

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 16. Перша чудова границя

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

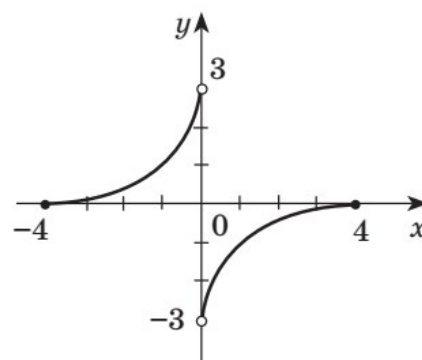
I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

- 1) навчитеся доводити лему про межі значень відношення $\sin x$ до x ;
- 2) вивчите першу чудову границю;
- 3) навчитеся застосовувати першу чудову границю при обчисленні границь функцій, які містять тригонометричні та обернені тригонометричні функції;
- 4) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Дано дві функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = \cos x$. Укажіть функцію $y = g(f(x))$.
2. Функцію $y = f(x)$ задано графіком (див. рисунок). Знайдіть її область визначення.
3. Укажіть нулі функції $y = \sin x$.
4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x}$.
5. Чи є функція $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ неперервною в точці $x = 0$?



III. Доведення допоміжної теореми (леми) про межі значень відношення $\sin x$ до x

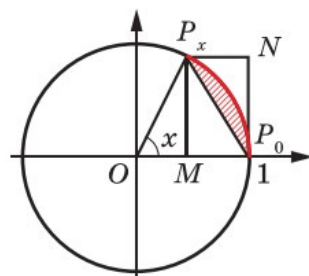
При доведенні допоміжної теореми (леми) про межі значень відношення $\sin x$ до x нам знадобиться твердження, яке ми довели на одному із попередніх уроків. Наведемо його.

Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|\sin x| \leq |x|$.

Лема. Якщо $|x| < 1$ і $x \neq 0$, то $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$.

Доведення. Нехай $x \in (0; 1)$. Точку P_x отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат на кут x радіан (див. рисунок). Оскільки $x \in (0; 1)$, тобто $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то точка P_x знаходиться в першій чверті.

Побудуємо прямокутник MP_xNP_0 , для якого відрізок P_xP_0 є діагоналлю.



Оскільки $P_xM = \sin x$ і $OM = \cos x$, то $S_{\Delta P_xNP_0} = \frac{1}{2} \sin x (1 - \cos x) = \sin x \sin^2 \frac{x}{2}$.

Оскільки $x \in (0; 1)$, то використавши те, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|\sin x| \leq |x|$, отримуємо: $\sin x \leq x$; $\sin^2 \frac{x}{2} \leq \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

Отже, $S_{\Delta P_xNP_0} = \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \leq x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{4}$.

Очевидно, що площа заштрихованого сегмента менша від площі трикутника P_xNP_0 і дорівнює $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x$.

Тепер можна записати: $0 < \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x < \frac{x^3}{4}$. Звідси з урахуванням того, що $x \in (0; 1)$, отримуємо: $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$.

Оскільки функції $y = 1 - \frac{\sin x}{x}$ і $y = \frac{x^2}{2}$ є парними, то остання подвійна нерівність виконується також для всіх x із проміжку $(-1; 0)$. Що й треба було довести.

IV. Перша чудова границя

Одним із основних способів розкриття невизначеності виду $\left[\frac{0}{0} \right]$ є так звана «перша чудова границя», яка записується у вигляді рівності $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Доведемо її.

Нехай x_n — довільна послідовність значень аргументу функції $f(x) = 1 - \frac{\sin x}{x}$ така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Тоді існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n| < 1$.

Згідно з лемою для будь-якого $n > n_0$ виконуються нерівності $0 < 1 - \frac{\sin x_n}{x_n} < \frac{x_n^2}{2}$.

Тоді за теоремою про двох конвоїрів отримуємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sin x_n}{x_n}\right) = 0$.

Оскільки послідовність x_n вибрано довільно, то доводимо висновку, що $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0$, тобто $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Рівність $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ називають **першою чудовою границею**.

Приклад 1. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$.

Відповідь. 1.

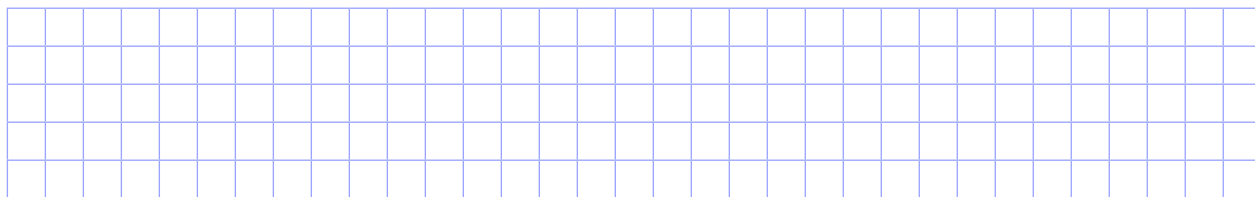
Приклад 2. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arctg} x = t$, тоді $x = \operatorname{tg} t$. Якщо $x \rightarrow 0$, то $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \rightarrow 0$, тому ми можемо вважати, що $t \rightarrow 0$.

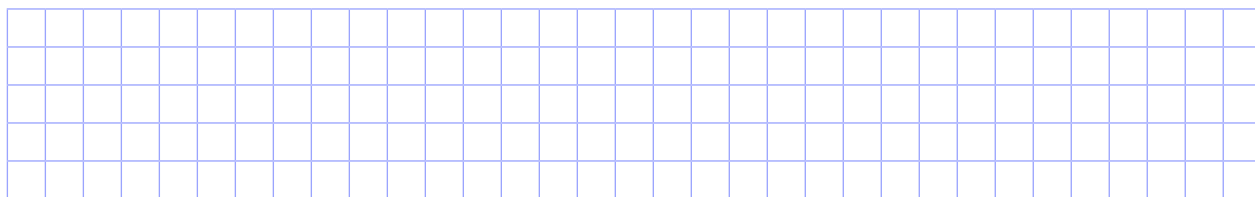
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} \cdot \cos t = 1$.

Відповідь. 1.

Приклад 3. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.



Приклад 4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x}$.



[illegible]

Першу чудову границю часто використовують для обчислень границь функцій, що містять тригонометричні та обернені тригонометричні вирази, коли при безпосередньому пошуку значення функції в точці отримуємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0} \right]$. Ці границі часто використовують на практиці в геометрії та тригонометрії для оцінки дуг кола та кутів у радіанах, у фізиці — при малих коливаннях маятника, в електротехніці — при обчисленнях фазових зсувів при малих кутах, тощо.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x \cdot (1 - \cos^2 3x)}{(x^2 + 5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (1 - \cos^2 3x)}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (1 - \cos^2 3x)}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 3x)}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x \cdot (x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x \cdot (x + 5)} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x} = \\ &= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 3x}{\sin x \cdot x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x \cdot \sin 3x}{\sin x \cdot 3x \cdot 3x \cdot \frac{1}{9}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{5}. \end{aligned}$$
[illegible][illegible]

Приклад 9. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3 + 3x^2 + 1)}{x^3 + 3x^2 + 1}$.

Розв'язання. Оскільки при $x \rightarrow 0$, то $x^3 + 3x^2 + 1 \rightarrow 1$, тому першу чудову границю тут застосовувати не можна, а обчислюємо її безпосередньо підставляючи $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3 + 3x^2 + 1)}{x^3 + 3x^2 + 1} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1.$$

Відповідь. $\sin 1$.

VI. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У простому механічному сейсмографі масивний вантаж підвішений на жорсткому важелі довжини l . Під час слабкого землетрусу важіль відхиляється від вертикального положення на малий кут α (у радіанах). Горизонтальне зміщення точки реєстрації на паперовій стрічці дорівнює $x(\alpha) = l \sin \alpha$. Сейсмограф відкалібрований так, що вважається, що для малих коливань $x \approx l\alpha$.

1. Обґрунтуйте правильність такої калібровки, знайшовши границю $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{x(\alpha)}{l\alpha}$.
2. Поясніть, чому саме для слабких землетрусів така модель є надійною.
3. Зробіть висновок, що відбудеться з точністю вимірювань при великих коливаннях.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}$.

2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{4x^2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin 0,5x}$.

3. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg} 5x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

4. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 0,5x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 9x}{\operatorname{ctg} 6x}$.

5. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x}$.

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$.

Рівень В

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{2x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{\sin^2 5x}.$

2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}.$

3. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{3x}.$

4. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}.$

5. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{ctg} 5x).$

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{10x^2};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}.$

7. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\sin 6x - \sin 4x}.$

8. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n x}{x^2};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$

9. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}.$

10. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}.$

11. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}.$

12. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x).$

Рівень С

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}.$

2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2};$

3. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x};$

2) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}.$

4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{x}.$

5. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 2x}{\cos x} \frac{2x}{x+1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 6x}{1 - \sin 2x}$.

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}$.

7. **Творче завдання.** Створіть лепбук із наслідками, які впливають із першої чудової границі.

VIII. Рефлексія (2 хв)

1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що

2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що

3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію

4) Найскладнішим для мене було

5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності

6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

1. Межі лінійного наближення: коли $\sin x \approx x$ перестає працювати.
2. Перша чудова границя як основа моделей малих коливань.
3. Геометричне та аналітичне обґрунтування першої чудової границі.
4. Перша чудова границя і перехід від криволінійного руху до прямолінійного.
5. Історія появи першої чудової границі та її значення.







