

11

Тема 1.

Границя та неперервність функції

Урок 19. Властивості границь функції при $x \rightarrow \infty$

РОБОЧИЙ АРКУШ

(моє ім'я)

I. Очікувані результати навчальних досягнень

На уроці ви:

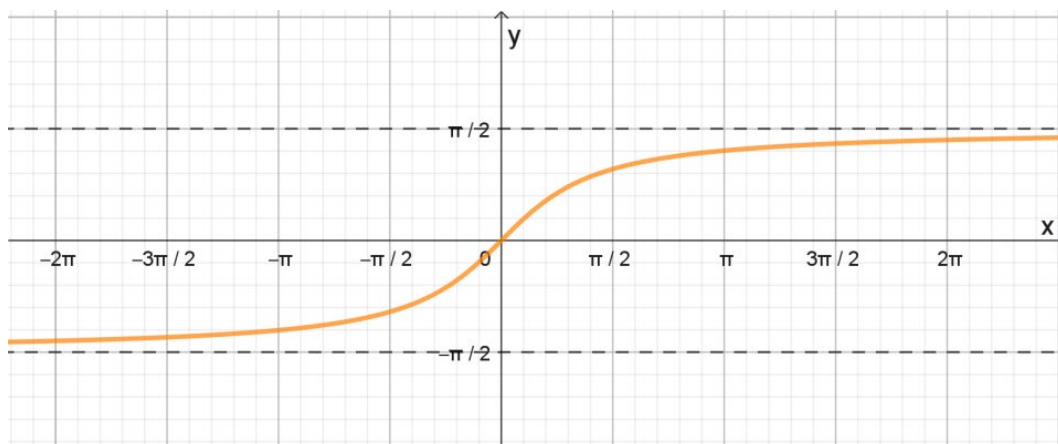
- 1) навчитеся будувати графічну ілюстрацію границь функцій, за умови, що $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$;
- 2) вивчите означення границь функції, за умови, що $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$;
- 3) вивчите властивості границь функції при $x \rightarrow \infty$;
- 4) навчитеся використовувати властивості границь функції при $x \rightarrow \infty$ для розв'язування вправ;
- 5) навчитеся використовувати набуті знання для розв'язування практичних задач.

II. Повторення

1. Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+n-n^2}{2n^2-1} \right)^3$.
2. Знайдіть границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{3x}$.
3. Чи має границю послідовність 1, 4, 9, 16, 25, ... ?
4. Обчисліть границю суми нескінченної спадної геометричної прогресії $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$.
5. Чому дорівнює границя добутку нескінченно малої послідовності і обмеженої послідовності?

III. Графічна ілюстрація границь функції за умови, що $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$

Розглянемо графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ (див. рисунок).



Якщо обрати довільну необмежено зростаючу послідовність x_n аргументів цієї функції, то відповідна їй послідовність $\operatorname{arctg}(x_n)$ буде прямувати до числа $\frac{\pi}{2}$.

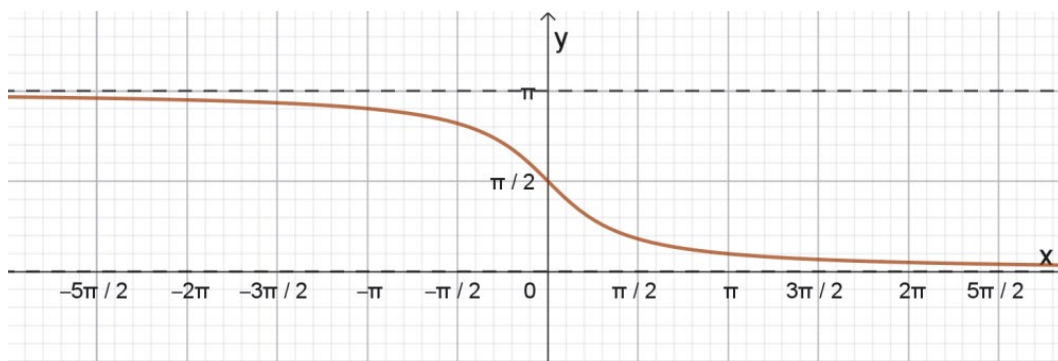
У такому випадку говорять, що число $\frac{\pi}{2}$ є границею функції $y = \operatorname{arctg} x$ при $x \rightarrow +\infty$.

Цей факт записують так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Також, по аналогії, можна сказати, що $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

Приклад 1. Користуючись рисунком установіть чому дорівнюють

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \text{ та } \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x.$$

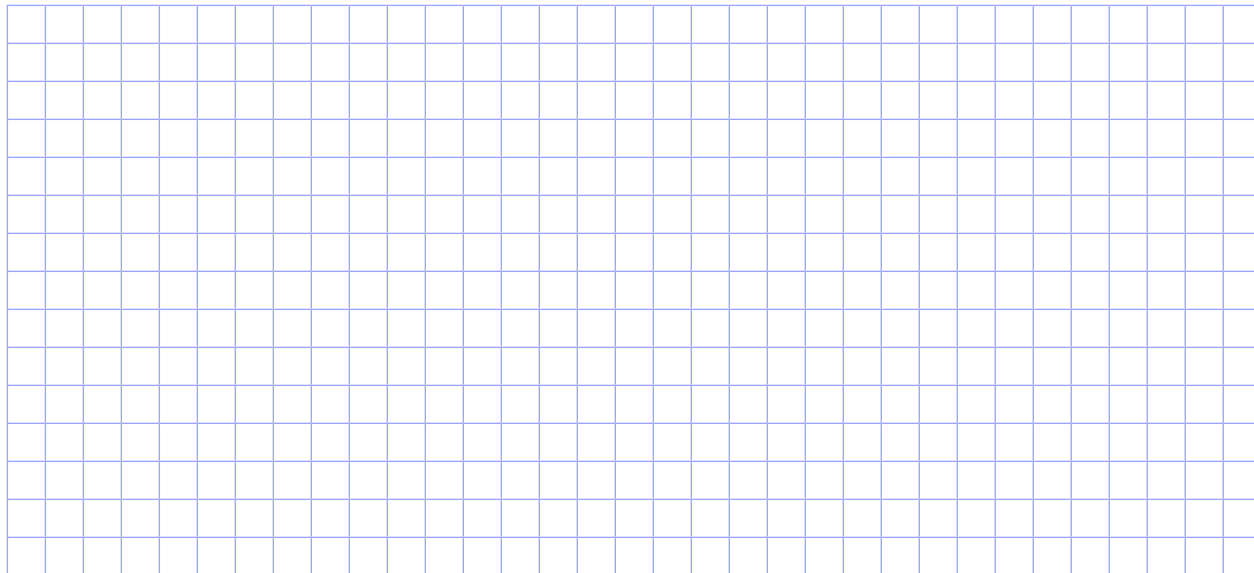


Розв'язання. Виберемо довільну необмежено зростаючу послідовність x_n аргументів функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$, відповідна їй послідовність $\operatorname{arctg}(x_n)$ буде прямувати до числа 0, тому $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = 0$.

Для довільної необмежено спадної послідовності x_n аргументів функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$, відповідна їй послідовність $\operatorname{arctg}(x_n)$ буде прямувати до числа π , тому $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = \pi$.

Відповідь. 0; π .

Приклад 2. Побудуйте графік функції $y = \frac{6}{x}$ та за графіком встановіть значення $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x}$ та $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x}$.



IV. Означення границь функції за умови, що $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$

Якщо для довільного додатного числа C знайдеться такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконуються нерівність $a_n > C$, тобто члени послідовності a_n , починаючи з деякого номера, стають більшими за будь-яке наперед задане додатне число. У такому випадку пишуть: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Аналогічно, якщо для довільного від'ємного числа C знайдеться такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $a_n < C$, тобто члени послідовності a_n , починаючи з деякого номера, стають меншими від будь-якого наперед заданого від'ємного числа. У такому випадку пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Примітка. Запис $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ чи $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ не означає, що послідовність a_n має границю.

Тепер уведемо означення границі функції на нескінченності.

Означення 1. Число a називають **границею функції** f при $x \rightarrow +\infty$, якщо для будь-якої послідовності x_n значень аргументу функції f такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, відповідна послідовність $f(x_n)$ значень функції збігається до числа a .

Пишуть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$.

Означення 2. Число a називають **границею функції** f при $x \rightarrow -\infty$, якщо для будь-якої послідовності x_n значень аргументу функції f такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, відповідна послідовність $f(x_n)$ значень функції збігається до числа a .

Пишуть $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$.

Якщо $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$, то пишуть: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$.

Також, якщо $a_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то з умови $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ або з умови $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Приклад 3. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$.

Доведення. Доведемо, що для будь-якого $C > 0$ знайдеться такий номер n_0 члена послідовності, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $n^2 > C$.

Оскільки $n > \sqrt{C}$, то покладемо $n_0 = \lceil \sqrt{C} \rceil + 1$ і тому для будь-якого додатного числа C для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $n^2 > C$, що й треба було довести.

Приклад 4. Доведіть, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{n + 1} = +\infty$.

Доведення. Доведемо, що для будь-якого $C > 0$ знайдеться такий номер n_0 члена послідовності, що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $\frac{2n^2 + 3}{n + 1} > C$.

Оскільки $\frac{2n^2 + 3}{n + 1} > \frac{2n^2}{n + 1} > \frac{2n^2}{n} = 2n$, то покладемо $n_0 = \left\lceil \frac{C}{2} \right\rceil + 1$ і тому для будь-якого додатного числа C для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $\frac{2n^2 + 3}{n + 1} > C$, що й треба було довести.

Приклад 5. Користуючись означенням доведіть, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Доведення. Нехай x_n — довільна послідовність значень аргументу функції $f(x) = \frac{1}{x}$

така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Тоді послідовність $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}, \dots$ є нескінченно малою, тоб-

то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$. Це означає, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Що й треба було довести.

V. Властивості границь функції при $x \rightarrow \infty$

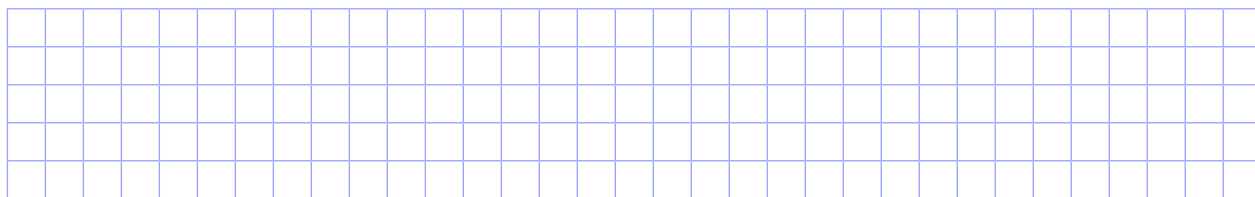
Границі функції на нескінченності притаманні властивості, аналогічні властивостям границі функції в точці. Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають спільну область визначення.

Якщо $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, то:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = a + b$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x)) = ab$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ за умови, що $b \neq 0$.

Доведення цих властивостей пропонуємо самостійно.

Приклад 6. Доведіть, що коли функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають спільну область визначення і $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x)) = ab$.



Приклад 7. Доведіть, що коли функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають спільну область визначення і $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ за умови, що $b \neq 0$.

Доведення. Нехай x_n — довільна необмежено зростаюча чи необмежено спадна послідовність значень аргументу функцій f і g . Тоді відповідні послідовності $f(x_n)$ і $g(x_n)$ значень функцій є збіжними до чисел a і b відповідно. За теоремою про границю частки збіжних числових послідовностей, послідовність $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ також

є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)} = \frac{a}{b}$. Оскільки послідовність x_n було ви-

брано довільно, то це означає, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)}$.

VI. Практичне застосування властивостей границь функцій при $x \rightarrow +\infty$

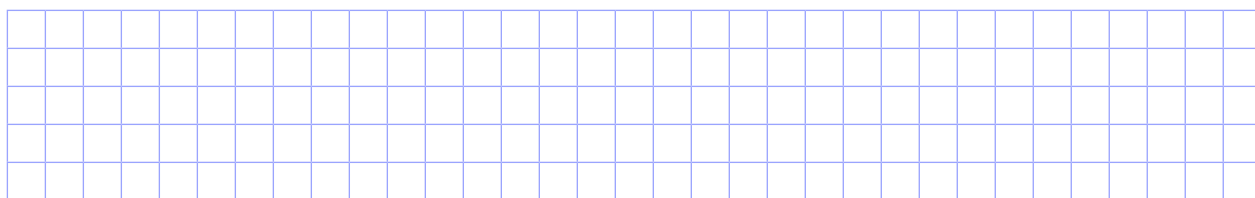
Процес знаходження границь функцій із застосуванням властивостей на нескінченності багато в чому схожий на процес знаходження границь числових послідовностей. Проілюструємо це прикладами.

Приклад 8. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1}$.

$$\text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1-0} = 2.$$

Відповідь. 2.

Приклад 9. Обчисліть $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2 + 1}{1 + 3x - x^3}$.



Приклад 10. Обчисліть границю $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$

Відповідь. $\frac{1}{2}.$

VII. Розв'язування практичної задачі

Як я вирішую певну проблему?

Задача. Продуктивність системи при навантаженні x (умовні одиниці) оцінюють двома різними аналітичними моделями. Перша модель враховує базову пропускну здатність і додаткові втрати: $P_1(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 5x}$. Друга модель описує спрощену оцінку ефективності системи: $P_2(x) = \frac{2x}{x+1}$. Різниця між оцінками продуктивності виражається функцією $D(x) = P_1(x) - P_2(x)$. Знайдіть $\lim_{x \rightarrow +\infty} D(x)$ та використовуючи властивості границь, поясніть, чому кожен з моделей можна замінити простішою при великих x .

VIII. Тренувальні вправи. Три рівні складності: А, В, С

Рівень А

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x-1}{x-2}:$

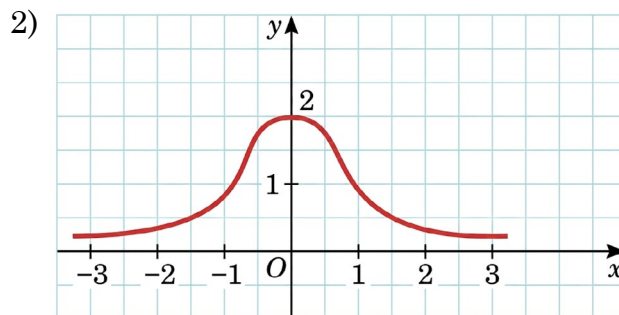
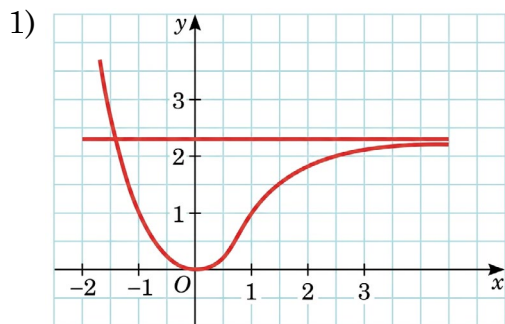
2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+3}.$

2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 5x + 10};$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 1}.$

3. Знайдіть границю при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ функції, графік якої зображено на рисунку:



4. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x) = 9$, обчисліть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x) - h(x));$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - f(x) + h(x));$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) \cdot (f(x))^2);$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)).$

5. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right);$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{8}{x^3} \right).$

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x);$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}).$

Рівень В

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1};$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1}{3x^5 + 2x^3 - 1}.$

2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{3x^4 - 7x + 1};$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 10}{5x^2 + 3x - 1}.$

3. Побудуйте графік якої-небудь функції, що задовольняє умовам:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ та $f(x) \geq 0$ на відрізку $[-7; 3];$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ та $f(x) > 0$ на проміжку $[0, +\infty).$

4. Відомо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -10$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 6$. Знайдіть границі:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)};$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)h(x)}{g(x)};$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + h(x)}{2g(x) + 15};$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3g(x)}{5h(x)}.$

5. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x^9} + 1 \right);$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{x^5} + \frac{4}{x^2} + 9 \right);$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{x^3} - \frac{7}{x} - 21 \right);$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{x^2} - 7 \right).$

6. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{x^3} + 1 \right) \cdot \left(-\frac{8}{x^2} - 2 \right);$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{x^6} - 2 \right) \cdot \left(-\frac{6}{x^{10}} - 3 \right).$

7. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x + 2});$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + x + 2}).$

8. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x - 2\sqrt{x} + 5}{x - 1};$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt{-x} + 1}{3 - \sqrt{-x}};$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + 3}{\sqrt{x} - 1};$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + x\sqrt[3]{x} - 1}{3\sqrt{-x} - 5x\sqrt[3]{x}}.$

9. Накресліть ескіз графіка функції, визначеної на R , яка задовольняє заданим умовам:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2;$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4, f(2) = -1, f(-3) = 5.$

10. Використовуючи означення границі функції на нескінченності доведіть, що:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{4x - 1} = \frac{1}{4};$ 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x}{x + 4} = -3;$ 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = 0;$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}} = 0.$

11. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - x^2 + 1}{5x^2 - 2x}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 2x^2 + 4}{3x^2 + 2x}$.

12. Знайдіть такі значення p і q , такі, щоб виконувалися рівності:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{px + 3}{qx + 8} = \frac{2}{5}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{px^2 + 6}{qx^2 - 17x + 20} = \frac{7}{4}$.

Рівень С

1. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+10x)}{x^{10} + 1}$.

2. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x^2)^{10}}{(1+2x^{10})^2}$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+3x^{11})^3}{(1+8x^5)^7}$.

3. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + a - \sqrt{x^2 + bx + c} \right)$;

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$.

4. Обчисліть границю:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1})$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2})$.

5. Знайдіть p та q , якщо:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{px^2 + 1}{qx + 2} + x - 2 \right) = -1$;

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{x + 1} + px + q \right) = 1$.

6. Знайдіть a та b , якщо:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + ax - b) = 0$;

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - ax + b) = 0$.

7. Творче завдання. Розробіть опорний конспект до теми в довільному інтернет середовищі (Canva, Figma тощо).

Рефлексія

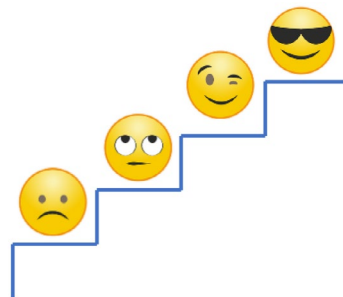
Зобразіть сходи успіху і позначте свій рівень розуміння теми уроку.

1 сходинка — «Мені важко, потрібно ще попрацювати».

2 сходинка — «Я щось зрозумів/зрозуміла, але ще маю запитання».

3 сходинка — «Можу розв'язувати завдання самостійно».

4 сходинка — «Можу пояснити завдання іншим».



Можливі теми проєктів

1. Використання комп'ютерних програм (GeoGebra, Desmos) для дослідження границь функцій при $x \rightarrow \infty$.

2. Типові помилки при обчисленні границь функцій на нескінченності та способи їхнього уникнення.

3. Моделювання довготривалих процесів за допомогою границь функцій на нескінченності.
4. Вивчення поведінки прибутку або витрат у довгостроковій перспективі, за допомогою границь функцій на нескінченності.
5. Границі на нескінченності в астрономії.







