

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 15. Урок–практикум. Дослідження властивостей неперервних функцій

Тип уроку: урок застосування знань.

План уроку

1. Робота над індивідуальними (груповими) проєктами.
2. Дослідження кількості коренів рівняння $f(x) = a$, де a — параметр, що набуває певних значень.
3. Доведення обмеженості та необмеженості функцій.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

впорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

використовує приладдя та інформаційно-комунікаційні технології для представлення результату у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

6) Заплануйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чи можна, не розв'язуючи рівняння, визначити кількість його коренів? Які властивості функції для цього потрібні?

2) Яке практичне значення має дослідження кількості розв'язків залежно від параметра (наприклад, у фізичних або економічних моделях)?

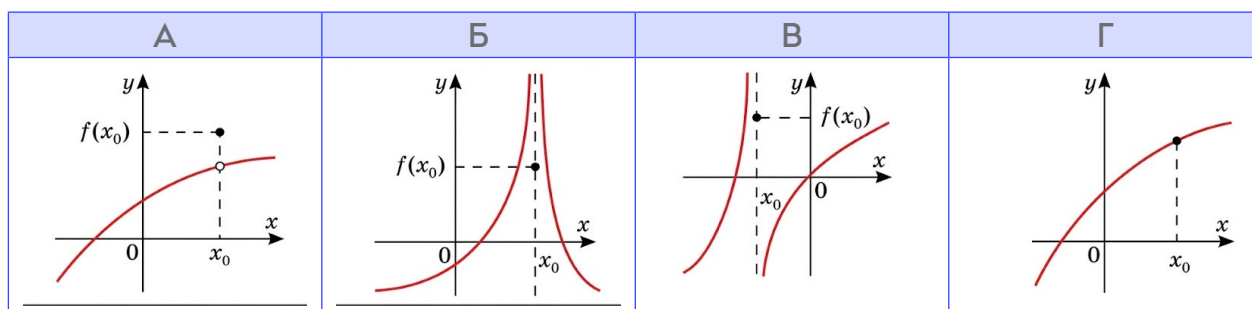
3) Чи пов'язана неперервність функції на відрізку з її обмеженістю?

4) Який геометричний зміст має обмеженість функції?

5) У яких прикладних задачах важливо знати, що величина не перевищує певного значення?

II. Усно. Повторення (3–4 хв)

1. Серед наведених укажіть варіанти відповідей де функція $f(x)$ у точці x_0 має розрив другого роду.



Відповідь. Б і В.

2. Графік функції $y = \sin x$ утричі розтягнули вздовж осі ординат. Укажіть функцію, графік якої отримали.

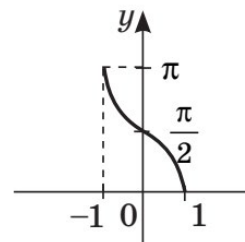
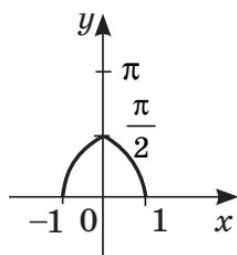
Відповідь. $y = 3 \sin x$.

3. Графік функції $y = \cos x$ удвічі стиснули вздовж осі абсцис. Укажіть функцію, графік якої отримали.

Відповідь. $y = \cos 2x$.

4. На рисунку зображено ескіз графіка функції $y = \arccos x$. Зобразіть ескіз графіка функції $y = \arccos|x|$.

Відповідь.



5. Знайдіть значення аргументу x , при якому значення функції $y = \frac{5+9x}{x}$ дорівнює 11.

Відповідь. 2,5.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час лабораторного дослідження вимірюють температуру тіла (y °C). Температура змінюється залежно від часу t (у хвилини) за законом $T(t) = \frac{20t}{t^2 + 1}$, $t \geq 0$. Нехай a — заданий рівень температури. Доведіть, що функція $T(t)$ є обмеженою на проміжку $[0; +\infty)$, і знайдіть її найбільше значення. Укажіть скільки разів температура досягає значення a , залежно від заданого параметра. Поясніть фізичний зміст отриманих результатів.

III. Дослідження кількості коренів рівняння $f(x) = a$, де a — параметр, що набуває певних значень (5 хв)

У багатьох прикладних задачах результат залежить від певного параметра. Змінюючи його значення, ми можемо отримувати різну кількість розв'язків однієї й тієї ж моделі. Саме тому дослідження кількості коренів рівняння $f(x) = a$ є важливим інструментом аналізу математичних моделей.

При дослідженні кількості коренів рівняння $f(x) = a$ існує два основних підходи.

1) Побудувати графік функції $y = f(x)$ (якщо це можливо) і графік функції $y = a$ (що є горизонтальною прямою). Якщо функція $f(x)$ неперервна, то за графіком установити кількість точок перетину цих графіків, змінюючи положення графіка $y = a$ залежно від значення a . Для кращого розуміння цього підходу можна скористатися Geogebra-аплетом:

<https://www.geogebra.org/m/getfjbhh>

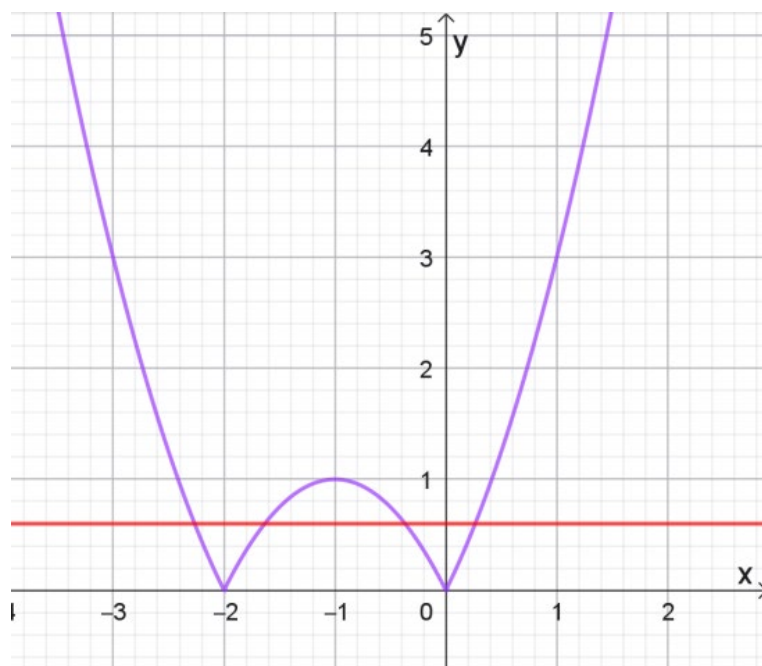


2) Якщо графік функції $y = f(x)$ побудувати не можливо, то потрібно спробувати розв'язати рівняння $f(x) = a$ аналітичним методом (розв'язати лінійне, квадратне, дробово-раціональне чи тригонометричне рівняння з параметром) і проаналізувати кількість його коренів залежно від значень параметра a .

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

6. Скільки коренів має рівняння $|(x+1)^2 - 1| = a$ залежно від значення параметра a ?

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки неперервних функцій $y = |(x+1)^2 - 1|$ та $y = a$ (див. рисунок).



За графіком, встановлюємо, що при $a < 0$ рівняння коренів не матиме, при $a = 0$ або $a > 1$ рівняння матиме два корені, при $a = 1$ коренів буде три, при $0 < a < 1$ рівняння матиме чотири корені.

Відповідь. якщо $a < 0$, то рівняння коренів не має; якщо $a = 0$ або $a > 1$, то рівняння має два корені; якщо $a = 1$, то рівняння має три корені; якщо $0 < a < 1$, то рівняння має чотири корені.

7. Скільки коренів має рівняння $|\sqrt{x} - 2| = a$ залежно від значення параметра a ?

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки неперервних функцій $y = |\sqrt{x} - 2|$ та $y = a$ (див. рисунок).



За графіком, встановлюємо, що при $a < 0$ рівняння коренів не матиме, при $a = 0$ або $a > 2$ рівняння матиме один корінь, при $0 < a < 2$ рівняння матиме два корені.

Відповідь. якщо $a < 0$, то рівняння коренів не має; якщо $a = 0$ або $a > 2$, то рівняння має один корінь; якщо $0 < a < 2$, то рівняння має два корені.

8. Скільки коренів має рівняння $x^2 + 3|x - 1| - 1 = a$ залежно від значення параметра a ?

Розв'язання. Побудуємо графік неперервної функції $y = x^2 + 3|x - 1| - 1$, попередньо розкривши модуль.

$$y = \begin{cases} x^2 + 3x - 4, & x \geq 1, \\ x^2 - 3x + 2, & x < 1. \end{cases}$$

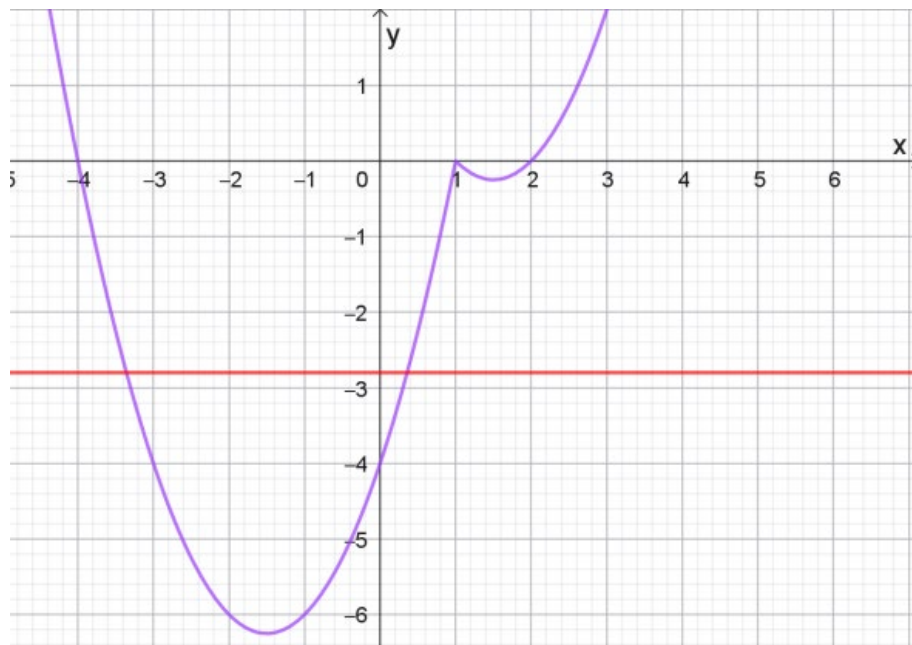
У цій самій системі координат будемо графік горизонтальної прямої $y = a$ (див. рисунок).

Знайдемо координати вершини параболи $y = x^2 + 3x - 4$.

$$x_0 = -\frac{3}{2} = -1,5, \quad y_0 = 2,25 - 4,5 - 4 = -6,25.$$

Знайдемо координати вершини параболи $y = x^2 - 3x + 2$.

$$x_0 = -\frac{-3}{2} = 1,5, \quad y_0 = 2,25 - 4,5 + 2 = -0,25.$$



За графіком, встановлюємо, що при $a < -6,25$ рівняння коренів не має, при $a = -6,25$ рівняння має один корінь, при $-6,25 < a < -0,25$ або при $a > 0$ – рівняння має два корені, при $a = -0,25$ – три корені, а при $-0,25 < a < 0$ – чотири корені.

Відповідь. Якщо $a < -6,25$, то рівняння коренів не має; якщо $a = -6,25$, то рівняння має один корінь; якщо $-6,25 < a < -0,25$ або $a > 0$, рівняння має два корені; якщо $a = -0,25$, то рівняння має три корені; якщо $-0,25 < a < 0$, то – чотири корені.

9. Скільки коренів має рівняння $\frac{1}{x^2 + 1} = a$ залежно від значення параметра a ?

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне такому: $ax^2 = 1 - a$.

Якщо $a = 0$, то $0 = 1$, тобто рівняння коренів не має.

$$\text{Якщо } a \neq 0, \text{ то } x^2 = \frac{1 - a}{a}.$$

Якщо $a = 1$, то $x^2 = 0$, тобто рівняння має один корінь.

Якщо $\frac{1-a}{a} > 0$, тобто при $0 < a < 1$, то рівняння має два корені.

Якщо $a < 0$ або $a > 1$, то рівняння коренів не має.

Відповідь. Якщо $a \leq 0$ або $a > 1$, то рівняння коренів не має; якщо $a = 1$, то рівняння має один корінь.

IV. Доведення обмеженості та необмеженості функцій

Нагадаємо, що, функцію $f(x)$ називають обмеженою на множині M , якщо існує таке число $C > 0$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C$.

Відповідно функція $f(x)$ буде необмеженою на множині M , якщо для будь-якого $C > 0$ існує (знайдеться) таке число $x_0 \in M$, що виконується нерівність $|f(x_0)| > C$.

За першою теоремою Вейерштрасса, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона є обмеженою на цьому проміжку.

Часто в процесі розв'язування рівнянь чи нерівностей, зокрема тригонометричних, властивість обмеженості функції зверху або знизу відіграє важливу роль у пошуку правильного розв'язання.

Ілюстративні приклади (7–10 хв)

- 10.** Доведіть, що функція $f(x) = 5 - 3\sin(2x + 1)$ є обмеженою на множині дійсних чисел.

Доведення. Оскільки $-1 \leq \sin x \leq 1$, то $-3 \leq -3\sin(2x + 1) \leq 3$.

Звідки $2 \leq 5 - 3\sin(2x + 1) \leq 8$, тобто $|f(x)| \leq 8$, а це означає, що функція $f(x)$ обмежена. Що й треба було довести.

- 11.** Доведіть, що функція $f(x)$ є обмеженою на множині $M \subset D(f)$, то функція $y = kf(x)$, де k – довільне дійсне число, теж буде обмеженою на множині M .

Доведення. Якщо функція $f(x)$ є обмеженою на множині $M \subset D(f)$, то існує таке додатне число C , що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C$, але тоді знайдеться таке додатне число $C_1 = |k|C$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $|kf(x)| \leq C_1$, а це означає, що функція $y = kf(x)$, де k — довільне дійсне число, теж буде обмеженою на множині M . Що й треба було довести.

- 12.** Доведіть, що функції $f(x)$ і $g(x)$ є обмеженими на множині $M \subset D(f) \cap D(g)$, то функція $y = f(x) + g(x)$, теж буде обмеженою на множині M .

Доведення. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є обмежені на множині $M \subset D(f) \cap D(g)$, то існують такі додатні числа C_1 і C_2 , що для всіх $x \in M$ виконуються нерівності $|f(x)| \leq C_1$ і $|g(x)| \leq C_2$. Оскільки для будь-яких дійсних чисел a і b виконується нерівність $|a + b| \leq |a| + |b|$, то існує таке додатне число $C = C_1 + C_2$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $|f(x) + g(x)| \leq C$, а це означає, що функція $y = f(x) + g(x)$ теж буде обмеженою на множині M . Що й треба було довести.

- 13.** Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ є обмеженою на множині дійсних чисел.

Доведення. $\frac{1}{x^2 + 1} > 0$ — оскільки чисельник і знаменник цього дробу можуть набувати лише додатних значень. Із того що $x^2 + 1 \geq 1$ слідує, що $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$.

Таким чином $|f(x)| \leq 1$, тому функція $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ є обмеженою на множині дійсних чисел.

- 14.** Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ є необмеженою на множині дійсних чисел, але обмеженою на відріжку $[2; 5]$.

Доведення. Доведемо, що для будь-якого додатного числа C знайдеться таке дійсне число x_0 , що виконується нерівність $|f(x_0)| > C$.

Нехай $x \neq -1$, тоді з нерівності $\left| \frac{1}{x + 1} \right| > C$ слідує, що $|x + 1| < \frac{1}{C}$, $-\frac{1}{C} < x + 1 < \frac{1}{C}$, $-\frac{1}{C} - 1 < x < \frac{1}{C} - 1$. За x_0 обираємо будь-яке число із проміжку $\left(-\frac{1}{C} - 1; \frac{1}{C} - 1\right)$.

Тобто, для будь-якого додатного числа C знайдеться таке дійсне число x_0 , що виконується нерівність $|f(x_0)| > C$, що й треба було довести.

Функція $f(x)$ є неперервною на відріжку $[2; 5]$, тому за першою теоремою Вейерштрасса вона буде обмеженою на цьому проміжку.

- 15.** Розв'яжіть рівняння $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$.

Розв'язання. Функція $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ обмежена, при чому $-1 \leq \sin \frac{\pi x}{2} \leq 1$.

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geq 1.$$

Рівність можлива лише за умови:

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} = 1, & \begin{cases} \frac{\pi x}{2} = \pi \cdot \frac{4k + 1}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ x^2 - 2x + 2 = 1, & (x - 1)^2 = 0, \end{cases} \end{cases}$$

$$x = 1.$$

Відповідь. 1.

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (7–8 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Під час лабораторного досліду вимірюють температуру тіла (y °C). Температура змінюється залежно від часу t (у хвиликах) за законом $T(t) = \frac{20t}{t^2 + 1}$, $t \geq 0$. Нехай a — заданий рівень температури. Доведіть, що функція $T(t)$ є обмеженою на проміжку $[0; +\infty)$, і знайдіть її найбільше значення. Укажіть скільки разів температура досягає значення a , залежно від заданого параметра. Поясніть фізичний зміст отриманих результатів.

Розв'язання. Оскільки $t \geq 0$, то $\frac{20t}{t^2 + 1} \geq 0$. $T(0) = 0$, тому $\min_{[0; +\infty]} T(t) = 0$.

За нерівністю Коші $t^2 + 1 \geq 2t$, звідки враховуючи, що $t \geq 0$ маємо:

$$\frac{1}{t^2 + 1} \leq \frac{1}{2t}, \quad \frac{20t}{t^2 + 1} \leq \frac{20t}{2t} = 10.$$

$$T(1) = 10, \text{ тому } \max_{[0; +\infty]} T(t) = 10.$$

Отже, для $t \geq 0$ $|T(t)| \leq 10$, тому функція $T(t) = \frac{20t}{t^2 + 1}$ є обмеженою на проміжку $[0; +\infty)$.

Розглянемо рівняння $\frac{20t}{t^2 + 1} = a$, де $a \geq 0$ внаслідок обмеженості функції $T(t) = \frac{20t}{t^2 + 1}$.

Це рівняння рівносильне рівнянню $at^2 - 20t + a = 0$.

Дослідимо кількість розв'язків рівняння $at^2 - 20t + a = 0$ залежно від значень параметра a .

Якщо $a = 0$, то $t = 0$, тобто температура 0°C досягається лише один раз.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $at^2 - 20t + a = 0$ квадратне відносно змінної t . Знайдемо його дискримінант: $D = 400 - 4a^2$.

Якщо $D = 0$, тобто при $a = 10$, то рівняння матиме єдиний розв'язок.

Якщо $D > 0$, тобто при $0 < a < 10$, то рівняння матиме два розв'язки.

Якщо $D < 0$, тобто при $a > 10$, то рівняння не має розв'язків.

Тіло спочатку нагрівається протягом першої хвилини від мінімальної температури 0°C до максимально температури 10°C, далі поступово охолоджується але температури 0°C другий раз не досягає. Температуру від 0°C до 10°C тіло набуває двічі: спочатку коли нагрівається і потім, коли охолоджується.

Відповідь. $\max_{[0; +\infty]} T(t) = 10$. Температуру 0°C та 10°C тіло набуває лише один раз, а температуру від 0°C до 10°C двічі. Більше 10°C тіло не нагрівається.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. Установіть кількість коренів рівняння $|x^2 - 1| = a$ залежно від значень параметра a .
2. Установіть кількість коренів рівняння $|(x + 2)^2 - 3| = a$ залежно від значень параметра a .

3. Доведіть, що функція $f(x) = 3 - 2\sin x$ обмежена на множині дійсних чисел та знайдіть множину її значень.
4. Доведіть, що функція $f(x) = |x + 1|$ є необмеженою на множині дійсних чисел, але обмеженою на відрізку $[-5; 5]$.
5. Установіть кількість коренів рівняння $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = a$ залежно від значень параметра a .
6. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{|x| - 1}$ є обмеженою на множині $[-3; -2]$.

Рівень В

1. Установіть кількість коренів рівняння $|x^2 - 4|x| - 3| = a$ залежно від значень параметра a .
2. Установіть кількість коренів рівняння $x^2 - 4|x - 1| - 1 = a$ залежно від значень параметра a .
3. Установіть кількість коренів рівняння $\left|(|x| - 2)^2 - 3\right| = a$ залежно від значень параметра a .
4. Доведіть, що функція $f(x) = \operatorname{tg} x$ є необмеженою на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
5. Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{|x| + 1}$ є обмеженою на множині дійсних чисел.
6. Розв'яжіть рівняння $\sin 3x + \sin 11x = 2$.
7. Побудуйте графік рівняння $\cos x + \cos y = -2$.
8. Установіть кількість коренів рівняння $\frac{1}{|x| - 1} = a$ залежно від значень параметра a .
9. Установіть кількість коренів рівняння $\frac{1}{2}\cos\left(2|x| + \frac{\pi}{3}\right) = a$ залежно від значень параметра a .
10. Доведіть, якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є обмеженими на множині $M \subset D(f) \cap D(g)$, то функція $y = f(x) \cdot g(x)$, також буде обмеженою на множині M .
11. Доведіть, що функція $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$ є обмеженою на множині $D(f)$. Знайдіть множину значень цієї функції та побудуйте її графік.
12. Знайдіть кількість коренів рівняння $\frac{x^2}{4x^4 + 1} = a$ залежно від значень параметра a .

Рівень С

1. Установіть кількість коренів рівняння $\left||x| - 1\right| - 1 = a$ залежно від значень параметра a .

2. Установіть кількість коренів рівняння $\left| \frac{|x|+2}{|x|-1} \right| = a$ залежно від значень параметра a .
3. Розв'яжіть рівняння $\left(5 + \frac{3}{\sin^2 x} \right) (2 - \sin^6 x) = 7 + \cos 2x$.
4. Розв'яжіть рівняння $\sin x + 2 \sin 2x = 4 + \sin 17x$.
5. Доведіть, що функція $f(x) = x \cos x$ необмежена на множині дійсних чисел.
6. Розв'яжіть рівняння $x^3 - x - \sin \pi x = 0$.
7. Творче завдання. Запрограмуйте алгоритм знаходження кількості коренів рівняння $f(x) = a$ залежно від параметра a , де $f(x)$ — неперервна на $D(f)$ функція.

VII. Рефлексія (1–2 хв)

- | | | | |
|----|---|------------------------|----|
| 1. | Я вмію досліджувати кількість коренів рівняння $f(x) = a$, залежно від значень параметра a . | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 2. | Я знаю методи доведення обмеженості і необмеженості функцій. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 3. | Я вмію застосовувати властивості обмежених функцій для розв'язування рівнянь і нерівностей. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |
| 4. | Я розумію, як використовувати вивчену тему для розв'язування задач практичного змісту. | | |
| | Так | Ще треба потренуватися | Ні |

Можливі теми проєктів

1. Використання графічного методу для аналізу кількості розв'язків рівнянь з параметром.
2. Порівняння аналітичного та графічного способів дослідження кількості розв'язків рівняння $f(x) = a$ залежно від значень параметра a .
3. Доведення властивостей обмеженості для складених функцій.
4. Обмеженість елементарних функцій та їх композицій.
5. Прикладні задачі, у яких використовується поняття обмеженості та необмеженості функцій.