

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 18. Урок–практикум. Обчислення границь функцій, за першою чудовою границею. Дослідження неперервності функцій

Тип уроку: урок застосування знань.

План уроку

1. Робота над індивідуальними (груповими) проєктами.
2. Обчислення границь функцій, за першою чудовою границею.
3. Дослідження неперервності функцій з параметром із використанням першої чудової границі.

Очікувані результати навчальних досягнень

Учень/учениця:

упорядковує та перетворює інформацію математичного змісту в специфічних проблемних ситуаціях, зокрема із застосуванням інформаційних технологій [12 МАО 2.1.3–1 П];

аналізує спільні та відмінні риси різних моделей і шляхів розв'язання специфічної проблемної ситуації [12 МАО 3.2.1–1 П];

визначає та усуває прогалини у власних математичних знаннях і вміннях у специфічних проблемних ситуаціях [12 МАО 4.1.3–1 П].

Дружні поради вчителю/вчительці до уроку

- 1) Сформулюйте учням/ученицям мотиваційні запитання щодо матеріалу уроку.
- 2) Запропонуйте учням/ученицям, на ваш вибір, завдання на повторення вивченого.
- 3) Сформулюйте практичну задачу (без розв'язання). Розв'язання пропонуємо у вигляді групової роботи наприкінці уроку.
- 4) До теоретичних тверджень наведено ілюстративні приклади. Обирайте ілюстративні приклади на ваш розсуд.
- 5) Увесь запропонований матеріал неможливо подати в часових вимірах одного уроку, тому обирайте кількість матеріалу на власний розсуд.

6) Обов'язково пропонуйте розв'язання практичної задачі. Об'єднайте учнів/учениць у кілька груп. Під час розв'язання задачі групами важливо формувати комунікаційні навички, інтегрувати здобуті знання у розв'язання практичних задач.

7) Пропонуйте учням/ученицям самотужки або в групах розв'язувати тренувальні завдання за трьома рівнями складності, на вибір учня/учениці. Формуйте навички розв'язання прикладів та задач і навчайте учнів/учениць самостійної роботи над завданнями.

8) Мотивуйте учнів/учениць до проєктної діяльності. Запропонуйте учням/ученицям обрати теми для індивідуальних (групових) проєктів. Робота над обраним проєктом може тривати впродовж вивчення (повторення) усієї змістової теми. Створення проєктів та їхній захист можуть бути альтернативою контрольної роботи з теми.

9) Можливі теми для створення проєктів запропоновані. Також темами проєктів можуть бути практичні завдання за рівнями складності В або С.

10) Запропонуйте учням/ученицям заповнити лист рефлексії.

I. Організаційна частина (2–3 хв)

Мотиваційні запитання

1) Чому значення параметра може «зламати» неперервність функції в точці?

2) Чи можна підібрати параметр так, щоб «усунути розрив» функції?

3) Що відбувається з графіком функції $y = \frac{\sin x}{x}$ поблизу нуля і, як це пов'язано з першою чудовою границею?

4) Що спільного між першою чудовою границею та наближеними обчисленнями в математиці та в фізиці?

5) Чи завжди можна підібрати значення параметра функції, заданої кусково-аналітичним способом так, щоб функція стала неперервною в заданій точці?

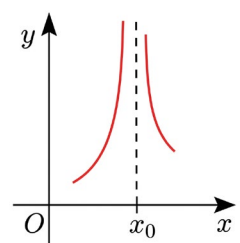
II. Повторення (3–4 хв)

1. При яких значеннях x функція $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 6x + 8}$ буде неперервною?

Відповідь. При всіх, крім $x = 2$ і $x = 4$.

2. Охарактеризуйте точку розриву $x = x_0$ функції $f(x)$, графік якої зображений на рисунку.

Відповідь. Точка розриву другого роду.



3. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{3x - x^2}$.

Відповідь. $-\frac{1}{3}$.

4. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{6}{x^2 - 9} - \frac{1}{x - 3} \right)$.

Відповідь. $-\frac{1}{6}$.

5. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$.

Відповідь. 8.

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У вимірювальному приладі сигнал обробляється за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos ax}{x^2}, & x \neq 0, \\ 8, & x = 0, \end{cases}$$

де a — параметр калібрування приладу. Величина x описує дуже мале відхилення вимірюваної величини від нульового рівня. Знайдіть значення параметра a при яких функція $f(x)$ є неперервною в точці $x = 0$ та поясніть фізичний зміст отриманих значень.

III. Обчислення границь функцій, за першою чудовою границею

Перша чудова границя відіграє важливу роль у знаходженні границь тригонометричних функцій. Її застосування дозволяє замінювати складні вирази еквівалентними та значно спрощувати розв'язання задач.

Нагадаємо основні наслідки із першої чудової границі та означення еквівалентних функцій:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;

3) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} x) = 1$;

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1$;

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = 1$;

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$;

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

Означення. Нехай функція $g(x)$ визначена і не дорівнює нулю на множині M , функція $f(x)$ визначена на множині M , a – гранична точка множини M . Говорять, що функції $f(x)$ і $g(x)$ є еквівалентними при $x \rightarrow a$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Використовують таке позначення: $f \sim g, x \rightarrow a$.

Тому при $x \rightarrow 0$ маємо наступний ланцюжок еквівалентностей:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim x.$$

Ілюстративні приклади (10–15 хв)

6. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$.

Розв'язання. I спосіб.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m \cdot \frac{\sin mx}{mx}}{n \cdot \frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx}}{n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n}.$$

II спосіб.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

Тут ми скористалися тим, що при $x \rightarrow 0$ $\sin mx \sim mx$, $\sin nx \sim nx$.

Відповідь. $\frac{7}{5}$.

7. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x}$.

Розв'язання.
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \\ &= 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2} = \frac{6}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2} = \frac{6}{1} = 6. \end{aligned}$$

Відповідь. 6.

8. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 11x - 6x}{5x}$.

Розв'язання.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 11x - 6x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 11x}{5x} - \frac{6x}{5x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 11x}{5x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{5x} = \frac{11}{5} - \frac{6}{5} = 1.$$

Відповідь. 1.

У завданні 8 не можна одразу замінити $\sin 11x$ на $11x$, бо при $x \rightarrow 0$ вираз $(\sin 11x - 6x)$ прямує до нуля, а не дорівнює 0. І хоча відповідь при такій підстановці в цьому прикладі не зміниться, однак в інших прикладах неправильне використання еквівалентних функцій може привести до помилок.

9. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x - \sin 12x}{10x}$.

Розв'язання. I спосіб. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x - \sin 12x}{10x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x \cos 10x}{10x} =$

$$= -\frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 10x = -\frac{2}{5}.$$

II спосіб. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x - \sin 12x}{10x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 8x}{10x} - \frac{\sin 12x}{10x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{10x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{10x} =$

$$= \frac{8}{10} - \frac{12}{10} = -\frac{2}{5}.$$

Відповідь. $-\frac{2}{5}$.

10. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 2x \cos 3x}{\sin 5x} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{5}.$

Відповідь. $\frac{1}{5}$.

11. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{x^2 - \pi^2}$.

Розв'язання. Нехай $x - \pi = y$, тоді якщо $x \rightarrow \pi$, тоді $y \rightarrow 0$.

Маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{x^2 - \pi^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(2\pi + 2y)}{(\pi + y)^2 - \pi^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 2y}{y^2 + 2\pi y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 2y}{2y \left(\frac{y}{2} + \pi \right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 2y}{2y} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{y}{2} + \pi} = \frac{1}{\pi}.$$

Відповідь. $\frac{1}{\pi}$.

12. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \operatorname{ctg}^2 3x}{\sin 9x}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \operatorname{ctg}^2 3x}{\sin 9x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin 9x \cdot \operatorname{tg}^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{9x \cdot (3x)^2} = \frac{1}{9 \cdot 9} = \frac{1}{81}.$

Відповідь. $\frac{1}{81}$.

IV. Дослідження неперервності функцій з параметром із використанням першої чудової границі

Під час дослідження неперервності функцій з параметром часто виникає потреба в обчисленні границь функцій, що містять тригонометричні і обернені тригонометричні функції. У таких задачах використання першої чудової границі є необхідним для знаходження умов неперервності.

Ілюстративні приклади (5–7 хв)

- 13.** При яких значеннях параметра a функція $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ буде неперервною в точці $x = 0$?

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2.$

$f(0) = a$, тому для того щоб функція $f(x)$ була неперервною в точці 0 необхідно і достатньо щоб $a = 2$.

Відповідь. 2.

- 14.** При яких значеннях параметра a функція $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 3ax}{2x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ буде неперервною в точці $x = 0$?

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3ax}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{3ax}{2}}{2x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9a^2 x^2}{4} = \frac{9a^2}{4}.$

$f(0) = 1.$

Функція $f(x)$ буде неперервною в точці $x = 0$ тоді і тільки тоді коли $\frac{9a^2}{4} = 1$, тобто

$a = \pm \frac{2}{3}$

Відповідь. $\pm \frac{2}{3}.$

- 15.** При яких значеннях параметра a функція $f(x) = \begin{cases} (\operatorname{ctg} 5x - \operatorname{ctg} x)x, & x \neq 0, \\ a^2 - 1,8a, & x = 0 \end{cases}$ буде неперервною в точці $x = 0$?

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 5x - \operatorname{ctg} x)x = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 4x}{\sin 5x \sin x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 4x}{5x \cdot x} = -\frac{4}{5}.$

$f(0) = a^2 - 1,8a.$

Функція $f(x)$ буде неперервною в точці $x = 0$ тоді і тільки тоді коли $a^2 - 1,8a = -\frac{4}{5}$,

тобто $5a^2 - 9a + 4 = 0$, $a = 1$ або $a = \frac{4}{5}$.

Відповідь. 1; $\frac{4}{5}.$

V. Розв'язування практичної задачі. Групова активність (5 хв)

Як я вирішую певну проблему?

Задача. У вимірювальному приладі сигнал обробляється за формулою

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos ax}{x^2}, & x \neq 0, \\ 8, & x = 0, \end{cases}$$

де a — параметр калібрування приладу. Величина x описує дуже мале відхилення вимірюваної величини від нульового рівня. Знайдіть значення параметра a при яких функція $f(x)$ є неперервною в точці $x = 0$ та поясніть фізичний зміст отриманих значень.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a^2 x^2}{4}}{x^2} = \frac{a^2}{2}.$

$f(0) = 8.$

Функція $f(x)$ буде неперервною в точці $x = 0$ тоді і тільки тоді коли $\frac{a^2}{2} = 8$, тобто

$a^2 = 16$, $a = 4$ або $a = -4$.

При $a = 4$ або $a = -4$ немає «стрибка» сигналу при переході через нуль, прилад не реагує різко на нескінченно малу зміну і нульове положення приладу відкаліброване правильно.

Відповідь. $a = 4$ або $a = -4$.

VI. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С (5–10 хв)

Рівень А

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 12x}{10x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 13x}{\sin^2 x}.$

2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x + \sin 11x}{5x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{\operatorname{tg}^2 x}.$

3. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin 3x};$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin \frac{x}{3}};$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}.$

4. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \alpha x}{\sin^3 \beta x}.$

5. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} ax}{bx};$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 3x}.$

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{bx}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$.

Рівень В

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$;

2) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{4x + \pi}$.

2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

3. Довизначте функцію $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ так, щоб вона була неперервною в точці $x = 0$.

4. Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{9}{2}, & x = 0 \end{cases}$ є неперервною в точці $x = 0$.

5. Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} \sin x \operatorname{arctg} \frac{x}{x - \pi}, & x \neq \pi, \\ 0, & x = \pi \end{cases}$ є неперервною в точці $x = \pi$.

6. Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 6x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 5, & x = 0 \end{cases}$ не буде неперервною в точці $x = 0$.

Дослідіть характер точки розриву.

7. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\arcsin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x \sin x}{x \sin 4x}$.

8. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{5}} \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{5} + x\right)}{(5x + \pi)^2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \sqrt{2} \cos x}$.

9. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{\sin 6x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax + \operatorname{tg} bx}{(a + b)x}$.

10. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 11x - 6x}{5x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 4x}{x}$.

11. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{\cos x} - 2x \cdot \operatorname{tg} x \right)$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{x}{\sin x} \right)$.

12. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin x \cdot \operatorname{tg} x}$.

Рівень С

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$.

2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\arcsin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4x - \pi}{3 \arcsin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$.

3. Довизначте функцію $f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$ так, щоб вона була неперервною в точці $x = 0$.

4. При яких значеннях параметра a функція $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{ctg} x, & x \neq 0, \\ 2a^2 + a, & x = 0 \end{cases}$ буде неперервною в точці $x = 0$?

5. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\operatorname{tg} \operatorname{tg} x^2}$.

6. Знайдіть границю $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + 1}\right)$.

7. Творче завдання. Запрограмуйте алгоритм, який за допомогою першої чудової границі встановлює, чи є неперервною функція, що задана кусково і містить параметр, залежно від значень цього параметра.

VII. Рефлексія. «Плюс-Мінус-Цікавинка» (1–2 хв)

(+) що було зрозумілим:

(–) що залишилося незрозумілим:

(?) що здивувало або зацікавило:

Можливі теми проєктів

- Вплив параметра на неперервність функції в точці.
- Усунення розриву функцій, що містять тригонометричні вирази, за допомогою параметра.
- Типові помилки при застосуванні першої чудової границі та способи їх уникнення.

4. Графічне дослідження границь і неперервності функцій з параметром.
5. Типові алгоритми знаходження параметра для забезпечення неперервності.

Список використаних джерел

- 1) Алгебра : підручн. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Харків : Гімназія, 2011. Ч. 1. — 256 с. : іл.
- 2) Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Вчимося розв'язувати задачі з початків аналізу. — Тернопіль: «Підручники & посібники», 2001. — 304 с: іл.