11 Тема 1. Границя та неперервність функції

Урок 18. Урок–практикум. Обчислення границь функцій, за першою чудовою границею. Дослідження неперервності функцій

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

1) удосконалите вміння обчислювати границі функцій, за першою чудовою границею;

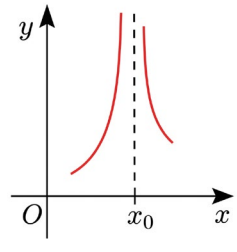
2) навчитеся досліджувати на неперервність функцій з параметрами, за першою чудовою границею;

3) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. При яких значеннях x функція $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-6x+8}$ буде неперервною?

2. Охарактеризуйте точку розриву $x=x_0$ функції $f(x)$, графік якої зображений на рисунку.



3. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{3x-x^2}$.

4. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$.

5. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$.

III. Обчислення границь функцій, за першою чудовою границею

Перша чудова границя відіграє важливу роль у знаходженні границь тригонометричних функцій. Її застосування дозволяє замінювати складні вирази еквівалентними та значно спрощувати розв'язання задач.

Нагадаємо основні наслідки із першої чудової границі та означення еквівалентних функцій:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot \operatorname{ctg} x)=1$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(kx)}{kx}=1$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}=1$;
6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$;
7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$.

Означення. Нехай функція $g(x)$ визначена і не дорівнює нулю на множині M, функція $f(x)$ визначена на множині M, a – гранична точка множини M. Говорять, що функції $f(x)$ і $g(x)$ є еквівалентними при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. Використовують таке позначення: $f\sim g$, $x\to a$.

Тому при $x\to 0$ маємо наступний ланцюжок еквівалентностей:

$$\sin x\sim \operatorname{tg} x\sim \arcsin x\sim \operatorname{arctg} x\sim x.$$

Приклад 1. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

Розв'язання. І спосіб. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{m\cdot\dfrac{\sin mx}{mx}}{n\cdot\dfrac{\sin nx}{nx}}=\dfrac{m\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{mx}}{n\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx}{nx}}=\dfrac{m}{n}$.

ІІ спосіб. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx}{nx}=\dfrac{m}{n}$.

Тут ми скористалися тим, що при $x\to 0$ $\sin mx\sim mx$, $\sin nx\sim nx$.

Відповідь. $\dfrac{7}{5}$.

Приклад 2. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{1-\cos x}$.

Приклад 3. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 11x-6x}{5x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 11x-6x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 11x}{5x}-\dfrac{6x}{5x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 11x}{5x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{5x}=\dfrac{11}{5}-\dfrac{6}{5}=1$.

Відповідь. 1.

У завданні 8 не можна одразу заміняти $\sin 11x$ на $11x$, по при $x\to 0$ вираз $(\sin 11x-6x)$ прямує до нуля, а не дорівнює 0. І хоча відповідь при такій підстановці в цьому прикладі не зміниться, однак в інших прикладах неправильне використання еквівалентних функцій може привести до помилок.

Приклад 4. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 12x}{10x}$.

Приклад 5. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}3x}$.

Приклад 6. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 2x}{x^2-\pi^2}$.

Розв'язання. Нехай $x-\pi=y$, тоді якщо $x\to\pi$, тоді $y\to 0$.

Маємо:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{x^2-\pi^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(2\pi+2y)}{(\pi+y)^2-\pi^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{y^2+2\pi y}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{2y\left(\dfrac{y}{2}+\pi\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin 2y}{2y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\dfrac{y}{2}+\pi}=\frac{1}{\pi}.$$

Відповідь. $\dfrac{1}{\pi}$.

Приклад 7. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\operatorname{ctg}^2 3x}{\sin 9x}$.

IV. Дослідження неперервності функцій з параметром із використанням першої чудової границі

Під час дослідження неперервності функцій з параметром часто виникає потреба в обчисленні границь функцій, що містять тригонометричні і обернені тригонометричні функції. У таких задачах використання першої чудової границі є необхідним для знаходження умов неперервності.

Приклад 8. При яких значеннях параметра a функція $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ буде неперервною в точці $x=0$?

Приклад 9. При яких значеннях параметра a функція $f(x)=\begin{cases}(\operatorname{ctg}5x-\operatorname{ctg}x)x, & x\neq 0,\\ a^2-1{,}8a, & x=0\end{cases}$ буде неперервною в точці $x=0$?

V. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У вимірювальному приладі сигнал обробляється за формулою

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}, & x\neq 0,\\ 8, & x=0,\end{cases}$$

де a — параметр калібрування приладу. Величина x описує дуже мале відхилення вимірюваної величини від нульового рівня. Знайдіть значення параметра a при яких функція $f(x)$ є неперервною в точці $x=0$ та поясніть фізичний зміст отриманих значень.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: A, B, C

Рівень A

1. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 12x}{10x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 13x}{\sin^2 x}$.

2. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x+\sin 11x}{5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{\operatorname{tg}^2 x}$.

3. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin\dfrac{x}{3}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$.

4. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 \alpha x}{\sin^3 \beta x}$.

5. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} ax}{bx}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 3x}$.

6. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{bx}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$.

Рівень В

1. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{x-\dfrac{\pi}{3}}$;

2) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}{4x+\pi}$.

2. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

3. Довизначте функцію $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ так, щоб вона була неперервною в точці $x=0$.

4. Доведіть, що функція $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{9}{2}, & x=0\end{cases}$ є неперервною в точці $x=0$.

5. Доведіть, що функція $f(x)=\begin{cases}\sin x\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-\pi}, & x\neq\pi,\\ 0, & x=\pi\end{cases}$ є неперервною в точці $x=\pi$.

6. Доведіть, що функція $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}, & x\neq 0,\\ 5, & x=0\end{cases}$ не буде неперервною в точці $x=0$.

Дослідіть характер точки розриву.

7. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\pi-2x}{\arcsin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x \sin x}{x\sin 4x}$.

8. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{5}} \dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{5}+x\right)}{(5x+\pi)^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\cos x}$.

9. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x}{\sin 6x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} ax+\operatorname{tg} bx}{(a+b)x}$.

10. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 11x-6x}{5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin 4x}{x}$.

11. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\cdot\operatorname{tg} x\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{x}{\sin x}\right)$.

12. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin x\cdot\operatorname{tg} x}$.

Рівень С

1. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

2. Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\pi-2x}{\arcsin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$;

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{4x-\pi}{3\arcsin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

3. Довизначте функцію $f(x)=\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ так, щоб вона була неперервною в точці $x=0$.

4. При яких значеннях параметра a функція $f(x)=\begin{cases} x\operatorname{ctg} x, & x\neq 0,\\ 2a^2+a, & x=0\end{cases}$ буде неперервною в точці $x=0$?

5. Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\operatorname{tg}\operatorname{tg} x^2}$.

6. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

7. ***Творче завдання.*** Запрограмуйте алгоритм, який за допомогою першої чудової границі встановлює, чи є неперервною функція, що задана кусково і містить параметр, залежно від значень цього параметра.

Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка»

(+) що було зрозумілим: . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

(–) що залишилося незрозумілим: . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

(?) що здивувало або зацікавило: . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Можливі теми проєктів

1. Вплив параметра на неперервність функції в точці.
2. Усунення розриву функцій, що містять тригонометричні вирази, за допомогою параметра.
3. Типові помилки при застосуванні першої чудової границі та способи їх уникнення.
4. Графічне дослідження границь і неперервності функцій з параметром.
5. Типові алгоритми знаходження параметра для забезпечення неперервності.