

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 16. Перша чудова границя

Тип уроку: урок засвоєння нових знань.

План уроку

1. Доведення допоміжної теореми (леми) про межі значень відношення $\sin x$ до x .
2. Перша чудова границя.
3. Застосування першої чудової границі.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

самостійно або у взаємодії з іншими виокремлює спільні ознаки специфічних проблемних ситуацій, для розв'язання яких можна застосувати подібні методи [12 МАО 1.1.2–1 П];

виявляє ініціативу, пропонує та обґрунтовує ідеї щодо способу розв'язання специфічних проблемних ситуацій [12 МАО 2.2.1–1 П];

оцінює обґрунтованість математичного розв'язання в контексті реальної комплексної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.
- 6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проектної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому при дуже малих кутах інженери замінюють $\sin x$ на x , і що гарантує, що така заміна не спотворює результат?

2) Чому в приладах для вимірювання слабких коливань (сейсмограф, інклінометр) шкала часто є лінійною, хоча рух описується тригонометричними функціями?

3) Як перша чудова границя дозволяє замінити складний криволінійний рух простішою лінійною моделлю?

4) Чи можна вважати будь-яку криву "прямою" на дуже малому відрізку? Яку роль у цьому відіграє перша чудова границя?

5) Чому для дуже малих відхилень маятника різниця між дугою та відрізком майже непомітна, і як це пов'язано з границею $\frac{\sin x}{x}$?

II. Повторення (3–4 хв)

1. Дано дві функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = \cos x$. Укажіть функцію $y = g(f(x))$.

Відповідь. $y = \cos(\sqrt{x})$.

2. Функцію $y = f(x)$ задано графіком (див. рисунок). Знайдіть її область визначення.

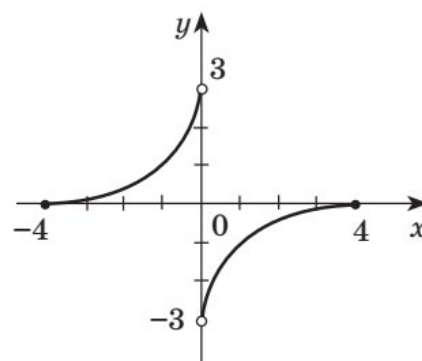
Відповідь. $[-4; 0) \cup (0; 4]$.

3. Укажіть нулі функції $y = \sin x$.

Відповідь. πn , $n \in \mathbb{Z}$.

4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x}$.

Відповідь. 0.



5. Чи є функція $f(x) = \begin{cases} 2-x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ неперервною в точці $x = 0$?

Відповідь. Ні.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У простому механічному сейсмографі масивний вантаж підвішений на жорсткому важелі довжини l . Під час слабкого землетрусу важіль відхиляється від вертикального положення на малий кут α (у радіанах). Горизонтальне зміщення точки реєстрації на паперовій стрічці дорівнює $x(\alpha) = l \sin \alpha$. Сейсмограф відкалібрований так, що вважається, що для малих коливань $x \approx l\alpha$.

1. Обґрунтуйте правильність такої калібровки, знайшовши границю $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{x(\alpha)}{l\alpha}$.
2. Поясніть, чому саме для слабких землетрусів така модель є надійною.
3. Зробіть висновок, що відбудеться з точністю вимірювань при великих коливаннях.

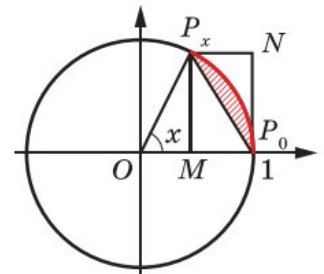
III. Доведення допоміжної теореми (леми) про межі значень відношення $\sin x$ до x (5 хв)

При доведенні допоміжної теореми (леми) про межі значень відношення $\sin x$ до x нам знадобиться твердження, яке ми довели на одному із попередніх уроків. Наведемо його. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|\sin x| \leq |x|$.

Лема. Якщо $|x| < 1$ і $x \neq 0$, то $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$.

Доведення. Нехай $x \in (0; 1)$. Точку P_x отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ навколо початку координат на кут x радіан (див. рисунок). Оскільки $x \in (0; 1)$, тобто $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то точка P_x знаходиться в першій чверті.

Побудуємо прямокутник MP_xNP_0 , для якого відрізок P_xP_0 є діагоналлю.



Оскільки $P_xM = \sin x$ і $OM = \cos x$, то $S_{\Delta P_xNP_0} = \frac{1}{2} \sin x (1 - \cos x) = \sin x \sin^2 \frac{x}{2}$.

Оскільки $x \in (0; 1)$, то використавши те, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|\sin x| \leq |x|$, отримуємо: $\sin x \leq x$; $\sin^2 \frac{x}{2} \leq \left(\frac{x}{2}\right)^2$.

Отже, $S_{\Delta P_xNP_0} = \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \leq x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{4}$.

Очевидно, що площа заштрихованого сегмента менша від площі трикутника P_xNP_0 і дорівнює $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x$.

Тепер можна записати: $0 < \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x < \frac{x^3}{4}$. Звідси з урахуванням того, що $x \in (0;1)$,

отримуємо: $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}$.

Оскільки функції $y = 1 - \frac{\sin x}{x}$ і $y = \frac{x^2}{2}$ є парними, то остання подвійна нерівність виконується також для всіх x із проміжку $(-1; 0)$. Що й треба було довести.

IV. Перша чудова границя (5 хв)

Одним із основних способів розкриття невизначеності виду $\left[\frac{0}{0} \right]$ є так звана «перша чудова границя», яка записується у вигляді рівності $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Доведемо її.

Нехай x_n — довільна послідовність значень аргументу функції $f(x) = 1 - \frac{\sin x}{x}$ така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Тоді існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n| < 1$.

Згідно з лемою для будь-якого $n > n_0$ виконуються нерівності $0 < 1 - \frac{\sin x_n}{x_n} < \frac{x_n^2}{2}$.

Тоді за теоремою про двох конвоїрів отримуємо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sin x_n}{x_n} \right) = 0$.

Оскільки послідовність x_n вибрано довільно, то доходимо висновку, що $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\sin x}{x} \right) = 0$, тобто $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Рівність $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ називають **першою чудовою границею**.

Ілюстративні приклади (5 хв)

6. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$.

Відповідь. 1.

7. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arctg} x = t$, тоді $x = \operatorname{tg} t$. Якщо $x \rightarrow 0$, то $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \rightarrow 0$, тому

ми можемо вважати, що $t \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\operatorname{tg} t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} \cdot \cos t = 1.$$

Відповідь. 1.

8. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$.

Відповідь. $\frac{1}{2}$.

9. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{3} \cdot 1 = \frac{7}{3}$.

Відповідь. $\frac{7}{3}$.

10. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot 4 \cdot 5 = 20$.

Відповідь. 20.

V. Застосування першої чудової границі

Першу чудову границю часто використовують для обчислень границь функцій, що містять тригонометричні та обернені тригонометричні вирази, коли при безпосередньому пошуку значення функції в точці отримуємо невизначеність виду $\left[\frac{0}{0} \right]$. Ці границі часто використовують на практиці в геометрії та тригонометрії для оцінки дуг кола та кутів у радіанах, у фізиці — при малих коливаннях маятника, в електротехніці — при обчисленнях фазових зсувів при малих кутах, тощо.

Ілюстративні приклади (5 хв)

11. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x \cdot (1 - \cos^2 3x)}{(x^2 + 5x)}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x \cdot (1 - \cos^2 3x)}{(x^2 + 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (1 - \cos^2 3x)}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot (1 - \cos^2 3x)}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2 3x)}{\sin x \cdot (x^2 + 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x \cdot (x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x \cdot (x + 5)} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin x \cdot x} =$

$$= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 3x}{\sin x \cdot x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x \cdot \sin 3x}{\sin x \cdot 3x \cdot 3x \cdot \frac{1}{9}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{5}.$$

Відповідь. $\frac{9}{5}$.

- 12.** Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \cdot \sin x}{x^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 4.$

Відповідь. 4.

- 13.** Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}}{1 + 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{1 - 2}{1 + 3} = -\frac{1}{4}.$

Відповідь. $-\frac{1}{4}$.

- 14.** Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin^2 \left(\frac{3x}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2(x)}{x^2}}{\frac{\sin^2 \left(\frac{3x}{2} \right)}{\left(\frac{3x}{2} \right)^2}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2} \right)^2} = \frac{4}{9}.$

Відповідь. $\frac{4}{9}$.

- 15.** Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3 + 3x^2 + 1)}{x^3 + 3x^2 + 1}$.

Розв'язання. Оскільки при $x \rightarrow 0$, то $x^3 + 3x^2 + 1 \rightarrow 1$, тому першу чудову границю тут застосовувати не можна, а обчислюємо її безпосередньо підставляючи $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^3 + 3x^2 + 1)}{x^3 + 3x^2 + 1} = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1.$$

Відповідь. $\sin 1$.

VI. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У простому механічному сейсмографі масивний вантаж підвішений на жорсткому важелі довжини l . Під час слабкого землетрусу важіль відхиляється від вертикального положення на малий кут α (у радіанах). Горизонтальне зміщення точки реєстрації на паперовій стрічці дорівнює $x(\alpha) = l \sin \alpha$. Сейсмограф відкалібрований так, що вважається, що для малих коливань $x \approx l\alpha$.

1. Обґрунтуйте правильність такої калібровки, знайшовши границю $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{x(\alpha)}{l\alpha}$.
2. Поясніть, чому саме для слабких землетрусів така модель є надійною.
3. Зробіть висновок, що відбудеться з точністю вимірювань при великих коливаннях.

Розв'язання. 1) $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{x(\alpha)}{l\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{l \sin \alpha}{l\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, за першою чудовою границею.

Тому для малих кутів α доцільно використовувати наближення $x \approx l\alpha$.

2) Цей результат означає, що відносна похибка заміни $\sin \alpha$ на α прямує до нуля. Саме тому слабкі сейсмічні коливання можна лінійно реєструвати і амплітуду коливань ґрунту можна оцінювати без складних обчислень.

3) При великих амплітудах коливання умови першої чудової границі не виконуються, тому не можна лінійно реєструвати такі коливання унаслідок великої похибки.

VII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (7–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x}$.

2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{4x^2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin 0,5x}$.

3. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg} 5x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

4. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 0,5x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} 9x}{\operatorname{ctg} 6x}$.

5. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x}$.

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}$.

Рівень В

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{2x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{\sin^2 5x}$.

2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

3. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{3x}$.

4. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

5. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{ctg} 5x)$.

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 7x}{10x^2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}$.

7. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\sin 6x - \sin 4x}$.

8. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^n x}{x^2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

9. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$.

10. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$.

11. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$.

12. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} x(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x)$.

Рівень С

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 2x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{\sin 3x}$.

2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$;

3. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$.

4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{x}$.

5. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 2x}{\cos x} \cdot \frac{2x}{x+1}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin 6x}{1 - \sin 2x}$.

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$.

- 7. Творче завдання.** Створіть лепбук із наслідками, які впливають із першої чудової границі.

VIII. Рефлексія (2 хв)

- 1) Сьогодні я дізнався/дізналась, що
- 2) Цей урок допоміг мені зрозуміти, що
- 3) Під час уроку я зрозумів/зрозуміла, що вже вмію
- 4) Найскладнішим для мене було
- 5) Тепер я впевнений/упевнена у своїй здатності
- 6) Найбільше мені сподобалося

Можливі теми проєктів

- 1.** Межі лінійного наближення: коли $\sin x \approx x$ перестає працювати.
- 2.** Перша чудова границя як основа моделей малих коливань.
- 3.** Геометричне та аналітичне обґрунтування першої чудової границі.
- 4.** Перша чудова границя і перехід від криволінійного руху до прямолінійного.
- 5.** Історія появи першої чудової границі та її значення.

Список використаних джерел

- 1) Алгебра : підручн. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Харків : Гімназія, 2011. Ч. 1. — 256 с. : іл.
- 2) Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підручн. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — Київ : Освіта, 2018. — 336 с.