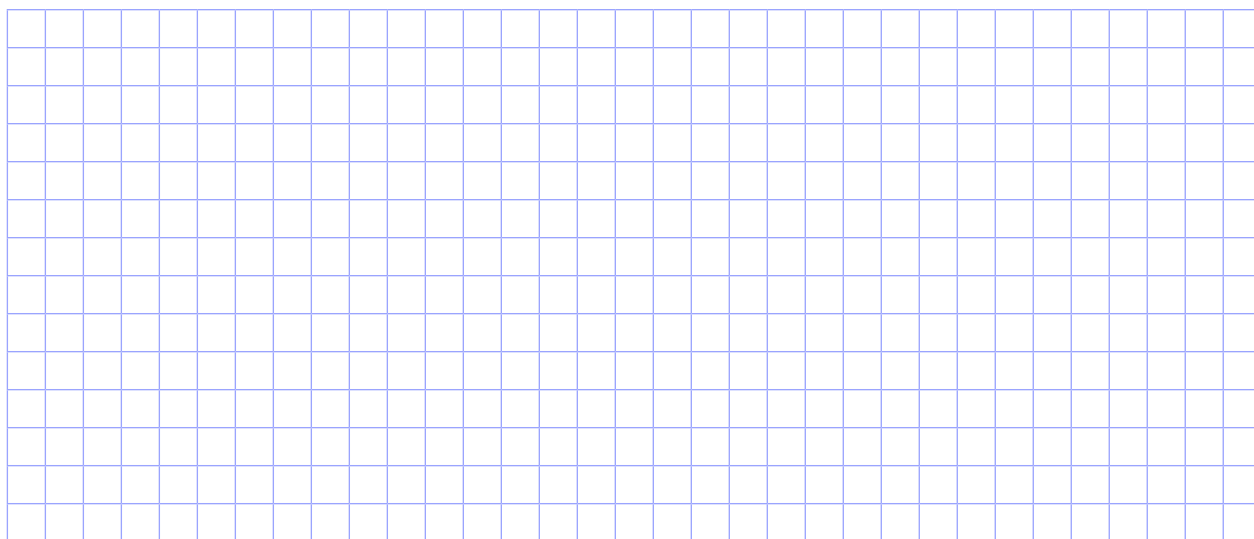
Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки неперервних функцій $y = |(x+1)^2 - 1|$ та $y = a$ (див. рисунок).

За графіком, встановлюємо, що при $a < 0$ рівняння коренів не матиме, при $a = 0$ або $a > 1$ рівняння матиме два корені, при $a = 1$ коренів буде три, при $0 < a < 1$ рівняння матиме чотири корені.

Відповідь. якщо $a < 0$, то рівняння коренів не має; якщо $a = 0$ або $a > 1$, то рівняння має два корені; якщо $a = 1$, то рівняння має три корені; якщо $0 < a < 1$, то рівняння має чотири корені.



Приклад 2. Скільки коренів має рівняння $|\sqrt{x} - 2| = a$ залежно від значення параметра a ?



Приклад 3. Скільки коренів має рівняння $x^2 + 3|x - 1| - 1 = a$ залежно від значення параметра a ?

Розв'язання. Побудуємо графік неперервної функції $y = x^2 + 3|x - 1| - 1$, попередньо розкривши модуль.

$$y = \begin{cases} x^2 + 3x - 4, & x \geq 1, \\ x^2 - 3x + 2, & x < 1. \end{cases}$$

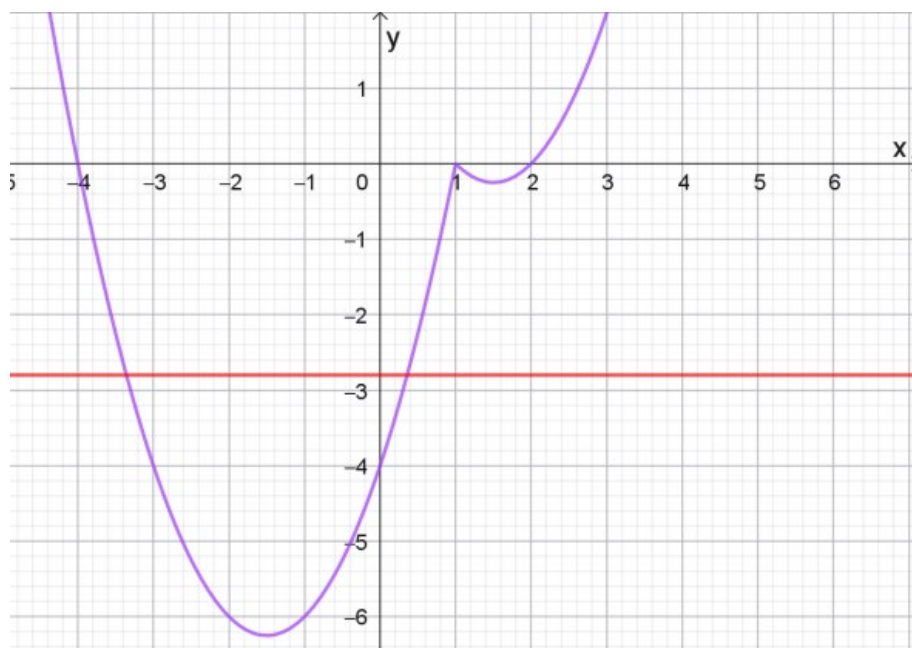
У цій самій системі координат будуємо графік горизонтальної прямої $y = a$ (див. рисунок).

Знайдемо координати вершини параболи $y = x^2 + 3x - 4$.

$$x_0 = -\frac{3}{2} = -1,5, \quad y_0 = 2,25 - 4,5 - 4 = -6,25.$$

Знайдемо координати вершини параболи $y = x^2 - 3x + 2$.

$$x_0 = -\frac{-3}{2} = 1,5, \quad y_0 = 2,25 - 4,5 + 2 = -0,25.$$



За графіком, встановлюємо, що при $a < -6,25$ рівняння коренів не має, при $a = -6,25$ рівняння має один корінь, при $-6,25 < a < -0,25$ або при $a > 0$ – рівняння має два корені, при $a = -0,25$ – три корені, а при $-0,25 < a < 0$ – чотири корені.

Відповідь. Якщо $a < -6,25$, то рівняння коренів не має; якщо $a = -6,25$, то рівняння має один корінь; якщо $-6,25 < a < -0,25$ або $a > 0$, рівняння має два корені; якщо $a = -0,25$, то рівняння має три корені; якщо $-0,25 < a < 0$, то – чотири корені.

IV. Доведення обмеженості та необмеженості функцій

Нагадаємо, що, функцію $f(x)$ називають обмеженою на множині M , якщо існує таке число $C > 0$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C$.

Відповідно функція $f(x)$ буде необмеженою на множині M , якщо для будь-якого $C > 0$ існує (знайдеться) таке число $x_0 \in M$, що виконується нерівність $|f(x_0)| > C$.

За першою теоремою Вейерштрасса, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона є обмеженою на цьому проміжку.

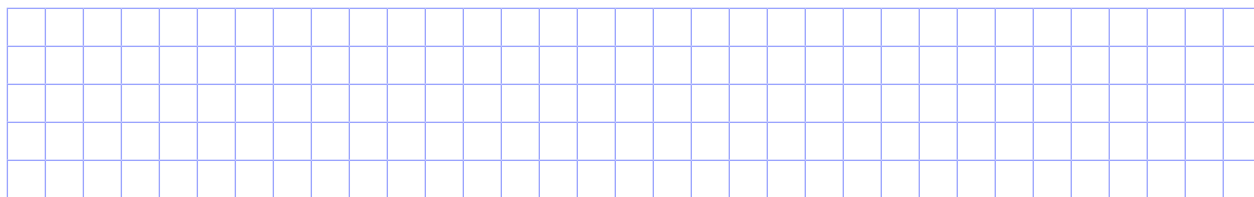
Часто в процесі розв'язування рівнянь чи нерівностей, зокрема тригонометричних, властивість обмеженості функції зверху або знизу відіграє важливу роль у пошуку правильного розв'язання.

Приклад 4. Доведіть, що функція $f(x) = 5 - 3\sin(2x + 1)$ є обмеженою на множині дійсних чисел.

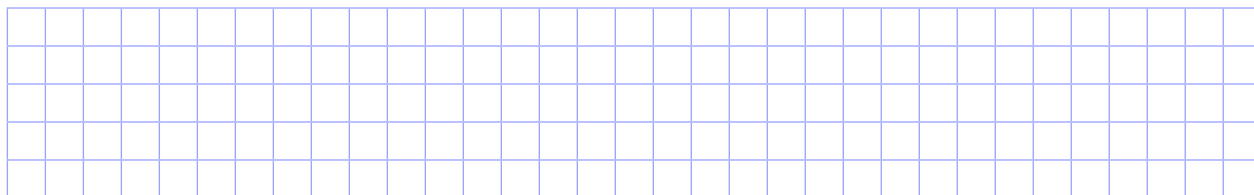
Доведення. Оскільки $-1 \leq \sin x \leq 1$, то $-3 \leq -3\sin(2x + 1) \leq 3$.

Звідки $2 \leq 5 - 3\sin(2x + 1) \leq 8$, тобто $|f(x)| \leq 8$, а це означає, що функція $f(x)$ обмежена. Що й треба було довести.

Приклад 5. Доведіть, що функція $f(x)$ є обмеженою на множині $M \subset D(f)$, то функція $y = kf(x)$, де k – довільне дійсне число, теж буде обмеженою на множині M .



Приклад 6. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ є обмеженою на множині дійсних чисел.



Приклад 7. Розв'яжіть рівняння $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ обмежена, при чому $-1 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 1$.

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geq 1.$$

Рівність можлива лише за умови:

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} = 1, & \frac{\pi x}{2} = \pi \cdot \frac{4k+1}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ x^2 - 2x + 2 = 1, & (x-1)^2 = 0, \end{cases}$$

$$x = 1.$$

Відповідь. 1.

V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час лабораторного дослідження вимірюють температуру тіла (y °C). Температура змінюється залежно від часу t (у хвиликах) за законом $T(t) = \frac{20t}{t^2 + 1}$, $t \geq 0$. Нехай a — заданий рівень температури. Доведіть, що функція $T(t)$ є обмеженою на проміжку $[0; +\infty)$, і знайдіть її найбільше значення. Укажіть скільки разів температура досягає значення a , залежно від заданого параметра. Поясніть фізичний зміст отриманих результатів.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Установіть кількість коренів рівняння $|x^2 - 1| = a$ залежно від значень параметра a .

2. Установіть кількість коренів рівняння $\left| (x+2)^2 - 3 \right| = a$ залежно від значень параметра a .
3. Доведіть, що функція $f(x) = 3 - 2\sin x$ обмежена на множині дійсних чисел та знайдіть множину її значень.
4. Доведіть, що функція $f(x) = |x+1|$ є необмеженою на множині дійсних чисел, але обмеженою на відрізку $[-5; 5]$.
5. Установіть кількість коренів рівняння $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = a$ залежно від значень параметра a .
6. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$ є обмеженою на множині $[-3; -2]$.

Рівень В

1. Установіть кількість коренів рівняння $|x^2 - 4|x| - 3| = a$ залежно від значень параметра a .
2. Установіть кількість коренів рівняння $x^2 - 4|x-1| - 1 = a$ залежно від значень параметра a .
3. Установіть кількість коренів рівняння $\left| (|x|-2)^2 - 3 \right| = a$ залежно від значень параметра a .
4. Доведіть, що функція $f(x) = \operatorname{tg} x$ є необмеженою на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
5. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$ є обмеженою на множині дійсних чисел.
6. Розв'яжіть рівняння $\sin 3x + \sin 11x = 2$.
7. Побудуйте графік рівняння $\cos x + \cos y = -2$.
8. Установіть кількість коренів рівняння $\frac{1}{|x|-1} = a$ залежно від значень параметра a .
9. Установіть кількість коренів рівняння $\frac{1}{2}\cos\left(2|x| + \frac{\pi}{3}\right) = a$ залежно від значень параметра a .
10. Доведіть, якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є обмеженими на множині $M \subset D(f) \cap D(g)$, то функція $y = f(x) \cdot g(x)$, також буде обмеженою на множині M .
11. Доведіть, що функція $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ є обмеженою на множині $D(f)$. Знайдіть множину значень цієї функції та побудуйте її графік.
12. Знайдіть кількість коренів рівняння $\frac{x^2}{4x^4 + 1} = a$ залежно від значень параметра a .

Рівень С

1. Установіть кількість коренів рівняння $\left| \left| \left| x \right| - 1 \right| - 1 \right| = a$ залежно від значень параметра a .
2. Установіть кількість коренів рівняння $\left| \frac{|x| + 2}{|x| - 1} \right| = a$ залежно від значень параметра a .
3. Розв'яжіть рівняння $\left(5 + \frac{3}{\sin^2 x} \right) (2 - \sin^6 x) = 7 + \cos 2x$.
4. Розв'яжіть рівняння $\sin x + 2 \sin 2x = 4 + \sin 17x$.
5. Доведіть, що функція $f(x) = x \cos x$ необмежена на множині дійсних чисел.
6. Розв'яжіть рівняння $x^3 - x - \sin \pi x = 0$.
7. Творче завдання. Запрограмуйте алгоритм знаходження кількості коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від параметра a , де $f(x)$ — неперервна на $D(f)$ функція.

Рефлексія

- | | | | | |
|----|---|-----|------------------------|----|
| 1. | Я вмію досліджувати кількість коренів рівняння $f(x) = a$, залежно від значень параметра a . | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю методи доведення обмеженості і необмеженості функцій. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію застосовувати властивості обмежених функцій для розв'язування рівнянь і нерівностей. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Використання графічного методу для аналізу кількості розв'язків рівнянь з параметром.
2. Порівняння аналітичного та графічного способів дослідження кількості розв'язків рівняння $f(x) = a$ залежно від значень параметра a .
3. Доведення властивостей обмеженості для складених функцій.
4. Обмеженість елементарних функцій та їх композицій.
5. Прикладні задачі, у яких використовується поняття обмеженості та необмеженості функцій.







